

Elektrodynamiikka

Hannu Koskinen ja Ari Viljanen

Kevät 2002

Tämä luentomoniste on päivitetty versio Hannu Koskisen kevään 2001 luennoista. Joidenkin asioiden käsittelyjärjestystä on muutettu, joitain asioita on lisätty ja joitain poistettu (poistetut osat löytyvät kuitenkin monisteen lopusta). Osa kuvista ja taulukoista on toistaiseksi saatavilla vain kirjastossa olevasta paperiversiosta.

Uusimmassa monisteessa olevista virheistä voi ilmoittaa Ari Viljaselle (ari.viljanen@fmi.fi).

Kevään 2002 luennot: ma 10-12 E207, to 10-12 E207. (Joistain aiemmista tiedoista poiketen siis myös torstain luento salissa E207.)

Harjoitukset (2t/vk): Tiera Laitinen ja Jussi Lintunen
to 8-10 D106, 12-14 D117, pe 10-12 D106.

Välikokeet:

ti 19.3. klo 14.00-18.00 D101

ma 20.5. klo 10.00-14.00 D101

Kurssin arvosana määräytyy siten, että kummankin välikokeen paino on 40 % ja laskuharjoitusten 20 %. Täyden laskuharjoitushyvityksen saa ratkaisemalla tehtävistä viisi kuudesosaa. Oikein ratkaistusta tehtävästä saa kolme pistettä. Laskuharjoituksissa tehtävän ratkaisun esittäminen taululla palkitaan yhdellä lisäpisteellä (korkeintaan yksi lisäpiste/harjoitus). Ohjeelliset arvosanarajat löytyvät opinto-oppaasta teoreettisen fysiikan kohdalta.

Luku 1

Johdanto

It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.

R. P. Feynman

1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on kuuden opintoviikon paketti elektrodynamiikkaa, joka voidaan sisällyttää joko fysiikan laudatur-oppimäärään tai teoreettisen fysiikan cum laude-oppimäärään. Muutamana viime vuoden ajan nämä aikanaan erilliset kurssit on luennoitu yhdessä. Kahden lähestymistavoiltaan erilaisen kurssin yhdistäminen ei ole ollut aivan triviaali asia osin erilaisen oppimateriaalin, mutta myös opiskelijoiden erilaisen taustan ja mielenkiinnon kohteiden vuoksi.

Kurssin tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaantulevissa tilanteissa olivatpa nämä tilanteet sitten teoreettisia tai käytännönläheisiä. Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtämisen voi edellyttää kuuluvan jokaisen fyysikon yleisivistykseen. Se on opiskelijalle ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä ratkaiseva osa. Toisaalta sähkö ja magnetismi ovat aivan keskeisessä osassa niin kaikkialla fysiikassa kuin nykyisessä arkipäivässäkin. Oikeastaan tämän parempaa motivaatiota elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Kevään 2002 kurssi seuraa pääosin Reitzin, Milfordin ja Christyn oppikirjaa *Foundations of Electromagnetic Theory* (4 ed., tästä eteenpäin viite RMC). Luennoilla materiaali käsitellään kuitenkin hieman eri järjestyksessä, sillä tavoitteena on saada koko klassisen elektrodynamiikan rakenne aaltoyhtälön Lorentzin mitassa esitettyä ratkaisua myöten valmiiksi ensimmäisen

puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää asioita, jotka menevät syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön. Joitain asioita käsitellään myös hieman syvällisemmin kuin RMC:ssä on tehty ja siltä osin oppikirjaksi suositellaan uusinta painosta Cronströmin ja Lippaan oppikirjasta *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan* (Limes 2000, tästä eteenpäin viite CL).

Kurssin **lähtötasoksi sähköopin osalta oletetaan fysiikan peruskurssien hallinta**. Viitemateriaalina ovat Kaarle ja Riitta Kurki-Suonion oppikirjat *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet* (viitataan lyhenteellä KSII) ja *Aaltoliikkeestä dualismiin* (viitataan lyhenteellä KSIII) (Limes ry., useita painoksia). Joillakin opiskelijoilla saattaa olla taustalla peruskurssin sijasta fysiikan approbatur, mikä tietenkin hyvin opiskeltuna riittää sekín.

Yksi elektrodynamiikan opiskelun vaikeuksista on varsin vaativien matemaattisten apuneuvojen tarve. Tällä kurssilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MAPU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Myös FYMM II olisi hyödyllinen, mutta koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat ottavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä, tätä ei varsinaisesti edellytetä. **FYMM II:n opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on kuitenkin erittäin suositeltavaa.** Tärkeimpiä matemaattisia apuneuvoja kerrataan kurssin laskuharjoituksissa. Laskuharjoitustehtävien omakohtainen suorittaminen on olennainen osa kurssin sisältämän materiaalin oppimista!

1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti formaalisesti nykyasunsa vuonna 1864, kun *James Clerk Maxwell* julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan ”*Treatise on Electricity and Magnetism*”. Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen teoreettinen rakennelmansa perustui tietenkin aiempien fyysikoiden töille, joista mainittakoon tässä 1700-luvulta vaikkapa *Cavendish*, *Coulomb*, *Franklin*, *Galvani*, *Gauss* ja *Volta* sekä aiemmalta 1800-luvulta *Ampère*, *Arago*, *Biot*, *Faraday*, *Henry*, *Savart* ja *Ørsted*.

Yksi tärkeimmistä Maxwellin teorian ennustuksista oli valon nopeudella etenevän sähkömagneettisen aallon olemassaolo, jonka *Heinrich Hertz* onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suurista murroskausista. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksiin kuuluivat esim. liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri tällaisia ongelmia selittämään

Albert Einstein kehitti suppeamman suhteellisuusteoriaansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian alkeet voikin olla havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria ja Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korjettiksi formuloiduksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi myös kvanttifysiikan kehitys. Se aiheutti paljon enemmän elektrodynamiikkaan liittyviä ongelmia, sillä ensinnäkään ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi riittävän yleinen myös mikromaailmaan vietyä. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset formuloinnit, kuten Schrödingerin yhtälö, ovat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennenkuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan **kvanttielektrodynamiikaksi** (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat *Julian Schwinger*, *Richard Feynman*, *Sin-itiro Tomonaga* ja *Freeman Dyson*. Tänä päivänä elektrodynamiikka QED:n klassisena rajana on osa menestyksestä **standardimallia**, jonka uskotaan olevan oikea tapa yhdistää sähköinen, heikko ja vahva perusvoima keskenään. Niinpä klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on perusta paljon pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle!

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka onkin tullut osaksi kvanttimaailman ihmeellisyyttä, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä aina ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Elektrodynamiikka on keskeistä materiaalfysiikassa, hiukkassuihkujen fysiikassa, röntgenfysiikassa, elektroniikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Niinpä klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta myös menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Seuraavat tehtävät voidaan määrittellä elektrodynamiikan perusprobleemiksi:

1. Varausten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän määrittäminen.
2. Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.
3. Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.
4. Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.
5. Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useimmat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päättyen elektrodynamiikan peruspilareihin **Maxwellin yhtälöihin** ikäänkuin olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei tietenkään ole aivan totta enää tämän kurssin tapauksessa, vaan käytännössä kaikki ovat jo tutustuneet ainakin päällisin puolin Maxwellin yhtälöihin ja tietävät yhtä ja toista elektrodynamiikan rakenteesta. Niinpä voimme jo aivan näin kurssin aluksi hieman pohtia, mistä elektrodynamiikassa on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt nk. tyhjömuodossaan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Tässä muodossaan sähkökentän \mathbf{E} ja magneettikentän (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden) \mathbf{B} lähteinä ovat sähkövaraukset ρ ja sähkövirrat \mathbf{J} . Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein kenttien $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ ja $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ avulla, mutta palaamme tähän myöhemmin.

Yllä ϵ_0 on tyhjän sähköinen permittiivisyys ja μ_0 on tyhjän magneettinen permeabiliteetti. Näiden ja valon nopeuden c välillä on relaatio $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. Koska valon nopeus tyhjiössä on vakio, sille annetaan nykyään **tarkka** arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Koska sekunti määritellään tietyn Ce-133 siirtymäviivan avulla, tulee metristä johdannaissuure, joka on aika tarkkaan samanmittainen kuin Pariisissa säilytettävä platinatanko. Myös μ_0 määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

joten tyhjän permittiivisyydelle jää myös tarkka arvo $\epsilon_0 = (c^2 \mu_0)^{-1}$, jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Voimaa kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. Se

on nopeudella \mathbf{v} liikkuvaan varaukseen q vaikuttava voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

Tämä on suureen määrään kokeita perustuva **empiirinen laki**, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä fundamentaalisemmasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan ”nähdä”, ne ovat fysikaalisia olioita: Niillä on energiaa, liikemäärää ja impulssimomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjiössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mentäessä mikroskooppiseen kuvailuun QED:n tasolle, sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Se, että tähän ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratoriokokeissa, käy ilmi seuraavista esimerkeistä:

Esim. 1. Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on $\langle \mathbf{E} \rangle_{rms} \approx 50$ V/m. Tämä merkitsee 10^{15} näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.

Esim. 2. Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Tällaisen fotonin liikemäärä on $2.2 \cdot 10^{-34}$ Ns. Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.

Esim. 3. Varausten diskreettisuutta ei myöskään tarvitse yleensä huomioida. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan 10^{15} alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljettamiseen tarvitaan $6.2 \cdot 10^{12}$ varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin tehdä johtopäätös, että riippuvuus on ainakin lähes tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa $1/r^{2+\varepsilon}$, voidaan mittauksilla etsiä rajoja ε :lle. *Cavendish* päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen $|\varepsilon| \leq 0.02$. Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ ja nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen $|\varepsilon| \leq (2.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-16}$.

Teoreettisin perustein voi argumentoida, että $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus on ekvivalenttia fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin *Cavendishin* menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa $1.6 \cdot 10^{-50}$ kg. Geomagnetisilla mittauksilla fotonin massan yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi: $m_\gamma < 4 \cdot 10^{-51}$ kg. Voimme siis todeta, että niin fotonin massattomuus kuin sähköisen voiman $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus ovat erittäin hyvin todennettuja **kokeellisia** tosiasioita. Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin kävi selväksi, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

1.4 Kirjallisuutta

- Reitz, J. R., F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundation of Electromagnetic Theory*, 4th edition, Addison-Wesley, 1993.

Kurssin varsinainen oppikirja. Materiaali käsitellään kurssilla hieman eri järjestyksessä.

- Cronström, C., ja P. Lipas, *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan*, Limes ry., 2000.

Uudistettu laitos TFO:n monivuotisesta luentomonisteesta. Kurssin toinen oppikirja.

- Jackson, J. D., *Classical electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.

Klassisen elektrodynamiikan piipia. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.

- Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.

Suosittu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.

- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, vol. II, Addison-Wesley, 1964.

Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa sisältäen erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua.

Luku 2

Staattinen sähkökenttä

Tässä luvussa tutustutaan sähkövarausten aiheuttamaan staattiseen sähkökenttään (RMC luvut 2 ja 3; CL luvut 2 ja 3). Materiaali on periaatteessa tuttua fysiikan peruskurssilta (KSII, luku 2).

2.1 Sähkövaraus ja Coulombin laki

Maailmankaikkeudessa on tietty määrä positiivisia ja negatiivisia sähkövarauksia. Nykytietämyksen mukaan niitä ei voida hävittää eikä luoda. Näinollen minkään suljetun systeemin varausten määrä ei voi muuttua. Käytännössä useimmat systeemit ovat neutraaleja, eli niissä on yhtä paljon positiivisia ja negatiivisia varauksia. Makroskooppisen kokonaisuuden varauksella tarkoitetaan yleensä sen nettovarausta, joka on siis poikkeama varausneutraalisuudesta. Myös tämä nettovaraus säilyy, ellei systeemi ole vuorovaiikutuksessa ympäristönsä kanssa.

1700-luvun lopulla oli opittu, että varauksia on vain kahta lajia, joita nykyisin kutsutaan positiivisiksi ja negatiivisiksi. *Charles Augustin de Coulomb* muotoili kokeisiinsa perustuen seuraavanlaisen lain

- Kaksi pistevarausta vaikuttavat toisiinsa voimilla, joiden suunta on niitä yhdistävän suoran suuntainen ja kääntäen verrannollinen varausten välisen etäisyyden neliöön.
- Voimat ovat verrannollisia varausten tuloon siten, että samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa.

Tätä kutsutaan **Coulombin laiksi**, joka nykyaikaisen formalismin avulla kertoo, että varaus q_2 vaikuttaa varaukseen q_1 **sähköstaattisella** voimalla

$$\mathbf{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (2.1)$$

missä $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ on varauksesta q_2 varaukseen q_1 osoittava vektori. Sähköstaattinen vuorovaikutus noudattaa voiman ja vastavoiman lakia. Jos varaukset q_1 ja q_2 liikkuvat, tilanne muuttuu, mutta siihen palataan myöhemmin.

Lisäksi kannattaa huomata, että Coulombin laki edellyttää vuorovaikutuksen välittymistä äärettömän nopeasti koko avaruuteen. Tämä on tietysti approksimaatio, koska mikään tieto ei leviä suuremmalla kuin valon nopeudella. Toisaalta valon nopeuden suuren arvon vuoksi staattisuus on aivan kelvollinen oletus monissa käytännön tilanteissa.

Verrannollisuuskerroin k riippuu käytetystä yksikköjärjestelmästä. Sähköopissa käytetään yhä usein cgs-yksiköitä (Gaussin yksiköitä), joissa $k = 1$. Tällöin varauksen yksikkö määritellään siten, että se aiheuttaa 1 cm etäisyydellä 1 dynen voiman ($1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$) toiseen yksikkövaraukseen. Me käytämme ”virallisempia” SI-yksiköitä eli MKSA-järjestelmää, joissa

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.2)$$

missä $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ on **tyhjän permittiivisyys**. Täten kertoimen numeroarvo on $k \approx 8.9874 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ (muistisääntö: $9 \cdot 10^9$ SI-yksikköä). Näissä yksiköissä sähkövirta on perussuure. Palaamme siihen tuonnempana, mutta todettakoon tässä, että virran SI-yksikkö on ampeeri (A) ja varauksen yksikkö coulombi ($\text{C} = \text{As}$). ϵ_0 :n yksikkö on faradi/metri ($\text{F/m} = \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-1}$).

Toistettakoon, että Coulombin laki perustuu kokeellisiin havaintoihin ja voisi siten olla esimerkiksi r^{-2} -riippuvuuden osalta vain likimääräinen tulos. Modernin fysiikan teoreettiset perusteet samoin kuin erittäin tarkat mittaukset viittaavat siihen, että r^{-2} riippuvuus todella on täsmällinen luonnonlaki. Myös painovoima riippuu etäisyydestä kuten r^{-2} , mutta on olemassa vain yhdenmerkkistä gravitaatiota. Lisäksi painovoima on paljon sähköstaattista voimaa heikompi (HT: vertaa kahden elektronin välistä sähköstaattista ja gravitaatiovuorovaikutusta.).

Jos varauksia on useita, varaukseen q_i vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (2.3)$$

mikä ilmaisee voimien kokeellisesti oikeaksi todetun superpositioperiaatteen.

Tarkastellaan sitten varausta itseään. Kokeellisesti on opittu, että mitattavissa oleva varaus on kvantittunut yhden elektronin varauksen suuruisiin kvantteihin. Makroskooppisessa mielessä tämä alkeisvaraus on erittäin pieni ($e \approx 1.6019 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Tiedämme nykyisin, että kvarkeilla on $\pm 1/3$ ja $\pm 2/3$

e :n suuruisia varauksia, mutta ne näyttävät olevan aina sidottuja toisiinsa siten, että kaikkien alkeishiukkasten varaukset ovat $\pm e$:n monikertoja ja elektronin varaus on siten pienin luonnossa vapaana oleva varaus.

Yksikkövarauksen pienuudesta johtuen makroskooppinen **varausjakautuma** muodostuu yleensä suuresta joukosta alkeisvarauksia ja varaustiheyden käsite on hyödyllinen. Kolmiulotteisen avaruuden **varaustiheys** määritellään

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (2.4)$$

ja **pintavaraustiheys** vastaavasti

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (2.5)$$

missä V on tarkasteltava tiheys ja S tarkasteltava pinta.

Olkoon tilavuudessa V varausjakautuma ρ ja V :tä rajoittavalla pinnalla S pintavarausjakautuma σ . Tällöin pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukseen q vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS' \quad (2.6)$$

2.2 Sähkökenttä

Sähköstaattinen vuorovaikutus ajatellaan kaksivaiheiseksi: Staattinen systeemi aiheuttaa kentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, joka vaikuttaa pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukselliseen hiukkaseen (varaus q) voimalla

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

joka voidaan mitata. Sähköstatiikalle tyypillinen kokeellinen ongelma on se, että kenttään tuodaan tällöin ”ylimääräinen” varattu kappale. Se voi vaikuttaa huomattavasti siihen varausjakaumaan, joka aiheuttaa kentän: kappaleet polarisoituvat. Tämän vuoksi useat oppikirjat puhuvat ”pienistä testivarausista”, jotka eivät vaikuta kentän aiheuttajaan. Sähkökentän voimakkuuden määritelmä ei kuitenkaan välttämättä edellytä testivarausten käsitettä. (HT: Kuinka painovoima eroaa tässä suhteessa sähköstaattisesta voimasta?)

Yksittäisten varausten ja varausjakautumien yhteenlaskettu sähkökenttä on tietenkin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS' \end{aligned} \quad (2.8)$$

Periaatteessa sähkökenttä voidaan siis määrittää laskemalla kaikkien varausjakautumien ja yksittäisten hiukkasten aiheuttamat kentät. Käytännössä tämä on usein täysin ylivoimainen tehtävä. Myöskään mielikuvan luominen sähkökentästä ei ole aivan triviaali asia. Michael Faraday otti käyttöön **kenttäviivan käsitteen**. Vektorikentän kenttäviiva on matemaattinen käyrä, joka on jokaisessa pisteessä kyseisen vektorin suuntainen. Se on oikein käytettynä hyödyllinen apuväline, mutta se on turvallisinta ymmärtää vain keinoksi visualisoida sähkökenttää, joka on varsinainen fysikaalinen suure.

2.3 Sähköstaattinen potentiaali

Vektorianalyysin alkeistiedoilla osaamme todistaa, että

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (2.9)$$

eli staattisen sähkökentän roottori häviää:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.10)$$

ja sähkökenttä voidaan esittää **sähköstaattisen potentiaal**in φ avulla

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Pisteessä \mathbf{r}_1 sijaitsevan hiukkasen aiheuttama potentiaali on siten

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (2.12)$$

kun sovitaan, että äärettömydessä potentiaali häviää. Vastaavasti mielivaltaiselle varausjoukolla

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \end{aligned} \quad (2.13)$$

jotka molemmat voi näyttää toteen laskemalla potentiaalin gradientin.

Sähköstaattinen kenttä on esimerkki **konservatiivisesta** voimakentästä. Se merkitsee sitä, että **potentiaalienergia** U eli voiman \mathbf{F} viivaintegraali annetusta referenssipisteestä ref tarkastelupisteeseen \mathbf{r}

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{ref}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.14)$$

on riippumaton integrointitiestä. Koska itse fysikaalinen suure sähkökenttä riippuu vain potentiaalin derivaatasta, potentiaalin nollakohdan voi valita mieleisekseen. Asettamalla $\varphi(ref) = 0$ saadaan $U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r})$.

Potentiaalin käsitteestä on suurta hyötyä erilaisissa sähkökenttään liittyvissä ongelmissa. Tämä johtuu osaksi siitä, että sähkökentän integroiminen varausjakautumista on olennaisesti monimutkaisempi tehtävä kuin yksinkertaisemman potentiaalin laskeminen. Potentiaali on toki vielä derivoitava, mutta se on aina helpompaa kuin integrointi. Käytännöllisempi syy potentiaalien käyttökelpoisuudelle on kuitenkin se, että matematiikan potentiaaliteoria tarjoaa koko joukon hyödyllisiä matemaattisia apuneuvoja.

SI-järjestelmässä voiman yksikkö on newton (N) ja varauksen yksikkö on coulombi (C), joten sähkökentän yksikkö on N/C. Energian yksikkö on puolestaan joule (J = Nm) eli sähköstaattisen potentiaalin yksikkö on siten J/C. Sähköopissa potentiaalin yksikköä kutsutaan voltiksi (siis $V = J/C$) ja sähkökentän yksikkö ilmaistaan yleensä muodossa V/m.

2.4 Gaussin laki

2.4.1 Maxwellin ensimmäinen yhtälö

Tarkastellaan origossa olevan pistevarauksen q kenttää

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.15)$$

Olkoon V jokin tilavuus varauksen ympärillä ja S sen reuna ∂V . Integroidaan sähkökentän normaalikomponentti tämän reunan yli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS \quad (2.16)$$

Nyt $(\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{n} dS$ on dS :n projektiio \mathbf{r} :ää vastaan kohtisuoralle tasolle ja tämä pinta-ala jaettuna r^2 :lla on avaruuskulma-alkio $d\Omega$, joka pallokoordinaatistossa on $\sin\theta d\theta d\phi$. Valitaan sitten V :n sisäpuolelta origokeskinen pallonmuotoinen alue, jonka reuna on S' . Nyt infinitesimaalinen pinta-alkio dS' kattaa yhtä suuren avaruuskulman $d\Omega$ kuin elementti dS , joten

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} dS' = \oint_{S'} d\Omega = 4\pi \quad (2.17)$$

mistä seuraa

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

Jos varaus on tilavuuden V ulkopuolella, se ei vaikuta pintaintegraaliin. Tämän näkee tarkastelemalla varauksen kohdalta kohti tilavuutta V avautuvaa avaruuskulmaelementin $d\Omega$ suuruista kartiota. Tämä kartio läpäisee

tilavuuden V sekä sisään että ulospäin ja näinollen pinta-alkioiden integraalit summautuvat nolnaan. (Piirrä kuva!)

Tulos yleistyy N :n varauksen parvelle

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (2.19)$$

Jos suurta varausjoukkoa tarkastellaan varausjakautumana, voidaan ρdV ajatella alkioksi, joka tuottaa pintaintegraandiin osuuden $\rho dV/\epsilon_0$ eli integroituna tilavuuden V yli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.20)$$

mikä on peruskurssilta tuttu **Gaussin laki** integraalimuodossa.

Vektorianalyysistä tunnemme **divergenssiteoreeman** eli **Gaussin lauseen** riittävän siistille vektorikentälle \mathbf{u}

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.21)$$

missä \mathbf{n} on tilavuutta V ympäröivän pinnan S ulkonormaalivektori. Sovelletaan tätä Gaussin lain vasemmalle puolelle, jolloin

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.22)$$

Tämän lauseen täytyy olla riippumaton tilavuuden V valinnasta, eli

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.23)$$

ja olemme saaneet Gaussin lain differentiaalimuodossa. Kutsumme tätä Maxwellin ensimmäiseksi yhtälöksi (laiksi).

2.4.2 Gaussin lain soveltamisesta

Pallosymmetrisen varausjakautuma

Pallosymmetrisessä tapauksessa varaustiheys on muotoa $\rho = \rho(r)$, jolloin sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan etäisyydestä origosta: $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, mikä on helppo päätellä suoraan Coulombin laista. Tarkastellaan integraalimuotoista Gaussin lakia pallokoordinaateissa. Ensinnäkin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(r)\mathbf{e}_r \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r) = 4\pi r^2 E(r) \quad (2.24)$$

Toisaalta Gaussin laki antaa

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') (r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi) = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.25)$$

joten saamme pallosymmetriselle varausjakautuman sähkökentäksi

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.26)$$

Sovelletaan tätä sitten tasaisesti varatulle R -säteiselle pallolle, jonka sisällä varaustiheys on ρ_0 ja ulkopuolella nolla. Pallon kokonaisvaraus on

$$Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \quad (2.27)$$

Yksinkertainen integrointi antaa sähkökentäksi

$$\begin{aligned} r \leq R & \quad E(r) = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ r > R & \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Varausjakautuman ulkopuolella sähkökenttä on siis sama kuin origossa olevan pistevarauksen Q kenttä.

Viivavaraus

Esimerkkinä sylinterisymmetrisestä tapauksesta tarkastellaan pitkää tasaisesti varattua ohutta lankaa, jonka varaustiheys pituusyksikköä kohti on λ . Symmetrian perusteella on selvää, että sähkökenttä on radiaalinen (joko kohti lankaa tai siitä poispäin). Tarkastellaan langan ympärillä olevaa r -säteistä sylinteriä, jonka pituus on l . Integroitaessa sähkökentän normaalkomponenttia sylinterin pinnan yli, sylinterin päät eivät tuota mitään. Vaipan pinta-ala on $2\pi r l$ ja sylinterin sisällä oleva varaus λl , joten Gaussin laki antaa

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

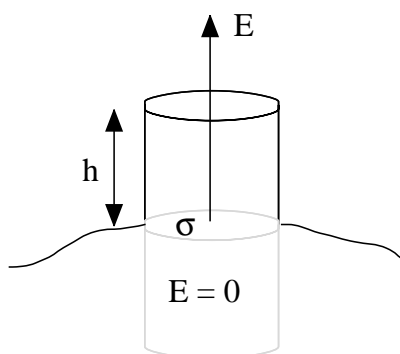
\Rightarrow

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2.30)$$

eli viivavarauksen kenttä pienenee kuten r^{-1} . Kentän potentiaali on

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r/r_0) \quad (2.31)$$

Tässä tapauksessa ei voida sopia potentiaalia nolaksi äärettömän kaukana.



Kuva 2.1: ”Pillerirasia” johdekappaleen reunalla.

Johdekappale

Kappaletta, jolla voi olla sisäistä varausta, kutsutaan **eristeeksi** (engl. dielectric). **Johteet** ovat puolestaan kappaleita, joissa on tarpeeksi liikkuvia varauksia, jotka jatkavat liikettään, kunnes sähkökenttä kappaleen sisällä on nolla. Varaukset joutuvat tällöin kappaleen pinnalle, eli sisällä varaustiheys on nolla ja kappaleen mahdollinen nettovaraus on pintavarausta. Jotta tilanne olisi staattinen, pinnalla olevan sähkökentän täytyy olla pinnan normaalin suuntainen $\mathbf{E}_n = nE_n$ (muuten varaukset liikkuisivat pitkin pintaa). Sovelletaan Gaussin lakia tässä tilanteessa tarkastelemalla ohutta (paksuus h) sylinterinmuotoista ”pillerirasiaa”, jonka ulompi pinta yhtyy tarkasteltavan kappaleen pintaan ja jonka tilavuus on $h dS$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, dS pohjan pinta-ala) (kuva 2.1).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n} dS - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\text{vaippa}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.32)$$

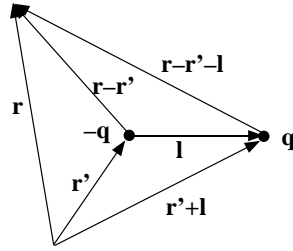
missä \mathbf{E}_i on kenttä pillerirasian sisemmällä pinnalla, siis 0. Mentäessä rajalle $h \rightarrow 0$, integraali vaipan yli menee nolaksi ja saamme

$$\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \quad (2.33)$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla pintaelementeillä, on sähkökenttä johdepallon pinnalla suoraan verrannollinen pintavaraukseen

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (2.34)$$

Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että mielivaltaisen johdekappaleen ympäröimässä tyhjässä onkalossa ei ole sähköstaattista kenttää.



Kuva 2.2: Sähködipolin muodostaminen kahdesta lähekkäisestä samansuuruisesta vastakkaismerkkisestä varauksesta.

2.5 Sähköinen dipoli

Tarkastellaan kahden erimerkkisen varauksen muodostamaa sähköistä dipolia. Olkoon varaus $-q$ pisteessä \mathbf{r}' ja varaus q pisteessä $\mathbf{r}' + \mathbf{l}$ (kuva 2.2). Tällöin sähkökenttä pisteessä \mathbf{r} on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2.35)$$

Tämä lauseke on täysin yleinen riippumatta varausten etäisyydestä. Käytännössä sähköisellä dipolilla ymmärretään raja-arvoa $l \rightarrow 0$, mikä on sama asia, kuin dipolin katselu kaukaa $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg |\mathbf{l}|$. Nyt

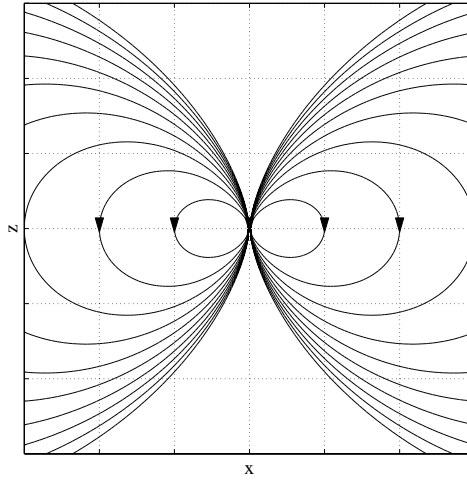
$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-3} &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^2]^{-3/2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

josta jälkimmäisen sulkulausekkeen voi kehittää binomisarjana

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-3/2} \\ &= 1 + \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right)}{2!} \left(-\frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + O[\mathbf{l}^2] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sijoittamalla tämä sähkökentän lausekkeeseen ja ottamalla mukaan \mathbf{l} :n suhteen ensimmäistä kertalukua olevat termit saadaan sähkökentän **dipoliap-proksimaatio**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right\} \quad (2.38)$$



Kuva 2.3: Dipolikentän kenttäviivat xz -tasossa. Dipoli sijaitsee origossa ja on z -akselin suuntainen.

Rajalla $l \rightarrow 0$ kenttä häviää, ellei q kasva rajatta. Pistedipoli on idealisaatio, jonka varaus on nolla, mutta jonka **dipolimomentti** $\mathbf{p} = ql$ on äärellinen ja määrää sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right\} \quad (2.39)$$

Kun dipoli sijoitetaan vielä origoon, saadaan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} \quad (2.40)$$

missä θ on dipolimomentin ja vektorin \mathbf{r} välinen kulma.

Samanlaisella laskulla saadaan dipolia vastaava potentiaali lähtien lausekkeesta

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \quad (2.41)$$

Tulos on sähkökenttää yksinkertaisempi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2.42)$$

Myöhemmin nähdään, että magneettiselle dipolille saadaan samanmuotoiset lausekkeet. Dipolikentän kenttäviivat on hahmoteltu kuvaan 2.3.

2.6 Sähkökentän multipolikehitelmä

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista varausjakautumaa $\rho(\mathbf{r}')$ origon ympäristössä. Sen aiheuttama potentiaali etäisessä pisteessä \mathbf{r} on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.43)$$

Kehitetään $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ binomisarjaksi ($r > r'$)

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{3}{8} []^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Sijoitetaan tämä potentiaalilausekkeeseen, jätetään \mathbf{r}' :n toista potenssia korkeammat termit pois ja järjestetään termit \mathbf{r}' :n kasvavien potenssien mukaan. Tämä antaa potentiaalilausekkeen multipolikehitelmän **kvadrupolimomenttia** myöten

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV' \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

missä x_i :t ovat paikkavektoreiden karteesisia komponentteja ja δ_{ij} on **Kroneckerin delta**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.46)$$

Multipolikehitelmän ensimmäinen tekijä vastaa origoon sijoitetun varausjakautuman kontribuutiota potentiaaliin. Toinen tekijä puolestaan vastaa origoon sijoitettua dipolimomenttien jakautumaa. Kolmas termi on muotoa

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \quad (2.47)$$

missä Q_{ij} on **kvadrupolimomenttitensori**. Näin ollen potentiaalilausekkeen multipolikehitelmä voidaan kirjoittaa sarjana

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right\} \quad (2.48)$$

Kaukana varausjakautumasta potentiaali on likimain ensimmäisen nolasta poikkeavan termin aiheuttama potentiaali. Atomien ytimissä dipolimomentti on nolla, mutta korkeammat multipolit ovat tärkeitä ydinfysiikassa.

2.7 Pistevarauksen jakautuma

Yksittäiset pistevaraukset voidaan käsitellä samalla formalismilla kuin varausjakautumat ottamalla käyttöön **Diracin deltafunktio** $\delta(\mathbf{r})$, jolloin

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \quad (2.49)$$

Deltafunktion ominaisuudet oletetaan tutuiksi (HT), todettakoon tässä kuitenkin seuraavat ominaisuudet

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \text{ jos } \mathbf{r} \neq 0 \quad (2.50)$$

$$\int \delta(\mathbf{r}') dV' = 1 \quad (2.51)$$

$$\int F(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) dV' = F(\mathbf{r}_0) \quad (2.52)$$

Lasketaan triviaalina esimerkkinä pisteessä \mathbf{r}_i olevan varauksen sähkökenttä tällä formalismilla

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q_i\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.53)$$

2.8 Poissonin ja Laplacen yhtälöt

Sähköstatiikka olisi aika suoraviivaista touhua, jos tietäisimme aina etukäteen kaikkien varausten paikat ja varausjakautumien paikkariippuvuudet. Näin ei kuitenkaan ole laita monissa käytännön ongelmissa. Koska $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ja $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, Gaussin laki differentiaalimuodossa vastaa matematiikan **Poissonin yhtälöä**

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.54)$$

Poissonin yhtälö voidaan integroida, jos varausjakautuman funktiomuoto ja oikeat reunaehdot tunnetaan. Usein tarkasteltavan tilanteen geometriasta on hyötyä ja silloin Laplacen operaattori ∇^2 on tarpeen kirjoittaa sopivissa koordinaateissa, esimerkiksi:

- karteesisissa koordinaateissa

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (2.55)$$

- pallokoordinaateissa

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \quad (2.56)$$

- sylinterikoordinaateissa

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (2.57)$$

Tapauksissa, joissa varaustiheys on nolla, Poissonin yhtälö yksinkertaistuu **Laplacen yhtälöksi**

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (2.58)$$

Laplacen yhtälön toteuttavaa funktiota kutsutaan **harmoniseksi**.

Tarkastellaan sitten sähköstaattista systeemiä, joka koostuu N johdekapaleesta. Kunkin johteen pinnalla potentiaali on φ_I , $I = 1, \dots, N$. Sähköstaatiikan potentiaaliongelmissa tehtävänä on etsiä $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ annetuilla reunaehdoilla. Reunaehtoja on olemassa kahta tyyppiä:

1. Tunnetaan potentiaali φ alueen reunalla. Tällaisia reunaehtoja kutsutaan **Dirichlet'n reunaehdoiksi**.
2. Tunnetaan potentiaalin derivaatan normaalikomponentti $\partial\varphi/\partial n$ alueen reunalla. Tällaisia reunaehtoja kutsutaan **von Neumannin reunaehdoiksi**.

Selvitetään ensin, missä määrin mahdollisesti löydettävät ratkaisut ovat yksikäsitteisiä.

Ensinnäkin on selvää, että

- Jos $\varphi_1(\mathbf{r}), \dots, \varphi_n(\mathbf{r})$ ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja, niin

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum C_i \varphi_i(\mathbf{r})$$

missä C_i :t ovat mielivaltaisia vakioita, on Laplacen yhtälön ratkaisu.

Yksikäsitteisyyslause

- Kaksi annettu reunaehdot täyttävää Laplacen yhtälön ratkaisua ovat additiivista vakiota vaille samat.

Tarkastellaan tämän todistamiseksi johteiden pinnat S_1, \dots, S_N sisäänsä sulkevaa tilavuutta V_0 , joka on pinnan S sisällä (pinta voi olla äärettömyydessä). Olkoot φ_1 ja φ_2 kaksi Laplacen yhtälön toteuttavaa ratkaisua, jotka täyttävät samat reunaehdot johteiden pinnalla S_I , siis joko $\varphi_1 = \varphi_2$ tai

$\partial\varphi_1/\partial n = \partial\varphi_2/\partial n$ näillä pinnoilla sekä pinnalla S . Tarkastellaan funktiota $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Tilavuudessa V_0 on tietenkin $\nabla^2\Phi = 0$. Reunaehdoista puolestaan seuraa, että kaikilla reunoilla

$$\text{joko } \Phi = 0 \text{ tai } \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

Sovelletaan sitten divergenssiteoreemaa vektoriin $\Phi\nabla\Phi$:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dV = \oint_{S+S_1+\dots+S_N} (\Phi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

koska joko Φ tai $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$ on pinnoilla 0. Toisaalta

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

eli

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2 dV = 0$$

Koska toisaalta $(\nabla\Phi)^2 \geq 0$ koko alueessa V_0 , sen on oltava nolla kaikkialla. Tästä seuraa, että Φ on vakio koko alueessa V_0 ja yksikäsitteisyyslause on siten todistettu.

Huom. Tämä ei ole todistus ratkaisun olemassaololle vaan sille, että jos ratkaisuja on, ne ovat yksikäsitteisiä! Tarkastelun merkitys on siinä, että jos löydämme millä keinolla tahansa annetut reunaehdot täyttävän Laplacen yhtälön ratkaisun, ratkaisu on Dirichlet'n reunaehdolla yksikäsitteinen ja von Neumannin reunaehdolla vakiota (eli potentiaalin nollatasoa) vaille yksikäsitteinen.

Todistuksessa käytettiin Greenin ensimmäistä kaavaa (GI)

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi) dV = \oint_S \varphi\nabla\psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.59)$$

sovellettuna tapaukseen $\Phi = \varphi = \psi$. Greenin toinen kaava (GII)

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi) dV = \oint_S (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.60)$$

tunnetaan myös nimellä **Greenin teoreema**. Nämä ovat divergenssiteoreeman suoria seurauksia (HT).

2.9 Laplacen yhtälön ratkaiseminen

Laplacen yhtälö on yksi fysiikan keskeisimmistä yhtälöistä. Sähköopin lisäksi se esiintyy mm. lämmönsiirtymisilmiöissä, virtausmekaniikassa, jne. Kovin monimutkaisissa tilanteissa yhtälöä ei voi ratkaista analyyttisesti, mutta tutustutaan tässä muutamiin tapauksiin, joissa ongelman symmetriasta on hyötyä.

2.9.1 Muuttujien erottelu

Tutustutaan tässä lyhyesti menetelmään, jolla Laplacen yhtälö, joka on osittaisdifferentiaaliyhtälö, saadaan muunnetuksi ryhmäksi tavallisia yhden muuttujan differentiaaliyhtälöitä. Aiheesta enemmän kurssilla FYMM II ja fysiikan matemaattisten menetelmien oppikirjoissa. Kirjoitetaan Laplacen yhtälö ensin karteesisissa koordinaateissa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.61)$$

ja etsitään sille ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.62)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (18.1) ja jaetaan tulolla XYZ , jolloin saadaan

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (2.63)$$

Nyt jokainen termi riippuu vain yhdestä muuttujasta, jotka ovat keskenään riippumattomia. Niinpä kunkin termin on oltava erikseen vakioita

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (2.64)$$

missä $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Nyt kukin yhtälöistä (2.64) on helppo ratkaista

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{\beta y} + B_2 e^{-\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (2.65)$$

missä yleisesti kompleksiarvoiset vakiot A_i , B_i , C_i ja α , β , γ määräytyvät ongelman reunaehdoista.

Laplacen yhtälö voidaan separoida kaikkiaan 11 erilaisessa koordinaatistossa. Koska pistevarauksen kenttä on pallosymmetrinen, pallokoordinaatisto on usein erittäin käyttökelpoinen. Laplacen yhtälö on tällöin

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.66)$$

Etsitään tälle ratkaisua muodossa

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (2.67)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.66), kerrotaan suurella $r^2 \sin^2 \theta$ ja jaetaan $R\Theta\Phi$:llä:

$$r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 \quad (2.68)$$

Nyt ainoastaan viimeinen termi riippuu ϕ :stä, joten sen on oltava vakio, jota merkitään $-m^2$:llä:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (2.69)$$

Tämän ratkaisut ovat tietenkin muotoa

$$\Phi(\phi) = \text{vakio} \cdot e^{\pm im\phi} \quad (2.70)$$

Yleisesti m on kompleksinen, mutta fysikaalinen ehto rajaa sen mahdolliset arvot: jotta ratkaisu olisi jatkuva, kun $\phi \rightarrow 0$ ja $\phi \rightarrow 2\pi$, on oltava $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, joten $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Yhtälön (2.68) ensimmäisen termin on oltava puolestaan m^2 , joten

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) = 0 \quad (2.71)$$

Nyt tämän yhtälön ensimmäinen ja toinen termi riippuvat kumpikin ainoastaan omasta muuttujastaan ja ovat siten yhtä suuria vastakkaismerkkisiä vakioita, jota merkitään $l(l+1)$:llä

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2R}{dr^2} = (l+1)l \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -(l+1)l \quad (2.73)$$

Yhtälön (2.72) yleinen ratkaisu on muotoa

$$R(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad (2.74)$$

missä A ja B ovat vakioita. Kirjoittamalla $\xi = \cos\theta$ saadaan Θ :n yhtälöksi

$$\frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right) \Theta = 0 \quad (2.75)$$

Jotta tämän ratkaisut olisivat äärellisiä pisteissä $\xi \pm 1$ eli $\theta = 0, \pi$, on oltava $l = |m|, |m|+1, \dots$. Tietyllä tavalla normitettuja ratkaisuja ovat **Legendren liittofunktiot** $P_l^m(\xi)$. Niille on voimassa ehto $|m| \leq l$, joten

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (2.76)$$

Erikoistapauksessa $m = 0$, jolloin Laplacen yhtälön ratkaisu ei riipu lainkaan ϕ :sta, Legendren liittofunktiot redusoituvat **Legendren polynomeiksi** P_l , jotka voidaan laskea kaavasta

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \quad (2.77)$$

Legendren liittofunktiot saadaan Legendren polynomeista puolestaan kaavalla

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \quad (2.78)$$

Yleisesti Laplacen yhtälöllä on siis pallokoordinaatistossa jokaista l kohti $2l + 1$ kulmista θ ja ϕ riippuvaa ratkaisua. Ne voidaan sopivasti normittaen lausua **palloharmonisten funktioiden**

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.79)$$

avulla. Normitus on valittu siten, että pallofunktiot Y_{lm} muodostavat ortonormitetun täydellisen funktiojärjestelmän pallon pinnalla:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{np}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ln} \delta_{mp} \quad (2.80)$$

Palloharmonisten yhteenlaskuteoreema antaa kahden vektorin välisen etäisyyden käänteisluvun summana

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (2.81)$$

missä vektorin \mathbf{r} suuntakulmat ovat θ, ϕ ja vektorin \mathbf{r}' suuntakulmat θ', ϕ' sekä $r_{<} = \min(r, r')$ ja $r_{>} = \max(r, r')$.

Mikä hyvänsä riittävän säännöllinen pallon pinnalla määritelty funktio voidaan kehittää palloharmonisten sarjaksi. Esimerkkinä käy maapallon magneettikenttä, jonka sarjakehitelmän johtava termi vastaa magneettista dipolia ja korkeammat termit johtuvat kentän lähteen poikkeamisesta dipolista, magneettisen maa-aineksen epätasaisesta jakautumasta ja maapallon yläpuolisissa ionosfäärissä ja magnetosfäärissä kulkevista sähkövirroista. Palloharmonisia funktioita tarvitaan myös paljon atomifysiikassa ja kvantttimekaniikassa mm. tarkasteltaessa impulssimomenttioperaattoreita. Tekijä $(-1)^m$ kaavassa (2.79) on vaihetekijä, joka voidaan periaatteessa jättää pois tai ottaa mukaan jo P_l^m :n määritelmässä (2.78). Sen ottaminen mukaan on hyödyllistä eritoten kvantttimekaniikan laskuissa (katso esim. *Arfken*).

Kootaan lopuksi löydetty Laplacen yhtälön muotoa

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi)$$

oleva ratkaisu, kun $0 < r < \infty$

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi) + \sum_{lm} B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.82)$$

missä summaus on

$$\sum_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l$$

ja kertoimet A_{lm}, B_{lm} määräytyvät ongelman reunaehdoista.

2.9.2 Ratkaisu pallokoordinaateissa

Ratkaistaan Laplaceen yhtälö pallokoordinaatistossa rajoittuen aksimutaalisymmetriseen tapaukseen, missä siis $\partial\varphi/\partial\phi = 0$ eli $\varphi = \varphi(r, \theta)$. Tällaisia ovat pistevarauksen tai dipolin kaltaiset tilanteet, mukaanlukien myöhemmin eteentuleva magneettisen dipolin kenttä. Laplaceen yhtälö on nyt

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.83)$$

Toistetaan harjoituksen vuoksi edellä ollut muuttujien separointi etsimällä ratkaisua yrittäen

$$\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta) \quad (2.84)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (2.85)$$

Yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin jokin vakio k kaikilla r :n ja θ :n arvoilla. Näin osittaisdifferentiaaliyhtälö on hajotettu kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Kulman θ yhtälöä kirjoitettuna muodossa

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \quad (2.86)$$

kutsutaan **Legendren yhtälöksi**. Kuten edellä todettiin, fysikaalisesti kelvolliset ratkaisut kaikilla $\theta \in [0, \pi]$ edellyttävät, että $k = n(n+1)$, missä n on positiivinen kokonaisluku ja ratkaisut ovat Legendren polynomeja $P_n(\cos \theta)$. (Huom. RMC merkitsee samaa asiaa $P(\theta)$:lla!)

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [\cos^2 \theta - 1]^n \quad (2.87)$$

joten muutama ensimmäinen P_n on

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos \theta \\ P_2 &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten radiaalista yhtälöä

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z \quad (2.88)$$

Yrite $Z_n(r) = C_n r^s$ antaa kaksi riippumatonta ratkaisua r^n ja $r^{-(n+1)}$. Radiaalisen yhtälön täydellinen ratkaisu on näiden lineaarikombinaatio

$$Z_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \quad (2.89)$$

ja koko Laplacen yhtälön ratkaisu atsimutaalisessa symmetriassa on muotoa

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (2.90)$$

Integroimisvakiot A_n ja B_n on määritettävä reunaehdoista.

Esimerkki. Johdepallo vakiosähkökentässä

Tarkastellaan tasaista sähkökenttää \mathbf{E}_0 , johon tuodaan varautumaton johdepallo. Johdepallo pakottaa alunperin suorat kenttäviivat taipumaan siten, että ne leikkaavat pallon pintaa kohtisuoraan. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä ja sähkökenttä on z -akselin suuntainen. Tällöin on selvää, että ongelma on atsimutaalisymmetrinen. Johteen pinta on kaikkialla samassa potentiaalissa φ_0 .

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \quad (2.91)$$

missä a on pallon säde. Kaukana pallosta sähkökenttä lähestyy alkuperäistä kenttää

$$\mathbf{E}(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} = E_0 \mathbf{e}_z \quad (2.92)$$

mistä voidaan laskea potentiaali

$$\varphi(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_0 r \cos \theta + C = -E_0 z + C \quad (2.93)$$

Valitsemalla origon potentiaaliksi nolla, saadaan $C = 0$.

Tarkastellaan sitten yhtälön 2.90 kertoimia. Kirjoitetaan auki potentiaalın muutama ensimmäinen termi

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta + A_2 r^2 \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \\ & + \frac{B_2}{r^3} \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.94)$$

Kun $r \rightarrow \infty$, $\varphi = -E_0 r \cos \theta \Rightarrow A_n = 0$, kaikille $n \geq 2$ ja $A_1 = -E_0$. Koska pallon kokonaisvaraus on nolla, potentiaalissa ei ole $(1/r)$ -riippuvuutta, eli $B_0 = 0$. Jäljellä olevat $\cos^n \theta$ -termit, joissa $n \geq 2$, ovat kaikki lineaarisesti riippumattomissa polynomeissa P_n , joten ne eivät voi kumota toisiaan pallon pinnalla, missä ei ole θ -riippuvuutta (potentiaali on vakio johteen pinnalla), eli $B_n = 0$ kaikille $n \geq 2$. Näin ollen jäljellä on

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \quad (2.95)$$

$$\varphi(r, \theta) = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad (2.96)$$

Kun $r = a$, $\cos \theta$ -termien on kumottava toisensa, joten saamme määräytyksi $A_0 = \varphi_0$ ja $B_1 = E_0 a^3$. Niinpä reunaehdot täyttävä Laplacen yhtälön ratkaisu on

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 + \left(\frac{a^3 E_0}{r^2} - E_0 r \right) \cos \theta \quad (2.97)$$

Sähkökentän $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ komponentit saadaan laskemalla

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (2.98)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (2.99)$$

Pallon pintavaraustiheys on

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r = a) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2.100)$$

Pinnalle indusoituva varausjakautuma on θ :n funktio. Sen dipolimomentti on

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{\text{pallo}} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \int_{r=a} (r \mathbf{e}_r) (3\epsilon_0 E_0 \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 6\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \int_0^\pi \mathbf{k} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.101)$$

Kaukaa katsottuna johdepallon osuus kentästä on sama kuin origoon sijoitetun dipolin, jonka dipolimomentti on $\mathbf{p} = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z$.

2.9.3 Ratkaisu sylinterikoordinaateissa

Useat fysiikan ongelmat ovat sylinterisymmetrisiä. Tarkastellaan esimerkkinä Laplacen yhtälöä pitkän suoran virtajohteen tapauksessa. Mikäli tarkasteltava sylinteri on riittävän pitkä, voidaan olettaa $\partial \varphi / \partial z = 0$ ja Laplacen yhtälöstä tulee

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.102)$$

Huom. Sylinterikoordinaatistossa r :llä ja θ :lla on eri merkitys kuin pallokoordinaatistossa!

Laplacen yhtälö separoituu yritteellä $\varphi = Y(r)S(\theta)$

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = k \quad (2.103)$$

missä separointivakiolle k tulee jälleen tiettyjä rajoituksia kulmayhtälöstä

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + kS = 0 \quad (2.104)$$

Tämän ratkaisut ovat $\sin \sqrt{k} \theta$ ja $\cos \sqrt{k} \theta$. Näiden on oltava yksikäsitteisiä ja jatkuvia välillä $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eli $\cos \sqrt{k} (\theta + 2\pi) = \cos \sqrt{k} \theta$. Tästä seuraa, että $k = n^2$, missä n on kokonaisluku, joka voidaan rajoittaa positiiviseksi eli ratkaisufunktiot ovat $\sin n\theta$ ja $\cos n\theta$. Lisäksi tapauksessa $k = 0$, saadaan ratkaisu $S = A_0\theta + C_0$. Radiaalisesta yhtälöstä tulee nyt

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) - n^2 Y &= \\ r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} + r \frac{dY}{dr} - n^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

joka ratkeaa yritteellä $Y = a_s r^s$

$$a_s s(s-1)r^s + a_s s r^s - a_s n^2 r^s = 0 \quad (2.106)$$

Tästä saadaan ehto s :lle $s^2 - s + s - n^2 = 0$ eli $s = \pm n$. Ratkaisufunktiot ovat siis muotoa $Y = r^n$ ja $Y = r^{-n}$. Tapaus $n = 0$ antaa lisäksi ratkaisun $Y = \ln(r/r_0)$. Kokonaisuudessaan ratkaisu on

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta) \\ &+ (A_0 \ln(r/r_0)) (C_0 \theta + D_0) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Vakiot on jälleen selvitettävä tarkasteltavan tilanteen ominaisuuksista ja reunaehdoista.

2.10 Peilivarausmenetelmä

Laplace'n yhtälön yksikäsitteisyys antaa ratkaisijalle vapauden käyttää mieleisään kikkoja ratkaisun löytämiseen. Tietyissä geometrisesti yksinkertaisissa tapauksissa peilivarausmenetelmä on näppärä keino välttää itse differentiaaliyhtälön ratkaiseminen. Tarkastellaan tilannetta, jossa meillä on joko annettu tai varausjakautumasta helposti laskettavissa oleva potentiaali $\varphi_1(\mathbf{r})$ ja johteita, joiden pintavarausjakautuma olkoon $\sigma(\mathbf{r})$. Tällöin kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.108)$$

Nyt ratkaisuun johdesysteemin ulkopuolella ei vaikuta lainkaan, kuinka varaus on jakautunut johteen pinnan takana, kunhan johteen pinnalla on voimassa samat reunaehdot. Voimme siis ajatella, ettei kyseessä olekaan johdekappale vaan pinta, jonka takana on varausjakautuma, joka antaa samat reunaehdot kuin oikea johdekappaleen pintavaraus. Tarkastellaan seuraavassa muutamaa esimerkkiä.

Esim. 1. Pistevaraus johdetason lähellä

Valitaan johdetasoksi (y, z) -taso ja olkoon varaus q x -akselilla pisteessä $x = d$. Johteen pinta on tasapotentiaalipinta, jonka potentiaali voidaan valita nolllaksi. Toisaalta (y, z) -taso saadaan nolllapotentiaaliin asettamalla varaus $-q$ pisteseen $(-d, 0, 0)$. Ratkaisujen yksikäsitteisyyden vuoksi tämä järjestely antaa oikean ratkaisun alueessa $x \geq 0$. Puoliavaruuteen $x < 0$ tätä menetelmää ei saa soveltaa, koska siellä ei ole oikeasti varausta! Nyt kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right) \quad (2.109)$$

missä \mathbf{d} on vektori origosta pisteeseen $(d, 0, 0)$. Tästä saa suoraan sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{d}}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^3} \right) \quad (2.110)$$

ja johteen pintavaraustiheydeksi tulee

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.111)$$

Varaus vetää pintaa puoleensa arvatenkin samalla voimalla kuin se vetäisi etäisyydellä $2d$ olevaa vastakkaismerkkistä varausta.

Esim. 2. Pistevaraus maadoitetun johdepallon lähellä

Maadoitus merkitsee tässä pallon pinnan valitsemista nolllapotentiaaliksi. Valitaan origoksi nyt pallon keskipiste, olkoon a pallon säde ja olkoon d etäisyys origosta varaukseen q . Etsitään siis potentiaali $\varphi(\mathbf{r})$, kun $r \geq a$ reunaehdolla $\varphi(a) = 0$.

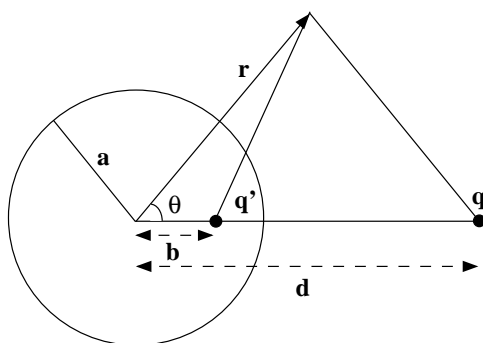
Tällä kertaa peilivarauksen paikan ja suuruuden määrittäminen on hieinan monimutkaisempi ongelma. Symmetrian perusteella peilivarauksen q' täytyy olla suoralla, joka kulkee varauksen q ja origon kautta. Tarkastellaan tilannetta kuvan 2.4 mukaisesti käyttäen pallokoordinaatteja.

Varauksen ja peilivarauksen yhteenlaskettu potentiaali pisteessä \mathbf{r} on

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (2.112)$$

Pallon pinnalla potentiaali on nolla kaikilla θ, ϕ . Sijoittamalla $r = a$ ja asettamalla $\theta = 0$ saadaan peilivarauksen paikka

$$b = \frac{a^2}{d} \quad (2.113)$$



Kuva 2.4: Pistevaraus johdepallon lähellä.

ja asettamalla puolestaan $\theta = \pi$ löytyy peilivarauksen suuruus

$$q' = -\frac{a}{d} q \quad (2.114)$$

ja ongelma on ratkaistu.

Mikäli palloa ei olisi maadoitettu, sen keskipisteeseen voitaisiin asettaa toinen peilivaraus q'' , joka puolestaan sovitettaisiin antamaan pinnalla oikea reunaehto. Pallon kokonaisvaraus olisi tällöin

$$Q = q' + q'' \quad (2.115)$$

2.11 Poissonin yhtälön ratkaisemisesta

Edellisissä jaksossa tarkasteltiin tilanteita, joissa oli joko pelkästään johdekappaleita tai johdekappaleita ja yksittäisiä varauksia. Yleisessä tilanteessa meillä voi olla annettu varausjakautuma ρ sekä johdekappaleita, joiden pintavarauksijakautuma on tuntematon. Tällöin on ratkaistava Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.116)$$

Tämä voidaan tehdä integroimalla varausjakautuman yli

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.117)$$

ja lisäämällä tähän Laplacen yhtälön sellainen ratkaisu φ_2 , että yhteenlaskettu potentiaali toteuttaa reunaehdot johdekappaleiden pinnalla.

Kaikki ylläolevat esimerkit ovat perustuneet hyvin yksinkertaiseen geometriaan. Yleisemmin voidaan osoittaa, että Laplacen ja Poissonin yhtälöt,

jotka toteuttavat joko Dirichlet'n tai von Neumannin reunaehdot, voidaan ratkaista käyttäen Greenin teoreemaa (2.60) ja Greenin funktioita. Tarvitsemme tätä varten vielä kolmannenkin Greenin kaavan (GIII). Se saadaan soveltamalla GII:ta tapaukseen

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.118)$$

missä \mathbf{r} on jokin kiinteä piste alueessa V . Muodollisesti voidaan kirjoittaa

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.119)$$

Sijoittamalla nämä GII:een (2.60) saadaan GIII

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \varphi(\mathbf{r}') \right] \end{aligned} \quad (2.120)$$

(todistus, esim. CL 2.6.1, tai Jacksonin oppikirja)

GIII:a ei voi käyttää suoraan, koska siinä esiintyvät sekä Dirichlet'n että von Neumannin reunaehdot. Oletetaan, että $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ on jokin alueessa määritelty harmoninen funktio eli funktio, joka toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$, missä derivaatta on otettu pilkuttoman koordinaatin suhteen. Nyt GII antaa tuloksen

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_V dV' F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ & + \oint_S dS' \left(F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') \right) \end{aligned} \quad (2.121)$$

Muodostetaan sitten **Greenin funktio**

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.122)$$

Summaamalla (2.120) ja (2.121) saadaan tulos

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & - \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ & + \oint_S dS' \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') \right) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Valitsemalla sellainen $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ joka täyttää joko Dirichlet'n reunaehdot F_D **tai** von Neumannin reunaehdot F_N saadaan tästä Poissonin yhtälön ratkaisu annetuilla reunaehdoilla.

Greenin funktiolla on selvästikin ominaisuus

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.124)$$

Greenin funktioiden käyttö ei rajoitu suinkaan Poissonin yhtälön ratkomiin, vaan niillä on keskeinen osa ratkottaessa erilaisia **integraaliyhtälöitä**. Poissonin lauseke potentiaalille varausjakautuman funktiona on sinällään poikkeuksellisen yksinkertainen integraaliyhtälö.

Esimerkki. Pallon Greenin funktio

Tarkastellaan esimerkkinä pallon Greenin funktiota Dirichlet'n reunehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on tunnettu. Tällöin valitaan

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.125)$$

reunaehdolla

$$\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in S} = 0 \quad (2.126)$$

missä S on pallon pinta. Olemme jo aiemmin ratkaisseet identtisen ongelman yhdelle pistevaraukselle pallon ulkopuolella ehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on nolla yhtälössä (2.112). Siellä saatu ratkaisu on vakiota $q/4\pi\epsilon_0$ vaille yhtälön (2.126) ratkaisu, joten

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' |\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \quad (2.127)$$

missä a on origossa sijaitsevan pallon säde. Potentiaali saadaan integroimalla

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') dS' \quad (2.128)$$

missä V viittaa pallon tilavuuteen ja S pallon pintaan. Normaalivektori \mathbf{n} suuntautuu ulospäin siitä alueesta, jossa potentiaali halutaan laskea. Tarkasteltaessa aluetta pallon sisällä $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ja ulkopuolista aluetta tutkittaessa $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. Ulospäin suuntautuva normaaliderivaatta on

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}'}{a} \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}' \in S} &= - \frac{1}{a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_{\mathbf{r}' \in S} \\ &= \frac{r^2 - a^2}{a} (a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.129)$$

missä γ on \mathbf{r} :n ja \mathbf{r}' :n välinen kulma.

Sovelletaan Greenin funktiota tapaukseen, jossa pallon sisällä ei ole varausta eli ratkaistaan Laplacen yhtälö reunaehdolla $\varphi(a) = f(\mathbf{r})$, kun \mathbf{r} on pallon pinnalla. Tämä antaa Poissonin kaavana tunnetun tuloksen

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS' \\ &= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\Omega' \end{aligned} \quad (2.130)$$

joka ilmaisee siis potentiaalin alueen *sisällä* olettaen annetun potentiaalin pallon pinnalla. Jos puolestaan halutaan tarkastella potentiaalia pallon ulkopuolella, pintaintegraalissa normaalin suunta määritellään ulospäin ja ainoa muutos on korvata $(a^2 - r^2) \rightarrow (r^2 - a^2)$.

Luku 3

Sähkökenttä väliaineessa

Tässä luvussa tutustutaan sähkökenttään väliaineessa (RMC luku 4, CL luku 4; esitiedot KSII luku 2, osa 2.9). Väliaineiden sähköisiin ja magneettisiin ominaisuuksiin tutustutaan lisää luvussa 10.

Edellisessä luvussa tarkasteltiin sähköstaattista kenttää tilanteissa, joissa oli annettuja varausjakautumia tai vapaita varauksia johdekappaleiden pinnalla. Läheskään kaikki materiaalit eivät kuitenkaan ole johteita. Hyvän johdeen vastakohta on ideaalinen eriste, jossa ei ole lainkaan vapaita varauksia. Aine on kuitenkin koostunut positiivisesti varatuista atomiytimistä ja elektroneista. Jos eriste asetetaan sähkökenttään, kenttä aiheuttaa voimavaikutuksen eristeen rakenneosasiin. Vaikutuksen suuruus riippuu materiaalin mikroskooppisista ominaisuuksista. Eristeeseen syntyvää makroskooppista vaikutusta kuvataan eristeen positiivisten varausten siirtymänä negatiivisiin varauksiin nähden. Aineen sanotaan tällöin polarisoituneen. Sisäisen polarisoituman ja ulkoisen kentän yhteisvaikutus on usein hyvin monimutkainen vuorovaikutusketju, sillä polarisoituma muuttaa puolestaan ulkoista kenttää ja mikäli eristeen lähellä on johdekappaleita, niiden pinnalle indusoituva varausjakautuma muuttuu, mikä puolestaan muuttaa eristeeseen vaikuttavaa ulkoista kenttää.

3.1 Sähköinen polarisoituma

Ennen kuin jatketaan, palautetaan mieleen, että sähköstatiikka hallitaan yhtälöillä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.2)$$

Erityisesti on huomattava, että ρ sisältää *kaikki* varaukset eikä mitään jakoa ”vapaisiin” ja ”muihin” varauksiin tarvitse tehdä. Periaatteessa polarisoitua aine voidaan siis käsitellä varausjakaumien avulla. Käytännössä aineen mikroskooppinen kuvaaminen ei ole helppoa. Tähän palaamme vielä luvussa 10.

Tarkastellaan polarisoituneen aineen pientä tilavuusalkiota ΔV , jonka dipolimomentti on

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta V} \mathbf{r} dq \quad (3.3)$$

Sähköinen polarisoituma määritellään dipolimomenttina yksikkötilavuudessa

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (3.4)$$

Tämä määritelmä edellyttää, että ΔV on makroskooppisessa mielessä pieni. Varsinaisesta raja-arvosta $\Delta V \rightarrow 0$ ei tarkkaan ottaen ole kysymys, koska tilavuusalkiossa täytyy kuitenkin olla monta molekyyliä, jotta polarisaatio ylipäänsä syntyisi. Makroskooppiselta kannalta polarisoitumaa voi kuitenkin tarkastella jatkuvana paikan funktiona.

Polarisoituman SI-yksikkö on C/m², joten $[\mathbf{P}] = [\epsilon_0][\mathbf{E}]$. Cgs-yksiköissä, missä tyhjän permittiivisyys on $1/4\pi$, polarisoitumalla on sama yksikkö kuin sähkökentällä.

3.2 Polarisoituman aiheuttaman sähkökentän määrittäminen

Tarkastellaan pisteessä \mathbf{r}' sijaitsevan pienen eristealkion $\Delta V'$ dipolimomenttia $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P} dV'$. Oletetaan, että korkeampien multipolien vaikutus voidaan jättää huomiotta. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että havaintopiste \mathbf{r} on niin etäällä, että tämän alkion aiheuttama sähköinen potentiaali saadaan laskemalla pelkän dipolimomentin potentiaali

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta V'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.5)$$

Kokonaispotentiaali pisteessä \mathbf{r} on tietenkin tämän integraali

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.6)$$

Mikäli polarisoituma tunnetaan, potentiaali voidaan laskea tästä suoraan. Käytännössä sama asia on hyödyllistä ilmaista hieman eri tavalla. Koska

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.7)$$

3.2. POLARISOITUMAN AIHEUTTAMAN SÄHKÖKENTÄNMÄÄRITTÄMINEN 37

voidaan potentiaalin integrandi kirjoittaa

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (3.8)$$

Käyttämällä kaavaa

$$\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f \quad (3.9)$$

saadaan

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (3.10)$$

Tämän avulla ja soveltamalla divergenssiteoreemaa potentiaali voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_P dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (3.11)$$

missä S_0 on eristeen pinta. Potentiaali voidaan siis laskea lausekkeista, jotka muistuttavat edellisessä luvussa olleita avaruus- ja pintavaraustiheyden integraaleja. Tämä on käytännön ongelmassa usein näppärämpi tapa laskea potentiaali kuin suora sähköisen polarisoituman integraali. Suureita

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (3.12)$$

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.13)$$

kutsutaan **polarisaatiovaraustiheyksiksi**. Niiden fysikaalinen dimensio on varaus/pinta-ala (σ_P) ja varaus/tilavuus (ρ_P) ja ne aiheuttavat eristeen ulkopuolella todellisen potentiaalin φ , josta saadaan sähkökenttä $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Kyse ei ole kuitenkaan oikeista ”vapaista” varauksista vaan tavasta kuvata eristeen ominaisuuksia varausjakautuman dq'_P avulla. Tämän vuoksi polarisaatiovarauksia kutsutaan usein näennäisiksi varauksiksi, mikä ei kuitenkaan tee niille täyttä oikeutta. Eriste on kokonaisuudessaan neutraali, joten kokonaisvaraus

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dV' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS' = 0 \quad (3.14)$$

mikä on suora seuraus divergenssiteoreemasta.

RMC:ssä edellä oleva tarkastelu on aluksi rajoitettu eristekappaleen ulkopuoliseen alueeseen. Sen jälkeen todetaan, että sama potentiaalin lauseke kelpaa myös eristeen sisällä. Tällainen jako ei kuitenkaan ole tarpeen, koska polarisaatiovaraus on yhtä todellista varausta kuin ”vapaa” varaus.

3.3 Sähkövuon tiheys

Edellä oletettiin eristeen polarisoituma \mathbf{P} tunnetuksi. Todellisuudessa näin ei yleensä ole, vaan polarisoituma syntyy vasteena ulkoiseen sähkökenttään. Tarkastellaan yleistä tilannetta, jossa on eriste ja sen sisällä mahdollisesti vapaita varauksia. Sovelletaan Gaussin lakia eristeen sisällä olevalla pinnalla S , joka sulkee sisäänsä niin vapaat varaukset kuin polarisaatiovarauksenkin

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P) \quad (3.15)$$

missä $Q = \sum_{i=1, \dots, N} q_i$ on vapaiden varausten summa ja

$$Q_P = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.16)$$

on polarisaatiovaraus. Tässä on implisiittisesti oletettu, että vapaat varaukset ovat pistemäisiä. Jos eristeen sisällä olisi makroskooppisia johdekappaleita, niiden pinnoilta tulisi osuus polarisaatiovaraukseen Q_P . Nämä pintatermit kuitenkin kumoutuisivat muutettaessa tilavuusintegraalit pintaintegraaleiksi (ks. RMC).

Saadaan siis

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.17)$$

Siis vektorin $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ vuo suljetun pinnan läpi on sama kuin pinnan sulkemaan tilavuuteen sijoitettu nettovaraus. Tätä vektoria kutsutaan **sähkövuon tiheydeksi** tai sähköiseksi siirtymäksi englanninkielisen termin ”electric displacement” mukaan. Sähkövuon tiheydellä on sama SI-yksikkö kuin polarisoitumalla.

Käyttämällä jälleen divergenssiteoreemaa ja toteamalla, että $Q = \int_V \rho dV$, saadaan Gaussin laki eristeessä kirjoitetuksi differentiaalimuotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.18)$$

missä ρ on nyt ulkoisten varausten tiheys. Kokonaisvaraustiheys on $\rho + \rho_P$. Ulkoisia varauksia kutsutaan usein vapaiksi, mutta tämä saattaa aiheuttaa sekaannusta, sillä eristeessä oleva ulkoinen varaus ei ole vapaa samassa mielessä kuin johteen pinnalla oleva varaus. Myös ajasta riippuvissa tilanteissa vapaiden ja ulkoisten varausten sekoittaminen toisiinsa voi johtaa virheisiin.

Sähköstaatiikan peruslait on nyt siis puettu muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

missä

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.21)$$

Etuna tässä on se, että ”vapaa” varaus on helpommin hallittavissa kuin polarisaatiovaraus. Kuitenkin sähkökenttä \mathbf{E} on suure, joka loppujen lopuksi halutaan määrittää. Siksi on vielä tunnettava rakenneyhtälö $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, koska muuten yhteydestä $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ei ole iloa. Tätä ongelmaa käsitellään seuraavaksi.

3.4 Dielektrisyys ja suskeptiivisuus

Sähköinen polarisoituma aiheutuu sähkökentästä. Näiden välinen riippuvuus ilmaistaan **sähköisen suskeptiivisuuden** $\chi(\mathbf{E})$ avulla

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad (3.22)$$

$\chi(\mathbf{E})$ määräytyy väliaineen mikroskooppisesta rakenteesta, johon tutustutaan lähemmin luvussa 10.

Yleisesti ottaen $\chi(\mathbf{E})$ on tensori, jolloin polarisoituma ei välttämättä ole samansuuntainen kuin sähkökenttä eli eriste voi olla **epäisotrooppista**. Tällaisia väliaineita ovat esimerkiksi kiderakenteet, joissa epäisotropia aiheuttaa sähkömagneettisen aallon etenemisessä kahtaistaittavuudeksi kutsuttavan ilmiön. Tällöin eri tavoin polarisoituneet aallot taittuvat eri tavoin. Kahtaistaittavuutta tapahtuu myös vapaista varauksista koostuvassa magnetoituneessa plasmassa.

Toinen ongelmakenttä ovat epälineaariset väliaineet, joissa $\chi(\mathbf{E})$ on sähkökentän funktio, jolloin \mathbf{P} riippuu sähkökentästä epälineaarisesti. Tämä ilmiö tulee yleensä vastaan vasta hyvin voimakkailla sähkökentillä. Kaikissa aineissa ei myöskään ole suoraa relaatiota \mathbf{P} :n ja \mathbf{E} :n välillä. Ferrosähköisissä aineissa on polarisoitumaa myös ilman ulkoista sähkökenttää. Tarkastellaan tässä kuitenkin vain isotrooppisia eristeitä, joille $\chi(\mathbf{E})$ on skalaari ja rajoitutaan vielä lineaarisiin väliaineisiin, joille χ on sähkökentästä riippumaton vakio. Tällaista väliainetta kutsutaan myös **yksinkertaiseksi** väliaineeksi. Tällöin polarisoituman, sähkökentän ja sähkövuon tiheyden välillä vallitsevat **rakenneyhtälöt**

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.24)$$

missä $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$. Laadutonta suuretta

$$K = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (3.25)$$

kutsutaan väliaineen **eristevakioksi**, dielektrisyysvakioksi tai suhteelliseksi permittiivisyydeksi. Aineen eristeominaisuudet eivät kuitenkaan salli kuinka suuria sähkökenttiä hyvänsä, sillä riittävän suuri sähkökenttä ajaa elek-

Taulukko 3.1: Eristeiden ominaisuuksia. Tässä annettu ilman läpilyöntikestävyys koskee kuivaa ilmaa, muissa oloissa arvo on pienempi. Lasin suhteellinen permittiivisyys vaihtelee kemiallisesta koostumuksesta riippuen.

| aine | suhteellinen permittiivisyys | läpilyöntikestävyys [MV/m] |
|---------------|------------------------------|----------------------------|
| akryyli | 3.3 | 20 |
| eboniitti | 2.7 | 10 |
| kuiva ilma | 1.0006 | 4.7 |
| lasi | 5-10 | 15 |
| kova paperi | 5 | 15 |
| eristyspaperi | 5 | 30 |
| posliini | 5.5 | 35 |
| tislattu vesi | 81 | 30 |

troneja ulos molekyyleistä, jolloin aine alkaa johtaa sähköä. Tätä rajaa kutsutaan aineen dielektriseksi vahvuudeksi. Taulukossa 3.1 on joidenkin tärkeiden aineiden eristevakioita ja dielektrisiä vahvuuksia. Ilma on sähköisesti melkein tyhjä, siis hyvä eriste. Veden eristevakio on puolestaan suuri, mikä merkitsee vahvaa polarisoitumista ja siten kohtuullisen hyvää sähkönjohtokykyä polarisoitumisvarausten kantamana.

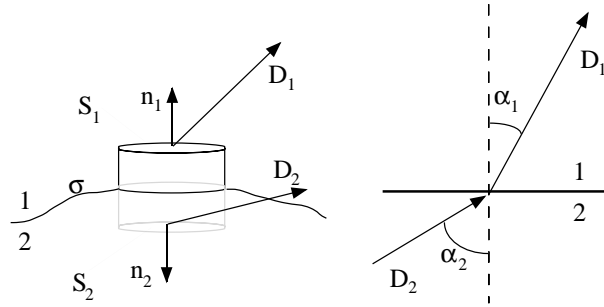
3.5 Sähkökenttä rajapinnalla

Eristeet ovat usein paljon hankalampia käsiteltäviä kuin johteet. Hyvän johteen ominaisuus on, että sen sisäinen sähkökenttä on nolla ja kaikki varaus kertyy pinnalle. Eristeet sen sijaan polarisoituvat ja erilaiset eristeet polarisoituvat eri tavoin. Eristeongelmissa joudutaan usein tarkastelemaan kenttien ominaisuuksia eri eristeiden tai eristeiden ja johteiden rajapinnoilla.

Tarkastellaan seuraavassa tilannetta kahden yksinkertaisen (lineaarinen, isotrooppinen, homogeeninen = LIH) eristeen rajapinnalla ja oletetaan rajapinta makroskooppisessa mielessä ohueksi. Tämä tarkastelu voidaan ulottaa myös epähomogeenisiin eristeisiin, jos eriste voidaan kuvata eri eriste-vakiolla varustettuina kerroksina. Toinen eriste voi olla myös tyhjä, jonka permittiivisyys on ϵ_0 eli $K = 1$. Merkitään väliaineita indekseillä 1 ja 2 ja olkoon σ pintavaraustiheys rajapinnalla. Tarkastellaan pientä sylinterinmuotoista ”pillerirasiaa”, jonka kannet ovat eri väliaineissa (kuva 3.1).

Sovelletaan Gaussin lakia

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2 + \oint_{\text{vaippa}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.26)$$



Kuva 3.1: ”Pillerirasia” kahden väliaineen rajapinnalla ja sähkövuon tiheyden ”taantumiskulmien” määrittelmä.

Oletetaan, että pillerirasian korkeus $\rightarrow 0$. Tällöin integraali vaipan yli on nolla ja pillerirasian sisällä oleva varaus on pelkkä pintavaraus kertaa pinta-ala $Q = \sigma \Delta S$, missä $\Delta S = \Delta S_1 = \Delta S_2$. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, voidaan kirjoittaa **reunaehto** sähkövuon tiheyden normaalikomponentille

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \quad (3.27)$$

tai

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (3.28)$$

Tärkeä erikoistapaus on $\sigma = 0$: Mikäli kahden eristeen rajapinnalla ei ole ulkoista varausta, sähkövuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

Huom. Koska eristeet polarisoituvat, ylläoleva tarkastelu on tehtävä nimenomaan sähkövuon tiheydelle, ei sähkökentälle.

Myös sähköstaattiselle kentälle löytyy reunaehto rajapinnalla. Koska $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, niin viivaintegraali

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.29)$$

pitkin mitä tahansa suljettua silmukkaa. Sovelletaan tätä suorakulmaiseen silmukkaan $ABCD$ eristeiden rajapinnalla. Olkoot rajapinnan suuntaiset sivut AB ja CD kumpikin eri väliaineessa ja pituudeltaan Δl . Väliaineesta toiseen kulkevat sivut BC ja DA oletetaan häviävän lyhyiksi. Tällöin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0 \quad (3.30)$$

\Rightarrow

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (3.31)$$

eli sähkökentän tangentiaalikomponentti on jatkuva rajapinnan yli. Tämä tulos on voimassa riippumatta mahdollisesta pintavarauksesta.

Lasketaan sitten vektorin \mathbf{D} taittuminen rajapinnalla tapauksessa $\sigma = 0$. Olkoon α_1 ”rajapinnalle tulevan” vektorin \mathbf{D}_1 ja \mathbf{n}_1 :n välinen kulma ja α_2 ”rajapinnalta lähtevän” vektorin \mathbf{D}_2 ja \mathbf{n}_2 :n välinen kulma. Koska väliaineet on oletettu yksinkertaisiksi, niin

$$D_{1t} = K_1 \epsilon_0 E_{1t} ; D_{2t} = K_2 \epsilon_0 E_{2t} \quad (3.32)$$

Tällöin

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{D_{2t} D_{1n}}{D_{2n} D_{1t}} = \frac{K_2 \epsilon_0 E_{2t}}{K_1 \epsilon_0 E_{1t}} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (3.33)$$

Sähkövuon tiheysvektori taittuu siis pois päin normaalin suunnasta mentäessä pienemmästä eristevakiosta suurempaan eristevakioon. Tämä on selvästi sukua aaltojen taittumiselle eri väliaineiden rajapinnalla, johon tutustutaan lähemmin luvussa 12.

Tarkastellaan sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Oletetaan jälleen $\sigma = 0$, jolloin $D_{2n} = D_{1n}$. Tästä seuraa $K_2 \epsilon_0 E_{2n} = K_1 \epsilon_0 E_{1n}$. Koska $E_n = -\partial\varphi/\partial n$, tulee reunaehdoksi

$$K_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \quad (3.34)$$

Tämän lisäksi φ on jatkuva reunan yli. Tämä nähdään tarkastelemalla kahta pistettä r_1 ja r_2 reunan molemmiin puolin. Tällöin

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

kun r_1 ja r_2 lähestyvät toisiaan eri puolilta rajapintaa sillä fysikaalisella oletuksella, että sähkökenttä on äärellinen rajapinnalla.

Eristepallo sähkökentässä

Yksinkertaisessa väliaineessa (LIH) $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, joten $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$. Siis ainoa muodollinen ero edellisten lukujen käsittelyyn on korvata $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. Useissa käytännön ongelmissa eristeessä ei ole ulkoista varausta, joten $\nabla^2\varphi = 0$ koko eristeessä. Tarkastellaan esimerkkinä a -säteistä eristepalloa homogeenisessa sähkökentässä \mathbf{E}_0 . Ratkaisumenetelmä on samanlainen kuin johdepallon tapauksessa. Valitaan alkuperäinen sähkökenttä z -akselin suuntaiseksi $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$, joten tämän potentiaali on jälleen $\varphi = -E_0 r \cos\theta$ ja tämän on oltava ratkaisu kaukana pallosta. Asetetaan pallo origoon ja todetaan, että tilanne on aksiaalisymmetrinen z -akselin suhteen: $\partial\varphi/\partial\phi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(r, \theta)$. K on vakio eristeessä ja $\epsilon = \epsilon_0$ muualla. Systeemissä ei ole vapaita varauksia, joten $\rho = 0$ kaikkialla ja Laplacen yhtälö on voimassa niin

eristeessä kuin sen ulkopuolellakin. Kirjoitetaan Laplacen yhtälön ratkaisu jälleen vyöhykeharmonisten funktioiden sarjana (2.90)

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) \quad (3.36)$$

Merkitään termejä pallon ulkopuolella ($r > a$) indeksillä 1 ja sisäpuolella ($r < a$) indeksillä 2. Etäällä pallosta ratkaisu lähenee alkuperäistä potentiaalia $-E_0 r \cos \theta$, joten pallon ulkopuolella

$$A_{1n} = 0, \text{ kun } n \geq 2; \quad A_{11} = -E_0$$

\Rightarrow

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) - E_0 r \cos \theta \quad (3.37)$$

Pallon sisällä potentiaalin on oltava äärellinen origossa, joten kaikki kertoimet B_{2n} ovat nollia ja sisäratkaisu on muotoa

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) \quad (3.38)$$

Käytetään sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Ensinnäkin potentiaalin on oltava jatkuva $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} & -E_0 a \cos \theta + \frac{B_{10}}{a} + \frac{B_{11}}{a^2} \cos \theta + \frac{B_{12}}{a^3} P_2(\cos \theta) + \dots \\ & = A_{20} + A_{21} a \cos \theta + A_{22} a^2 P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

Toisaalta potentiaalin derivaatalle on reunaehto

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = K \left. \frac{\partial \varphi_2(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} & -E_0 \cos \theta - \frac{B_{10}}{a^2} + \frac{2B_{11}}{a^3} \cos \theta + \frac{3B_{12}}{a^4} P_2(\cos \theta) + \dots \\ & = K A_{21} \cos \theta + 2K A_{22} a P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

Koska Legendren polynomit muodostavat ortonormaalin kannan, kunkin P_n -termin täytyy toteuttaa yhtälöt erikseen. Nyt molemmat yhtälöt (3.39) ja (3.40) toteutuvat vain jos $A_{2n} = 0$ ja $B_{1n} = 0$ kaikilla $n \geq 2$. Yhtälön (3.40)

ainoa $\cos\theta$:sta riippumaton termi on $B_{10} = 0$, joka sijoitettuna yhtälöön (3.39) antaa $A_{20} = 0$ ja jäljelle jää yhtälöpari

$$-E_0a + \frac{B_{11}}{a^2} = A_{21}a \quad (3.41)$$

$$-E_0 - \frac{2B_{11}}{a^3} = KA_{21} \quad (3.42)$$

joiden ratkaisuna saadaan

$$A_{21} = -\frac{3E_0}{K+2}; \quad B_{11} = \frac{K-1}{K+2}E_0a^3 \quad (3.43)$$

Kaiken kaikkiaan ratkaisu pallon ulkopuolella on

$$\varphi_1(r, \theta) = -\left(1 - \frac{K-1}{K+2} \frac{a^3}{r^3}\right) E_0r \cos\theta \quad (3.44)$$

ja pallon sisällä

$$\varphi_2(r, \theta) = -\frac{3}{K+2}E_0r \cos\theta = -\frac{3}{K+2}E_0z \quad (3.45)$$

Nyt pallon sisällä on vakiosähkökenttä

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3}{K+2}\mathbf{E}_0 \quad (3.46)$$

ja juuri tämä on erona johdepalloon, jossa varaukset jakautuvat pinnalle siten, että pallon sisällä ei ole sähkökenttää lainkaan. $K \geq 1$, joten kenttä eristeen sisällä on pienempi kuin ulkopuolella. Jos eriste olisi ilmaa, pallon kenttä olisi miltei sama kuin alkuperäinen kenttä. Jos eriste on jonkin verran sähköä johtavaa vettä ($K = 80-90$), on pallon sisäkenttä muutama prosentti ulkopuolisesta kentästä.

Kenttien \mathbf{D} ja \mathbf{E} ero näkyy kuvasta 3.2. Sähkövuon tiheydellä ei ole lähteitä, vaan kaikki kenttäviivat jatkuvat pallon läpi. Sitävastoin polarisoitumisesta johtuva pintavarauskate aiheuttaa sen, että sähkökentällä on lähteitä ja nieluja pallon pinnalla ja osalla kenttäviivoista pää on pallon pinnalla. Tämän seurauksena kenttäviivat eivät myöskään ole kohtisuorassa pallon pintaa vastaan. Tämä osoittaa, että polarisaatiovarauksen kutsuminen ”näennäiseksi” on kyseenalaista.

Kuva 3.2: Eristepallo ulkoisessa sähkökentässä. Vasemmalla sähkövuon tiheyden kenttäviivat, oikealla sähkökentän kenttäviivat.

Luku 4

Sähköstaattinen energia

Esitiedot KSII luku 2, osa 2.10; oppimateriaali RMC luku 6 ja CL luku 5.

Voiman, työn ja energian käsitteet ovat keskeisiä kaikessa fysiikassa. Mittaamme sähkö- ja magneettikenttiä voimavaikutuksen kautta. Kun voima vaikuttaa varaukselliseen hiukkaseen, se tekee työtä ja hiukkasen energia muuttuu. Samoin kuin mekaniikassa, myös elektrodynamiikassa energia voidaan jakaa liike- ja potentiaalienergiiaan. Sähköstaattinen energia on potentiaalienergiaa. Kun varaus q siirtyy pisteestä A pisteeseen B sähköstaattisessa kentässä, kenttä tekee työn

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A) \quad (4.1)$$

Työn ja energian SI-yksikkö on joule (J), joka on sama kuin wattisekunti (Ws). Ylläolevan tarkastelun mukaan työ on myös varaus kertaa sähköinen potentiaali, jonka yksikkö on CV tai elektronivoltti (eV). Koska elektronin varaus on $1.6022 \cdot 10^{-19}$ C, on $1 \text{ eV} = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ J.

4.1 Varausjoukon potentiaalienergia

Varausjoukon sähköstaattisella energialla ymmärretään systeemin potentiaalienergiaa verrattuna tilanteeseen, jossa kaikki varaukset ovat äärettömän kaukana toisistaan. Energia saadaan laskemalla yhteen tarvittava työ, kun kukin varaus tuodaan kerrallaan paikalleen tarkasteltavana olevaan varausjoukkoon. Koska alunperin tarkasteltavassa systeemissä ei ole varauksia, ensimmäinen q_1 varaus voidaan asettaa pisteeseen \mathbf{r}_1 ilman työtä, $W_1 = 0$. Toisen varauksen q_2 tuominen tämän lähelle merkitsee työntekoa voimaa $\mathbf{F} = q_1\mathbf{r}_1/4\pi\epsilon_0|r_1|^3$ vastaan, joten varauksen sijoittamiseksi pisteeseen \mathbf{r}_2 on tehtävä työtä

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} \quad (4.2)$$

Kolmannelle varaukselle

$$W_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right) \quad (4.3)$$

ja niin edelleen kaikille N kappaleelle varauksia. Koko systeemin sähköstaattinen energia U saadaan yhteenlaskulla

$$U = \sum_{j=1}^N W_j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \quad (4.4)$$

Summaus voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N ' \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \quad (4.5)$$

missä merkintä \sum' merkitsee että termit $j = k$ jätetään pois. Tämä voidaan ilmaista varaukseen j vaikuttavien kaikkien muiden varausten potentiaalin

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^N ' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (4.6)$$

avulla:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \varphi_j \quad (4.7)$$

4.2 Varausjakautuman sähköstaattinen energia

Tarkastellaan seuraavassa jatkuvia tilavuus- ja pintavarausjakautumia. Osan varauksista oletetaan olevan johteiden pinnalla ja lisäksi systeemissä saa olla eristeitä, mutta ne on oletettava lineaarisiksi. Syy tähän on, että epälineaarisilla eristeillä varaussysteemin kokoaminen riippuu tiestä, jota pitkin varaukset tuodaan äärettömyydestä tarkastelualueeseen.

Oletetaan, että olemme jo koonneet osan systeemistä. Tällöin uuden varauselementin δq tuominen nollapotentiaalista systeemiin vaatii työn

$$\delta W = \varphi'(\mathbf{r}) \delta q \quad (4.8)$$

Kokonaistyö ei riipu tavasta, jolla varaukset tuodaan paikoilleen. Voimme ajatella, että kaikkia varauksia siirretään vuorotellen vähän kerrallaan, ja merkitään kullakin hetkellä osuutta koko matkasta α :lla. Mielivaltaisella hetkellä varausjakautumat ovat siis $\alpha\rho(\mathbf{r})$ ja $\alpha\sigma(\mathbf{r})$ ja siirrokset ovat $\delta\rho = \rho(\mathbf{r})d\alpha$ ja $\delta\sigma = \sigma(\mathbf{r})d\alpha$. Lopullinen energia saadaan integroimalla

$$U = \int_0^1 d\alpha \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi'(\alpha; \mathbf{r}) dV + \int_0^1 d\alpha \int_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi'(\alpha; \mathbf{r}) dS \quad (4.9)$$

Kaikki varaukset ovat joka hetki saman suhteellisen etäisyyden päässä lopullisesta sijoituspaikastaan, joten $\varphi'(\alpha; \mathbf{r}) = \alpha\varphi(\mathbf{r})$, missä $\varphi(\mathbf{r})$ on lopullinen potentiaali pisteessä \mathbf{r} . Tämän avulla α -integrointi on laskettavissa ja

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dS \quad (4.10)$$

Tässä tilavuuden V täytyy olla niin suuri, että se pitää sisällään kaikki ongelman varaukset.

Jos koko (tarkasteltava) tila on eristetty, jonka permittiivisyys on ϵ , saadaan potentiaali laskemalla

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.11)$$

Jos taas systeemissä on useita erilaisia eristeitä, on huomioitava oikeat reunaehdot rajapinnoilla.

Johdekappaleet on käytännöllistä käsitellä erikseen, sillä niiden varaus on kokonaan pinnoilla S_j ja johteen potentiaali on vakio:

$$U = \frac{1}{2} \int_{S_j} \sigma\varphi dS = \frac{1}{2} Q_j\varphi_j \quad (4.12)$$

Varausjakautuman sähköstaattinen energia on kaiken kaikkiaan

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma\varphi dS + \frac{1}{2} \sum_j Q_j\varphi_j \quad (4.13)$$

missä viimeinen termi on summa yli kaikkien johdekappaleiden ja pintaintegraali on rajoitettu eristeiden pintoihin. Energian lausekkeen voi päätellä myös suoraan yleistämällä luvun 4.1 diskreettien varausjakautumien tulokset jatkuville jakautumille.

Huom. Koska johdekappaleen pinnalla on suuri määrä varauksia, ei johdekappaleita summattaessa kappaleen omaa osuutta (itseisenergiaa) voida jättää huomiotta, kuten tehtiin yksittäisten varausten tapauksessa edellisessä jaksossa. Pistevarausten itseisenergia voidaan jättää huomiotta makroskooppisissa tarkasteluissa, mutta aikoinaan formuloitaessa kvanttitason elektrodynamiikkaa tästä aiheutui ongelmia.

4.3 Sähköstaattisen kentän energia

Edelläoleva tarkastelu edellyttää potentiaalintuntemista koko systeemissä. Usein tunnetaan kuitenkin tavalla tai toisella itse sähkökenttä ja halutaan määrittää sen sähköstaattinen energia.

Varaustiheydet voidaan ilmaista sähkövuon tiheyden avulla seuraavasti. Eristeissä $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ ja johteiden pinnalla $\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$. Tällöin

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.14)$$

Tilavuusintegraali lasketaan alueessa, jossa $\nabla \cdot \mathbf{D} \neq 0$ ja pintaintegraali on johteiden pintojen yli. Muotoillaan tilavuusintegraalin integrandia kirjoittamalla $\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi$. Tässä oikean puolen jälkimmäinen termi on $+\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ ja ensimmäisen termin tilavuusintegraali voidaan muuttaa Gaussin lauseen avulla pintaintegraaliksi, jolloin saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.15)$$

Tässä pinta $S + S'$ on koko tilavuutta V rajoittava pinta, joka muodostuu johteiden pinnoista S ja tilavuuden V ulkopinnasta S' . Molemmista tapauksissa \mathbf{n}' osoittaa ulospäin tilavuudesta V . Viimeisen integraalin \mathbf{n} puolestaan osoittaa johdekappaleista ulospäin eli tilavuuden V sisään. Näinollen integraalit johdekappaleiden yli kumoavat toisensa.

Osoitetaan vielä, että pinnan S' yli otettava integraali häviää, kun pinta viedään kauas varausjakautumasta. Kaukana $\varphi \propto 1/r$ ja $D(\mathbf{r}) \propto 1/r^2$. Olkoon nyt S'' pinnan S' sisään sulkeva R -säteinen pallo. Tällöin on olemassa äärellinen suure M , jolle

$$\left| \int_{S'} \frac{1}{2} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' dS \right| \leq \int_{S''} \frac{M}{r^3} dS = \frac{4\pi R^2 M}{R^3} \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad (4.16)$$

kun $R \rightarrow \infty$. Niinpä energiaksi jää

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (4.17)$$

Tässä V on koko avaruus sisältäen myös johdekappaleet, joiden sisällä $\mathbf{E} = 0$. Lausekkeen integrandi on **sähköstaattinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.18)$$

Koska on oletettu lineaarinen väliaine, tämä voidaan kirjoittaa

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad (4.19)$$

Huom. Sovellettaessa tätä formalismia systeemiin, jossa on pistevarauksia, niiden ääretön itseisenergia on vähennettävä eksplisiittisesti.

Toinen tapa johtaa tulos (4.18) on esitetty yksityiskohdittain CL:n jaksossa 5.2. Siinä lähdetään liikkeelle varausjakautumasta $\rho(\mathbf{r})$ ja oletetaan siihen pieni häiriö $\delta\rho$. Häiriöön liittyy työ

$$\delta U = \int_V \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dV \quad (4.20)$$

ja siirtymäkenttä $\delta\mathbf{D}$, jolle $\nabla \cdot (\delta\mathbf{D}) = \delta\rho$, joten osittaisintegroimalla lauseketta (4.20) saadaan

$$\delta U = \int_V (\nabla \cdot \delta\mathbf{D})\varphi dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} dV \quad (4.21)$$

Nyt voidaan kirjoittaa muodollisesti

$$U = \int_V dV \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} \quad (4.22)$$

missä integrointi \mathbf{D} :n suhteen riippuu integroimistiestä. Yksinkertaiselle väliaineelle

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (4.23)$$

\Rightarrow

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (4.24)$$

Tässä johdossa on oletettu, että tarkasteltava systeemi on mekaanisesti jäykkä, mikä viittaa siihen, että yksinkertaisellekin väliaineella energiatiheyden lauseke (4.18) on vain approksimaatio. Epälinearisille väliaineille energia on laskettava suoraan lausekkeesta (4.22). Tämä liittyy hystereesi-ilmiöön, johon tutustutaan lähemmin luvussa 10.

4.4 Sähkökentän voimavaikutukset

Sähkökenttä määriteltiin alunperin operatiivisesti sen voimavaikutuksen kautta. Toisaalta olemme oppineet määrittämään varaussysteemin sähköstaattisen energian. Tarkastellaan nyt, kuinka tästä energiasta voidaan johdtaa sähkökentän voimavaikutus. Oletetaan systeemi eristetyksi ja kaikki sen energia sähköstaattiseksi energiaksi. Voiman \mathbf{F} tekemä työ systeemin pienessä siirroksessa $d\mathbf{r}$ on

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.25)$$

Koska systeemi on eristetty, tämä työ on tehtävä sähköstaattisen energian U kustannuksella

$$dW = -dU \quad (4.26)$$

Näistä seuraa, että voima on energian gradientin vastaluku

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (4.27)$$

Jos voima puolestaan kiertää systeemiä kulman $d\boldsymbol{\theta}$ verran (vrt. väkipyörä), tehty työ on

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (4.28)$$

missä τ on vääntömomentti, joka saadaan siis energian negatiivisena gradienttina kiertymäkulman suhteen

$$\tau = -\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_Q \quad (4.29)$$

Koska systeemi on eristetty, gradientit lasketaan olettaen varaus Q vakioksi.

Käytännössä mielenkiintoiset sähköstaattiset systeemit eivät useinkaan ole eristettyjä, vaan muodostuvat esimerkiksi johdekappaleista, jotka pidetään kiinteässä potentiaalissa ulkoisen energialähteen avulla. Siirtyköön osa systeemistä jälleen sähköisten voimien vaikutuksesta. Nyt

$$dW = dW_b - dU \quad (4.30)$$

missä dW_b on paristosta peräisin oleva työ. Johdekappaleiden energia on $U = (1/2) \sum \varphi_j Q_j$. Koska ulkoinen paristo pitää johdekappaleet samassa potentiaalissa saadaan

$$dU = \frac{1}{2} \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (4.31)$$

Toisaalta paristosta saatava työ on yhtä suuri kuin työ, joka tarvitaan siirtämään varauksen muutos dQ_j nollapotentiaalista johdekappaleen potentiaaliin

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (4.32)$$

joten

$$dW_b = 2dU \quad (4.33)$$

eli nyt voima on

$$\mathbf{F} = (\nabla U)_\varphi \quad (4.34)$$

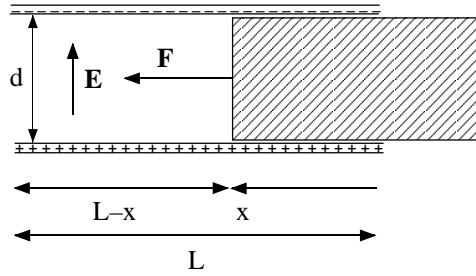
missä alaindeksi φ viittaa siihen, että ulkoinen energialähde pitää johdekappaleiden potentiaalit vakioina siirroksen $d\mathbf{r}$ ajan.

Esim. Levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin vaikuttava voima

Olkoon kondensaattorin levyjen sisällä koko kondensaattorin täyttävä eristepalkki (kuva 4.1), jonka permittiivisyys on ϵ . Kondensaattorin levyjen etäisyys on d , niiden pituus L ja leveys w . Ulkoinen virtalähde pitää kondensaattorin jännitteen vakiona $\Delta\varphi$. Lasketaan, kuinka suuri voima yrittää vetää palkkia kondensaattoriin.

Kondensaattorissa on sekä ilmassa että eristeessä sama sähkökenttä $E = \Delta\varphi/d$ (HT: miksi?), joten sen energiasisältö on

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV \quad (4.35)$$



Kuva 4.1: Eristepalkki levykondensaattorin sisällä.

jättämällä kondensaattorin reunaefektit huomiotta. Systeemin energia kuvan tilanteessa on

$$U(x) = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 wxd + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 w(L-x)d \quad (4.36)$$

Voima

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2} w \frac{(\Delta\varphi)^2}{d} = \frac{K - 1}{2} \epsilon_0 E^2 wd \quad (4.37)$$

osoittaa kasvavan x :n suuntaan vastustaen ulosvetämistä (HT: miten tämän voi selittää eristepalkkiin indusoituvien varausten avulla?).

Mainitaan lopuksi, että sähkökentän voimavaikutukset voidaan laskea tyylikkäästi Maxwellin jännitystensorin avulla. Siihen perehdytään luvussa 9.

Luku 5

Staattinen magneettikenttä

Tässä luvussa tutustutaan tasavirtoihin ja niiden aiheuttamiin magneettikenttiin (RMC luvut 7 ja 8, CL luku 6; esitiedot KSII luvut 5 ja 6).

5.1 Sähkövirta

Nykyaikana sähkövirta lienee tutumpi ilmiö kuin sähkövaraus. Todellisuudessa sähkövarauksia ja -virtoja ei oikeastaan voi käsitellä erikseen. Edellisissä luvuissakin sähkövirta on ollut implisiittisesti esillä monta kertaa. Kun varaukset järjestäytyvät johdekappaleen pinnalle, systeemissä kulkee virtaa ja kuinkapa muuten kuin sähkövirran avulla paristo pystyy pitämään edellisen luvun viimeisessä esimerkissä kondensaattorin jännitteen vakiona. Samoin termit ”johde” ja ”eriste” viittaavat kappaleiden kykyyn kuljettaa sähkövirtaa.

Tarkastellaan joukkoa varattuja hiukkasia, joiden varaus on q , lukumäärätiheys on n ja nopeus \mathbf{v} . Sähkövirta I määritellään annetun pinnan läpi aikayksikössä kulkevan varauksen määränä

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

Olkoon dS jokin pintaelementti. Sen läpi kulkeva virta on

$$dI = \frac{nq\mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n} dS}{dt} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2)$$

missä \mathbf{J} on virrantiheys.

Sähkövirran SI-yksikkö on ampeeri $A = C/s$. Virrantiheys on virta pinta-alan läpi, joten sen yksikkö on A/m^2 . SI-yksiköissä sähkövirran yksikkö otetaan perussuureksi ja kaikki muut sähköiset yksiköt voidaan ilmaista ampeerin, metrin, kilogramman ja sekunnin avulla.

Virrantiheys on samankaltainen vuosuure kuin sähkövuon tiheys \mathbf{D} tai pian määriteltävä magneettivuon tiheys \mathbf{B} . Fysikaalinen vuo tarkasteltavan pinnan läpi saadaan integroimalla vuon tiheys pinnan yli.

5.1.1 Jatkuvuusyhtälö

Virrantiheys ja sähkövaraus liittyvät läheisesti toisiinsa. Tarkastellaan suljetun pinnan S läpi alueeseen V **tulevaa** virtaa (\mathbf{n} osoittaa ulospäin)

$$I = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV \quad (5.3)$$

Tämän täytyy olla yhtä suuri kuin varausten tilavuuteen V tuoma sähkövirta

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (5.4)$$

Oletetaan tilavuus kiinteäksi, jolloin aikaderivaatta voidaan viedä integraalin sisään. Koska ρ on sekä ajan että paikan funktio, kokonaisderivaatta muuttuu osittaisderivaataksi

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (5.5)$$

joten

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV = 0 \quad (5.6)$$

Koska tämän täytyy olla voimassa kaikilla tilavuuksilla, saamme virralle **jatkuvuusyhtälön**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.7)$$

Mikäli varaustiheys on ajasta riippumaton eli $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, sähkövirralla ei ole lähteitä tai nieluja ja siten kaikki virtaviivat sulkeutuvat. Tällaista virtausta kutsutaan **stationaariseksi**.

Huom. Jatkuvuusyhtälö on suora seuraus kokonaisvarauksen säilymislaista eikä edellytä kiinteän tilavuuden tarkastelua (yleisempi johto: CL 6.1).

5.1.2 Ohmin laki

On kokeellinen tosiasia, että vakioämpötilassa olevissa metalleissa sähkövirta riippuu **lineaarisesti** sähkökentästä

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.8)$$

Tätä yhtälöä kutsutaan **Ohmin laiksi** ja verrannollisuuskerrointa σ **johdavuudeksi**.

Huom. Käytämme sähkönjohtavuudelle yleisen tavan mukaan samaa symbolia kuin aiemmin pintavaraukselle. RMC välttää tämän merkitsemällä johtavuutta g :llä ja KSII puolestaan γ :lla. σ on kuitenkin kirjallisuudessa yleisin merkintä ja jos joudumme jossain kirjoittamaan molemmat suuret, eroteltakoon ne siellä vaikkapa kirjoittamalla pintavaraukselle σ_S . Jälleen on tärkeää oppia lukemaan yhtälöiden takana olevaa fysiikkaa eikä niinkään opetella kaavoja ulkoa!

Lineaarinen Ohmin laki on voimassa tavallisille aineille, ellei sähkökenttä ole kovin suuri. Se ei kuitenkaan ole samanlainen fysiikan peruslaki kuin Maxwellin yhtälöt, vaan samantapainen rakenneyhtälö kuin $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, jonka yksityiskohtainen muoto ja jopa olemassaolo riippuvat väliaineen ominaisuuksista. On myös olemassa epälineaarisia väliaineita, missä σ on sähkökentän ja mahdollisesti myös magneettikentän funktio. Jos sähkökenttä on riittävän suuri, niin väliaine kuin väliaine alkaa käyttäytyä epälineaarisesti.

Johtavuuden käänteislukua $\eta = 1/\sigma$ kutsutaan **ominaisvastukseksi** eli resistiivisyydeksi. Myös sen merkintä vaihtelee kirjallisuudessa. Nyt on tärkeää oppia tekemään ero ”ominaisvastuksen” (engl. resistivity) ja ”vastuksen” (resistance) välillä. Johtavuuden SI-yksikkö on $[\sigma] = (\text{A}/\text{m}^2)/(\text{V}/\text{m}) = \text{A}/(\text{Vm})$, joten ominaisvastuksen yksiköksi tulee Vm/A . Toisaalta V/A on tuttu vastuksen yksikkö ohmi (Ω), joten ominaisvastuksen yksikkö on Ωm ja johtavuuden $\Omega^{-1}\text{m}^{-1} = \text{S}/\text{m}$, missä on otettu käyttöön yksikkö siemens. Siemensin sijasta ohmin käänteislukuna esiintyy kirjallisuudessa usein mho. Taulukossa 5.1 on annettu joidenkin hyvien johteiden resistiivisyyksiä.

Tarkastellaan sähkövirran ja jännitteen välistä relaatiota ohuessa homogeenisessa suorassa virtajohdossa, jonka päiden välillä on jännite $\Delta\varphi$ ja jonka johtavuus on σ . Johteessa on sähkökenttä, joka saadaan integraalista

$$\Delta\varphi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.9)$$

Sähkökentällä ei voi olla komponenttia kohtisuorassa johtoa vastaan, koska tämä aiheuttaisi jatkuvan sähkövirran joko johtoon tai siitä pois ja johdon pinnan varautumisen. Koska systeemi on homogeeninen ja suora, sähkökenttä on sama koko johdossa, joten

$$\Delta\varphi = El \quad (5.10)$$

missä l on johdon pituus. Ohmin lain mukaan johdossa kulkee virta, joka mielivaltaisen poikkileikkauspinta-alan A läpi on

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = JA = \frac{\sigma A}{l} \Delta\varphi \quad (5.11)$$

ja olemme löytäneet sähkövirran ja jännitteen välisen Ohmin lain. Verrannollisuuskerroin on vastus (resistanssi) $R = l/(\sigma A)$, jonka SI-yksikkö on siis ohmi.

Taulukko 5.1: Aineiden resistiivisyyksiä. Johtavuus on resistiivisyyden käänteisluku. Vertailun vuoksi mainittakoon, että taulukossa 3.1 lueteltujen eristeiden resistiivisyydet ovat tyypillisesti suurempia kuin $10^8 \Omega m$. Vesi on poikkeus, sillä sen resistiivisyys on noin $5000 \Omega m$, joten sitä voidaan pitää myös johteena.

| aine | resistiivisyys $10^{-8} \Omega m$ |
|--------------|--------------------------------------|
| alumiini | 2.65 |
| grafiitti | 1375 |
| hopea | 1.59 |
| konstantaani | 50 |
| kulta | 2.35 |
| kupari | 1.67 |
| nikkeli | 6.84 |
| rauta | 9.71 |
| sinkki | 5.92 |
| volframi | 5.68 |

Tämän avulla voimme johtaa koulufysiikasta tuttuja relaatioita, kuten työn, jonka sähkökenttä tekee siirtäessään varauksen Q potentiaalieron U läpi: $W = QU$ ja sitä vastaavan tehon $P = UI = RI^2 = U^2/R$. Tämän tehon sanotaan häviävän materiaalin **Joulen lämmityksenä**.

5.1.3 Stationaariset virtaukset

Ohmin laki on siis rakenneyhtälö kuten \mathbf{E} :n ja \mathbf{D} :n välinen relaatio. Analogia menee pidemmällekin. Stationaarisen virtauksen jatkuvuusyhtälö $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ on samaa muotoa kuin $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, mikä yksinkertaisen väliaineen tapauksessa on muotoa $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Niinpä stationaarisen sähkövirran virtaviivat voidaan ratkaista ratkaisemalla Laplacen yhtälö samoilla menetelmällä kuin edellisissä luvuissa. Ensin on etsittävä sopivat reunaehdot virrantiheydelle. Tarkastellaan esimerkkinä johdetta, jossa on pitkä sylinterinmuotoinen reikä. Sähkövirran on epäilemättä kierrettävä tämä este jotenkin.

Merkitään sylinteriä (sisäalue) alaindeksillä i ja johdetta (ulkoalue) alaindeksillä u . Koska $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ reunaehdoksi saadaan $J_{un} = J_{in}$ eli

$$\sigma_u E_{un} = \sigma_i E_{in} \quad (5.12)$$

\Rightarrow

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \sigma_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial r} \quad (5.13)$$

synterinin pinnalla $r = a$. Toisaalta potentiaali on jatkuva, joten

$$\varphi_u(a, \theta) = \varphi_i(a, \theta) \quad (5.14)$$

Kaukana sylinteristä virta on häiriintymätön, joten

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta \quad \text{kun } r \rightarrow \infty \quad (5.15)$$

Tehdään ratkaisuyritteet (vrt. luku 2.9.3)

$$\varphi_i = A_{i1} r \cos \theta \quad (5.16)$$

$$\varphi_u = -E_0 r \cos \theta + B_{u1} \frac{\cos \theta}{r} \quad (5.17)$$

Yritteessä ei ole $\sin \theta$ -termejä symmetrian $\varphi(\theta) = -\varphi(\pi - \theta)$ vuoksi (HT: mistä tällainen symmetria tulee?). Nyt reunaehdot antavat

$$A_{i1} a \cos \theta = -E_0 a \cos \theta + B_{u1} \frac{\cos \theta}{a} \quad (5.18)$$

$$\sigma_i A_{i1} \cos \theta = \sigma_u \left(-E_0 \cos \theta - \frac{B_{u1} \cos \theta}{a^2} \right) \quad (5.19)$$

Saadaan kertoimet A_{i1} ja B_{u1}

$$A_{i1} = \frac{-2\sigma_u E_0}{\sigma_i + \sigma_u} \quad (5.20)$$

$$B_{u1} = \frac{\sigma_i - \sigma_u}{\sigma_i + \sigma_u} E_0 a^2 \quad (5.21)$$

ja ongelma on ratkaistu.

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa reikä on niin hyvä eriste, että kaikki virta kiertää sen. Tällöin $\sigma_i \rightarrow 0$. Sijoittamalla tämä potentiaalilausekkeeseen, laskemalla sähkökenttä ja käyttämällä Ohmin lakia saadaan virran lauseke

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 - \frac{J_0 a^2}{r^2} (\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (5.22)$$

Sähkövirran virtaviivat kiertävät esteen siististi. Ongelma on analoginen kokoonpuristumattomassa nestevirtauksessa ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) olevan sylinterinmuotoisen virtausesteen kanssa. Laplace'n yhtälön ratkomisen on varsin yleispätevä menetelmä fysiikassa (Feynman lectures, osa 2, luku 12-1: "The same equations have the same solutions").

5.2 Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki

Magnetismin olemassaolo on tunnettu kauan, mutta sen yhteys sähköön löytyi vasta vuonna 1820, kun *Ørsted* havaitsi, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän. Magneettikentän fysikaalinen määrittely tehdään voimavaikutuksen kautta samaan tapaan kuin sähkökentän määrittely.

Pian *Ørstedin* kerrottua havainnoistaan, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän, *Ampère* julkaisi mittaustuloksensa, joiden mukaan kahden virtasilmukan, joissa kulkee virrat I_1 ja I_2 , välillä vaikuttaa voima, joka nykymerkinnöillä on

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.23)$$

Tämä on siis virtasilmukkaan 2 vaikuttava voima (vrt. Coulombin laki). Koska SI-yksiköissä **määritellään** $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$, tämän voiman mittausta varsinaisesti määrittelee ampeerin, josta saadaan coulombi ja muut sähköopin SI-yksiköt.

Voiman lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \quad (5.24)$$

missä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.25)$$

on silmukan C_1 synnyttämä magneettikenttä (oikeammin magneettivuon tiheys) pisteessä \mathbf{r}_2 , joka on silmukassa C_2 . Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi** tai myös Ampèren ja Laplacen laiksi (kunnia kuulunee kaikille). Se voidaan yleistää virtasilmukoista väliaineessa olevalle virrantiheydelle korvaamalla $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} dV$ ja korvaamalla lenkki-integraali tilavuus-integraalilla. Integrandi on tietenkin nolasta poikkeava vain siinä alueessa missä $\mathbf{J} \neq 0$. Siis

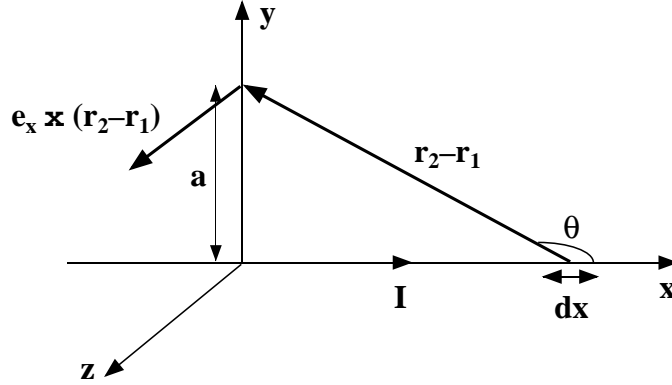
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 \quad (5.26)$$

Näin voimme laskea magneettikentän mielivaltaisesta virtajakautumasta samaan tapaan kuin staattisen sähkökentän annetusta varausjakautumasta.

Kokeellinen tosiasia on, että kaikki magneettikentät voidaan antaa virtajakautumien avulla. Nyt nähdään suoraviivaisella laskulla (HT), että

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.27)$$

joka on Coulombin lain jälkeen toinen laki Maxwellin yhtälöiden joukossa ja ilmaisee, että ei ole olemassa erillisiä kentän \mathbf{B} lähteitä tai nieluja eli



Kuva 5.1: Suoran virtajohtimen aiheuttaman magneettikentän laskeminen.

magneettisia napoja (magneettisia monopoleja). Tämä merkitsee myös sitä, että magneettikentän kenttäviivoilla ei ole alku- eikä loppupäätä vaan kaikki kenttäviivat sulkeutuvat.

On syytä korostaa, että magneettikentän lähteettömyys on puhtaasti kokeellinen laki eikä sille ole mitään teoreettista tai matemaattista välttämättömyyttä. Itseasiassa modernit sähköistä, heikkoa ja vahvaa vuorovaikutusta yhdistävät yhtenäiskenttäteoriat mahdollistavat magneettisten monopolioiden olemassaolon. Ne voidaan periaatteessa ottaa mukaan klassiseenkin elektrodynamiikkaan kirjoittamalla $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$, missä ρ_m on magneettinen varausitiheys, mutta tähän ei ole mitään syytä, koska emme havaitse monopolioiden vaikutuksia klassisen elektrodynamiikan puitteissa.

Pitkän suoran virtajohtimen aiheuttama kenttä

Olkoon johdin x -akselilla ja lasketaan magneettikenttä pisteessä \mathbf{r}_2 y -akselilla.

Käytetään seuraavia merkintöjä $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i}$; $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i}$; $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{j}$. Tällöin $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = a dx \mathbf{k}$. Biot'n ja Savartin lain suoraviivainen käyttö antaa

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left|_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Jos virtajohde on äärellisen mittainen, magneettikenttä on oheisessa kuvassa määritellyn kulman θ funktio

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} \left|_{-L_1}^{L_2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} \left|_{\theta_1}^{\theta_2} (-\cos \theta) \quad (5.29)$$

Huom. Tässä laskussa käytettiin karteesista koordinaatistoa, missä suunnan \mathbf{k} määrää tarkastelupisteen paikka. Peruskurssilta tiedämme, että magneettikenttä kiertää suoran virtajohteen ympäri oikean käden kiertosäännön mukaisesti. Käyttämällä sylinterikoordinaatistoa, missä positiivinen z -akseli on virran suuntainen ja \mathbf{e}_θ on atsimutaalikoordinaatin yksikkövektori (siis eri kulma kuin ylläolevassa kuvassa), magneettikenttä on

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{e}_\theta \quad (5.30)$$

Ympyränmuotoisen virtasilmukan kenttä ympyrän keskipisteen läpi kulkevalla akselilla

Tämäkin esimerkki lienee tuttu peruskurssilta. Olkoon ympyrän säde a ja tarkastellaan kenttää ympyrän tasoa vastaan kohtisuorassa olevalla keskipisteen kautta kulkevalla z -akselilla. Olkoon \mathbf{k} -vektorin suunta virtaan nähden oikean käden säännön mukainen. Biot'n ja Savartin lain suora soveltaminen antaa kentäksi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Jos ympyröitä on useampia, kuten kelassa, on jokaisen ympyrän osuus summattava.

Helmholtzin kela

Helmholtzin kela muodostuu kahdesta N -kertaisesta silmukasta, joiden keskipisteet ovat samalla z -akselilla. Olkoot kelojen säteet a ja etäisyys $2b$. Tällöin kenttä z -akselilla kelojen välissä etäisyydellä z toisesta kelasta on

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \quad (5.32)$$

Helmholtzin keloja käytetään tuottamaan suhteellisen homogeeninen magneettikenttä rajoitettuun alueeseen. Tarkastellaan magneettikentän derivaattaa z -akselilla. Kun $z = b$, $dB_z/dz = 0$. Myös toinen derivaatta on nolla tässä pisteessä, jos $2b = a$. Asettamalla siis kelat niiden säteen etäisyydelle toisistaan, on kenttä pisteen $z = a/2$ ympäristössä mahdollisimman homogeeninen. Itse asiassa kolmaskin derivaatta häviää ja kentän epähomogeenisuus

ilmenee vasta Taylorin sarjan neljännessä termissä

$$\begin{aligned} B_z(z) &= B_z(a/2) + \frac{(z - a/2)^4}{24} \left. \frac{d^4 B_z}{dz^4} \right|_{z=a/2} + \dots \\ &\approx B_z(a/2) \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - a/2}{a} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3 Ampèren laki

Tarkastellaan stationaarista virtaa, siis $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Lasketaan magneettikentän roottori lähtien Biot'n ja Savartin laista

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \nabla_2 \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 \right\} \quad (5.34)$$

Alaindeksi 2 viittaa siihen, että vietäessä roottori integraalin sisään, se otetaan paikan \mathbf{r}_2 suhteen. Kirjoittamalla ristitulot auki saadaan

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \left(\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] dV_1 \quad (5.35)$$

Muistetaan kaava

$$\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = 4\pi\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (5.36)$$

jonka avulla integraalin ensimmäinen termi antaa $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2)$.

Jälkimmäisessä termissä voidaan $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$:n antisymmetrisyyden vuoksi vaihtaa derivointi tapahtuvaksi \mathbf{r}_1 :n suhteen vaihtamalla merkki. Koska jälkimmäinen termi sisältää ∇ :n ja $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ välisen dyaditulon, käsitellään se $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$:n komponentti kerrallaan. Manipuloidaan x -komponenttia kaavalla

$$\mathbf{J} \cdot \nabla_1 \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) - \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \nabla_1 \cdot \mathbf{J} \quad (5.37)$$

Nyt oikean puolen jälkimmäinen termi on nolla oletuksen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ perusteella. Jäljellä oleva tilavuusintegraali voidaan muuttaa pintaintegraaliksi

$$\int_V \nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) dV_1 = \oint_S \mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.38)$$

Tämän on oltava voimassa pinnan valinnasta riippumatta, joten pinta voidaan siirtää virtajakautuman ulkopuolelle eli integraalin on oltava nolla. Sama pätee kaikille komponenteille, joten jäljelle on jäänyt **Ampèren laki** differentiaali muodossa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.39)$$

Integraalimuotoon Ampèren laki saadaan käyttämällä Stokesin lausetta muodossa

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.40)$$

joten

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \mu_0 I \quad (5.41)$$

Siis suljettua lenkkiä pitkin integroitu magneettivuon tiheys on μ_0 kertaa lenkin läpi kulkeva kokonaisvirta. Tätä tulosta kutsutaan **Ampèren kiertosäännöksi**. Sen avulla voi laskea suoraan magneettikentän sellaisissa edellä käsitellyissä symmetrisissä tapauksissa kuin suora virtajohdin tai ympyränmuotoinen silmukka. Integraaleissa on muistettava, että pinnan S normaalivektori \mathbf{n} määrittelee oikeakätisesti käyräalkion $d\mathbf{l}$.

Kenttä toridaalisen solenoidin sisällä

Tarkastellaan toruksen ympärille kierrettyä solenoidia (N kierrosta). Toruksen sisällä kenttä on symmetriasyistä $\mathbf{B} = B(\rho)\mathbf{e}_\phi$, missä ϕ on toruksen keskipistettä kiertävä kulma ja ρ etäisyys toruksen keskipisteestä toruksen sisällä olevaan pisteeseen. Sovelletaan Ampèren kiertosääntöä pitkin ρ -säteistä ympyrää toruksen sisällä

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(\rho)2\pi\rho = \mu_0 NI \quad (5.42)$$

\Rightarrow

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi \quad (5.43)$$

5.4 Lorentzin voima

Siirrytään nyt tarkastelemaan varauksellisten hiukkasten välisiä magneettisia vuorovaikutuksia. Palautetaan mieleen origossa olevan varauksen q_1 pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukseen q aiheuttama Coulombin voima

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.44)$$

Tässä molemmat varaukset ovat levossa. Jos varaukset liikkuvat vakionopeuksilla \mathbf{v} ja \mathbf{v}_1 , aiheuttaa varaus q_1 varaukseen q **magneettisen voiman**

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.45)$$

Tämän voi päätellä soveltamalla kahden virtasilmukan välistä magneettista voimaa 5.23 infinitesimaalisille virta-alkioille. Laki on luonnollisesti myös kokeellisesti todennettavissa.

Magneettinen voima voidaan myös lausua muodossa (vrt. virtasilmukat)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.46)$$

missä \mathbf{B} on magneettivuon tiheys

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.47)$$

Samoin kuin sähkökentän myös magneettikentän tapauksessa useiden liikkuvien varausten kentät ovat additiivisia.

Yhteenlaskettua sähköistä ja magneettista voimaa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.48)$$

kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. On tärkeää huomata, että magneettinen voima on aina kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan. Siten $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$, mikä merkitsee, että magneettinen voima ei tee työtä varattuun hiukkaseen. Jos siis haluamme kiihdyttää varauksia, tarvitsemme aina viime kädessä sähkökentän, vaikka se luotaisiinkin muuttuvan magneettikentän avulla.

Magneettivuon tiheyden SI-yksikkö on tesla ($T = \text{Ns}/\text{Cm} = \text{N}/\text{Am}$) ja magneettivuon yksikkö weber ($\text{Wb} = \text{Tm}^2$). Koska esimerkiksi maapallon magneettikenttä maan pinnalla vaihtelee välillä 30000–60000 nT, on tesla useissa sovellutuksissa varsin suuri yksikkö.

Vertaamalla sähköisen ja magneettisen voiman määritelmiä huomataan, että tulon $\epsilon_0\mu_0$ dimension täytyy olla sama kuin nopeuden neliön käänteisluvulla. Kirjoittamalla $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ saadaan c :n lukuarvoksi valonnopeus. Niinpä voimme kirjoittaa magneettisen voiman lausekkeen muodossa

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.49)$$

Nyt voimme verrata magneettista ja sähköistä voimaa toisiinsa

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v v_1}{c c} \quad (5.50)$$

Siis tavallisilla nopeuksilla liikkuville varauksille sähköiset voimat ovat paljon voimakkaampia kuin magneettiset voimat. Magneettiset voimat eivät kuitenkaan ole merkityksellisiä, sillä vaikka aine on yleensä sähköisesti neutraalia, se saattaa olla voimakkaasti magnetoitunutta.

5.5 Virtasilmukan magneettimomentti

Tarkastellaan virtajohdinta, joka muodostaa suljetun silmukan C . Tällöin koko silmukkaan vaikuttaa voima 5.24

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (5.51)$$

Kokonaisvirta ei riipu paikasta, joten se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, samoin magneettikenttä, mikäli se on vakio

$$\mathbf{F} = -I \mathbf{B} \times \oint_C d\mathbf{l} = 0 \quad (5.52)$$

Siis **vakio**magneettikentässä virtasilmukkaan vaikuttava voima on nolla.

Tarkastellaan sitten silmukka-alkioon vaikuttavaa vääntömomenttia

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.53)$$

joten koko silmukkaan vaikuttava vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.54)$$

Oletetaan jälleen, että magneettikenttä on vakio. Kirjoitetaan ristitulo auki kaavalla $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})\mathbf{B}$. Tällöin

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - I\mathbf{B} \oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.55)$$

Jälkimmäinen integraali muuntuu Stokesin lauseella muotoon $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. Ensimmäinen integraali muuntuu puolestaan yleistetyllä Stokesin lauseella muotoon

$$\oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \quad (5.56)$$

Koska \mathbf{B} on vakio, niin (HT)

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \quad (5.57)$$

joten

$$\boldsymbol{\tau} = I \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = I \left(\int_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (5.58)$$

missä pinta-alavektori \mathbf{S} voidaan kirjoittaa yleistetyn Stokesin lauseen avulla

$$\mathbf{S} = \int_S \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (5.59)$$

Tuloa $I\mathbf{S}$ kutsutaan silmukan C **magneettimomentiksi**

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (5.60)$$

Tämän avulla vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (5.61)$$

Siis vaikka silmukkaan ei kohdistukaan voimaa, joka kiihdyttäisi silmukkaa kokonaisuutena, siihen kohdistuu vääntömomentti, joka pyrkii kääntämään silmukan pintaa kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä käytetään hyväksi esimerkiksi avaruusalusten asennonsäätöjärjestelmissä.

5.6 Magneettikentän potentiaaliesitys

5.6.1 Vektoripotentiaali

Koska magneettikenttä on lähteetön, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se voidaan ilmaista vektorikentän roottorina

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.62)$$

Vektoripotentiaali \mathbf{A} ei ole yksikäsitteinen, sillä olipa f mikä riittävän siisti skalaarikenttä hyvänsä $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$.

Vektoripotentiaali voidaan ilmaista virran avulla lähtemällä jälleen Biot'n ja Savartin laista

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 \quad (5.63)$$

Koska

$$\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (5.64)$$

voidaan integrandi kirjoittaa muotoon

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (5.65)$$

Sovelletaan tähän kaavaa $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla f$. Nyt $\nabla_2 \times \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) = 0$, koska ∇_2 ei operoi \mathbf{r}_1 :een, joten integrandiksi tulee

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \nabla_2 \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \quad (5.66)$$

∇_2 voidaan siirtää \mathbf{r}_1 :n suhteen laskettavan integraalin ulkopuolelle, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \nabla_2 \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \right\} \quad (5.67)$$

eli

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \quad (5.68)$$

Kirjoittamalla \mathbf{A} komponenttimuodossa

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \quad (5.69)$$

nähdään, että komponentit A_i ovat matemaattisesti samaa muotoa kuin sähköstaattisen potentiaalin lauseke

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \quad (5.70)$$

joten jokaiselle komponentille erikseen ja siten koko vektorille on voimassa Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.71)$$

Koska toisaalta

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (5.72)$$

vektoripotentiaalin on toteutettava ehto

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (5.73)$$

Usein vektoripotentiaali valitaan siten, että $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, mikä itse asiassa oletettiin edellä implisiittisesti (Luku 9).

Sähköstaattikassa skalaaripotentiaali helpottaa laskuja olennaisesti. Vektoripotentiaali on monimutkaisempi suure, mutta silti käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Vektoripotentiaali on myös hyödyllinen sähkömagneettisiin aaltoihin ja säteilyyn liittyvissä ongelmissa ja keskeinen apuväline elektrodynamiikan teoriassa, relativistisissa tarkasteluissa ja kvanttielektrodynamiikassa.

5.6.2 Magneettikenttä kaukana virtasilmutuksesta

Mikäli virta on kulkee virtasilmutuksessa, voidaan palata luvun alussa olleeseen esitykseen $\mathbf{J} dV \rightarrow I d\mathbf{r}$ ja vektoripotentiaalin lausekkeeksi tulee

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (5.74)$$

Tarkastellaan tilannetta kaukana silmutuksesta ja kehitetään nimittäjä sarjaksi

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r_2^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^{-1/2} = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \dots \right] \quad (5.75)$$

joten

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_2} \oint d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r_2^3} \oint d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \dots \right\} \quad (5.76)$$

Ensimmäinen integraali on nolla. Jälkimmäinen integrandi on osa lausekkeesta

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \quad (5.77)$$

Toisaalta lausekkeen $\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$ differentiaali \mathbf{r}_1 :n pienen muutoksen suhteen on

$$d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \quad (5.78)$$

Summaamalla nämä ja jakamalla kahdella saadaan

$$d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] \quad (5.79)$$

Koska tämän jälkimmäinen termi on kokonaisdifferentiaali, se ei tuota mitään suljettuun lenkki-integraaliin, joten jäljelle jää

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 \right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (5.80)$$

Hakasuluissa oleva lauseke on tuttu silmukan magneettinen momentti \mathbf{m} , jonka avulla lausuttuna vektoripotentiaali on

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (5.81)$$

Koska laskussa on oletettu $r_1 \ll r_2$, on koordinaatiston origo sijoitettava lähelle silmukkaa.

Magneettikenttä saadaan ottamalla vektoripotentiaalin roottori (HT)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5} - \frac{\mathbf{m}}{r_2^3} \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

Ainoastaan etäällä olevan silmukan magneettinen momentti vaikuttaa magneettikenttään. Tämä on muodoltaan samanlainen kuin sähköisen dipolin aiheuttama sähkökenttä 2.40. Tämän vuoksi magneettista momenttia kutsutaan usein **magneettiseksi dipolimomentiksi**.

5.6.3 Magneettikentän skalaaripotentiaali

Alueissa, joissa $\mathbf{J} = 0$, magneettikenttä on pyörteetön $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, joten näissä alueissa magneettikenttä voidaan ilmaista **magneettisen skalaaripotentiaalin** ψ avulla

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi \quad (5.83)$$

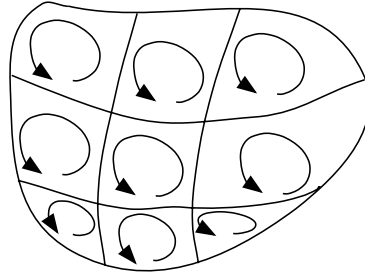
Koska toisaalta aina $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, skalaaripotentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (5.84)$$

joten sähköstatiikasta tuttuja apuneuvoja voi soveltaa magnetostatiikan ongelmiin kunhan ollaan huolellisia erilaisten reunaehtojen kanssa.

Koska etäällä olevan virtasilmukan luoma magneettikenttä on matemaattisesti samaa muotoa kuin sähködipolin kenttä, voidaan magneettinen skalaaripotentiaali ilmaista magneettisen dipolimomentin avulla

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \right) \quad (5.85)$$



Kuva 5.2: Virtasilmukan muodostaminen pienistä silmukoista. Nettovirtaa kulkee vain ison silmukan ulkoreunalla.

joten

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (5.86)$$

Erona sähköstatiikkaan magneettinen skalaaripotentialiaali on paikan yksiarvoinen funktio ainoastaan yhdesti yhtenäisissä alueissa. Tarkastellaan esimerkkinä aluetta, jossa on virtasilmukka. Nyt dipolitarkastelu ei käy suoraan päinsä. Virtasilmukan voidaan kuitenkin ajatella koostuvan monesta pienestä (differentiaalisesta) silmukasta, jotka muodostavat tiheän silmukan sulkeman pinnan peittävän verkon (kuva 5.2).

Verkon vierekkäisten elementtien virrat kumoavat toisensa, joten kokonaisvirta on sama kuin silmukkaa kiertävä virta. Kukin silmukka tuottaa ulkopuolelleen skalaaripotentialiaalelementin

$$d\psi = \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} = \frac{(I \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} = -\frac{I}{4\pi} d\Omega \quad (5.87)$$

missä $d\Omega$ on differentiaalisen silmukan avaruuskulmaelementti. Integroimalla kaikkien pikkusilmukoiden yli saadaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi} \Omega \quad (5.88)$$

missä Ω on silmukan peittämä avaruuskulma katsottaessa pisteestä, jossa ψ lasketaan (tämä selittää ylläolevan miinusmerkin!). Kuljettaessa silmukan läpi ja tultaessa takaisin samaan tarkastelupisteeseen kasvaa avaruuskulma tekijällä 4π , joten potentialiaali ei todellakaan ole yksikäsitteinen vaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi} (\Omega_0 \pm n 4\pi) \quad (5.89)$$

Alueesta saadaan yhdesti yhtenäinen asettamalla tarkastelualueen rajapinnaksi jokin silmukan reunakäyrän rajoittama pinta.

Helppo esimerkki tilanteesta, jossa skalaaripotentiali ei ole paikan yksiarvoinen funktio, on äärettömän pitkä suora virtajohdin. Jos johdin on z -akselilla, niin sylinterikoordinaateissa skalaaripotentialiksi kelpaa $\psi = -I\phi/(2\pi)$, jolle $\psi(\phi) \neq \psi(\phi + 2\pi)$.

Magneettinen skalaaripotentiali eroaa sähköisestä siinä, että jälkimmäisellä on selvä fysikaalinen tulkinta: se antaa varauksellisen hiukkasen potentiaalienergian sähköstaattisessa kentässä. Magneetikentässä tällaista tulkintaa ei ole.

5.7 Magneettivuo

Magneetikentäksi kutsumamme suure \mathbf{B} on siis tarkkaan ottaen magneettivuon tiheys, jonka SI-yksikkö tesla (T) vastaa yhden weberin (Wb) suuruista magneettivuota neliömetrin läpi. Magneettivuo Φ pinnan S läpi on

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.90)$$

Jos pinta on suljettu

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (5.91)$$

eli magneettivuo suljetun pinnan läpi on nolla. Tätä voi havainnollistaa epätasällisella toteamuksella, että jokaisesta avaruuden alueesta lähtee yhtä paljon magneetikentän kenttäviivoja kuin niitä sinne tulee.

Luku 6

Magneettikenttä väliaineessa

Tässä luvussa käsitellään magneettikentän ominaisuuksia väliaineessa (RMC luku 9 osittain; CL luku 7 osittain; esitiedot KSII luku 4).

6.1 Magnetoituma

Edellä rajoituttiin magneettikentän määrittämiseen magneettisilta ominaisuuksiltaan tyhjänkaltaisessa väliaineessa. Aineen mikroskooppinen rakenne aiheuttaa todellisuudessa kullekin atomille ominaisen magneettisen dipolimomentin \mathbf{m}_i . Lasketaan yhteen kaikkien atomien dipolimomentit tilavuusalkiossa ΔV . Aineen **magnetoituma** määritellään raja-arvona (vrt. polarisointuma)

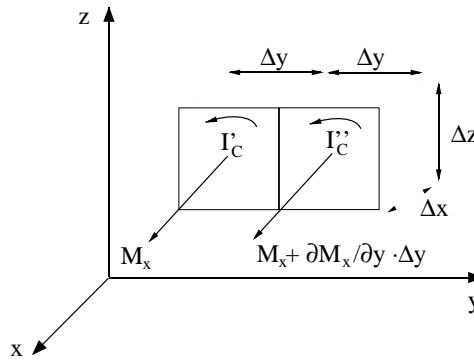
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{m}_i \quad (6.1)$$

Magnetoituma on siis väliaineen magneettisten dipolimomenttien tiheys paikan funktiona. Koska magneettisen momentin SI-yksikkö on Am^2 , on magnetoituman yksikkö A/m .

Jos dipolimomenttien tiheys on homogeeninen, kutakin dipolimomenttia vastaavat virtasilmukat summautuvat nolnaan eivätkä aiheuta nettovirtaa. Jos jakautuma kuitenkin on epätasainen, on tarkastelupisteen eri puolilla eri määrä virtaelementtejä ja tuloksena on kokonaisvirta \mathbf{J}_M . Virran laskemiseksi tarkastellaan kahta pientä tilavuusalkiota magneettisessa materiaalissa. Olkoon kummankin tilavuus $\Delta x \Delta y \Delta z$ ja sijaitkoot ne rinnakkain y -akselin suuntaan kuvan 6.1 mukaisesti.

Jos ensimmäisen alkion magnetoituma on $\mathbf{M}(x, y, z)$, niin toisen magnetoituma on

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{korkeamman kertaluvun derivaattoja}$$



Kuva 6.1: Magnetoitumasta aiheutuvan virran laskeminen.

Ensimmäisen elementin magneettisen momentin x -komponentti saadaan ilmaistuksi silmukavirran I'_C avulla

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_C \Delta y \Delta z \quad (6.2)$$

ja vastaavasti toiselle elementille

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta y \Delta z = I''_C \Delta y \Delta z \quad (6.3)$$

Elementtien välistä nousee nettovirta z -akselin suuntaan

$$I'_C - I''_C = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (6.4)$$

Toistamalla tarkastelu kahdelle rinnakkaiselle tilavuusalkiolle x -akselilla (tarkkana merkkien kanssa!), saadaan z -akselin suuntaiseksi virraksi

$$I_C = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (6.5)$$

Nämä ovat ainoat magneettiset momentit, jotka tuottavat virtaa z -akselin suuntaan. Laskemalla ne yhteen ja jakamalla pinta-alaelementillä saadaan magnetoitumisvirran tiheyden z -komponentiksi

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (6.6)$$

eli vektorimuodossa

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (6.7)$$

6.2 Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä

Lasketaan sitten magneettisen aineen aiheuttama magneettikenttä. Lähdetään liikkeelle vektoripotentiaalista (vrt. 5.81)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (6.8)$$

Tekemällä tuttuja vektorikikkoja saadaan tämä muotoon

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (6.9)$$

missä S_0 on tilavuuden V_0 pinta. Pinnalla magnetoitumisvirran tiheys on

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (6.10)$$

Tämä on magnetoitumisvirta yksikköpituutta kohti eli virta on ikään kuin litistetty kulkemaan yksiulotteisen ”pinnan” läpi. Vektoripotentiaali määräytyy siis magnetoitumisvirrasta tilavuudessa V_0 ja tilavuuden pinnalla S_0

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (6.11)$$

Tämä tulos ei arvatunkaan ole mikään yllätys (vrt. sähköstaattinen potentiaali). Tästä ei kuitenkaan ole aivan helppo laskea itse magneettikenttää, koska $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Lähdetään liikkeelle suoraan vektoripotentiaalin määritelmästä.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' \quad (6.12)$$

missä gradientti kohdistuu vektoriin \mathbf{r} . Nyt integrandi saadaan muokatuksi muotoon (käy itse läpi kaikki välimuodot!)

$$\nabla \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - (\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.13)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi tuo magneettikenttään osuuden

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.14)$$

Toinen termi vaatii jälleen vähän vektoriakrobatiaa ja antaa tuloksen

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) \quad (6.15)$$

Tässä $\psi(\mathbf{r})$ on magneettisen materiaalin skalaaripotentiaali. Magneettikenttä on siis tämän potentiaalin ja paikallisten virtojen aiheuttaman magneettikentän summa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.16)$$

Aineen ulkopuolella \mathbf{M} on nolla, joten siellä kenttä saadaan skalaaripotentialista, joka on siis integraali aineessa olevista dipolimomenttialkioista.

Tässä on päädytty jokseenkin samanlaiseen kuvailuun kuin eristekappaleiden kanssa. Magneettisen skalaaripotentialin saa edelleen muotoon

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'\end{aligned}\quad (6.17)$$

Näin määritellyt **magneettisten napojen tiheys** ρ_M ja **magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys** σ_M ovat samankaltaisia apusuureita kuin polarisaatiotiheydet ρ_P ja σ_P sähköstatiikassa.

6.3 Magneettikentän voimakkuus

Magneettisen aineen itsensä lisäksi kokonaiskenttään vaikuttaa vapaiden varausten aiheuttama virta. Esimerkiksi rauta voi olla magnetoitunutta ja lisäksi sen johtavuuselektronit kuljettavat ”vapaata” virtaa. Niinpä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.18)$$

Tämä voidaan laskea, mikäli \mathbf{M} ja \mathbf{J} ovat tiedossa kaikkialla. Usein virta tunnetaan, mutta \mathbf{M} riippuu \mathbf{B} :stä. Vaikka rakenneyhtälö $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ tunnettaisiinkin, meille jää yhä integraaliyhtälö \mathbf{B} :n itsensä laskemiseen.

Tämän ongelman käsittelemiseksi otetaan käyttöön apukenttä \mathbf{H} , jota kutsutaan **magneettikentän voimakkuudeksi**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (6.19)$$

Tällöin

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) \quad (6.20)$$

Tämä voi näyttää turhalta tempulta, koska \mathbf{H} riippuu yhä \mathbf{M} :stä ρ_M :n ja σ_M :n kautta, mutta toimihan samanlainen temppu myös sähköstatiikassa.

Kentän \mathbf{H} hyödyllisyys piilee siinä, että sille saadaan virrantiheydestä riippuva differentiaaliyhtälö. Palautetaan ensiksi mieleen, että $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ on kokeellinen laki, jonka mukaan magneettivuon tiheys voidaan aina palauttaa

virtajakautumiin, eikä todellisista eristetyistä magneettisista monopoleista ole havaintoja. Nyt Ampèren laissa on tärkeä huomioida kaikki sähkövirrat

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \quad (6.21)$$

missä \mathbf{J} kuvaa varausten siirrokseen liittyvää vapaata virtaa. Tämä pätee kaikkialla muualla kuin pintavirtaa ylläpitävän kappaleen pinnalla. Ottamalla huomioon relaatio $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$, saadaan tästä

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.22)$$

Siis \mathbf{H} -kentän pyörteet aiheutuvat vain vapaiden varausten kuljettamasta virrasta. Magneettisten ongelmien ratkomiseen tarvitaan tämän lisäksi tietenkin $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, reunaehdot ja kokeellinen rakenneyhtälö \mathbf{B} :n ja \mathbf{H} :n välille.

Integraalimuodossa \mathbf{H} :lle pätee

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.23)$$

eli magneettikentän voimakkuuden integraali pitkin suljettua lenkkiä on yhtä suuri kuin varausten kuljettama kokonaisvirta lenkin läpi.

6.4 Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti

Kenttien \mathbf{B} ja \mathbf{H} välinen suhde riippuu väliaineen ominaisuuksista samaan tapaan kuin kenttien \mathbf{D} ja \mathbf{E} yhteys. Magneettiset aineet ovat yleensä niin monimutkaisia, että **rakenneyhtälö** on määritettävä kokeellisesti. Suurelle joukolla aineita (LIH) yhteys on muotoa

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.24)$$

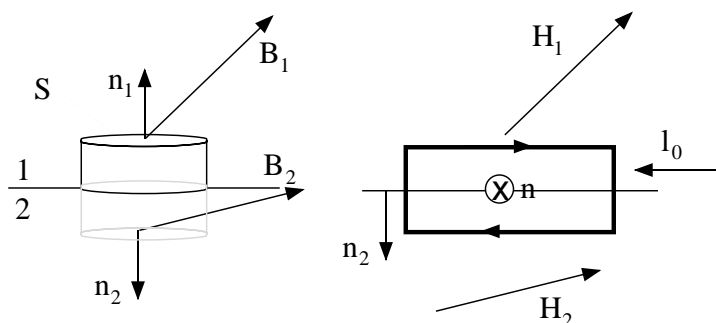
missä kerroin χ_m on **magneettinen suskeptiivisuus**. Epäisotrooppiselle mutta lineaariselle väliaineelle χ_m on tensori, epälineaarisessa väliaineessa se riippuu lisäksi magneettikentästä. Tällä kurssilla rajoitutaan isotrooppisiin magneettisiin väliaineisiin. SI-yksiköissä magneettinen suskeptiivisuus on dimensioton suure (sähköisen χ :n dimensio on sama kuin ϵ_0 :n).

Jos $\chi_m > 0$, väliaine vahvistaa ulkoista magneettivuon tiheyttä ja ainetta kutsutaan **paramagneettiseksi**. Jos taas $\chi_m < 0$, magneettivuon tiheys heikkenee ja aine on **diamagneettista**. Sekä paramagneettisilla että diamagneettisilla aineilla magneettinen suskeptiivisuus on pieni: $|\chi_m| \ll 1$.

Kenttien \mathbf{M} ja \mathbf{H} välinen lineaarinen yhteys merkitsee, että myös kenttien \mathbf{B} ja \mathbf{H} välinen rakenneyhtälö on lineaarinen

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \equiv \mu\mathbf{H} \quad (6.25)$$

missä μ on väliaineen **permeabiliteetti**. Aineiden magneettisia ominaisuuksia tarkastellaan hieman enemmän luvussa 10.



Kuva 6.2: Magneettikenttävektoreiden reunaehtojen määrittäminen.

6.5 Magneettikenttävektoreiden reunaehdot rajapinnalla

Tarkastellaan kuvan 6.2 mukaista kahden väliaineen rajapintaa. Magneettivuon tiheyden \mathbf{B} reunaehto on analoginen sähkövuon tiheyden \mathbf{D} reunaehdon kanssa. Kuvan pillerirasian pinnan yli laskettu \mathbf{B} :n integraali on

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (6.26)$$

Litistämällä pillerirasian vaippa infinitesimaaliseksi saadaan

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0 \quad (6.27)$$

missä ΔS on rasian kannen pinta-ala. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, niin

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (6.28)$$

eli magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

Magneettikentän voimakkuudelle saadaan reunaehto Stokesin lauseen avulla tarkastelemalla \mathbf{H} :n lenkki-integraalia kuvan suorakaidetta pitkin

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.29)$$

missä \mathbf{n} on normaalikomponentti integroimislenkin läpi ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0$). Litistettäessä integroimislaatikko jälleen infinitesimaaliseksi silmukan läpi kulkeva virta voi olla ainoastaan pintavirtaa \mathbf{j} , joten

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \Delta l \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) \quad (6.30)$$

jonka avulla saadaan

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 \Delta l = \Delta l \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \Delta l (\mathbf{j} \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{l}_0 \quad (6.31)$$

josta seuraa reunaehto

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{j} \times \mathbf{n}_2)_t \quad (6.32)$$

eli magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentti on jatkuva rajapinnan yli, ellei pinnalla ole pintavirtaa. Mikäli \mathbf{H} -kenttä tunnetaan pinnan molemmiin puolin, saadaan pintavirran tiheys lausekkeesta

$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j} \quad (6.33)$$

Useissa magnetismissä liittyvissä ongelmissä on näppärää tarkastella **vuoputkia**. Tarkastellaan magneettikentän kenttäviivoja, siis viivoja, jotka ovat jokaisessa pisteessä kentän \mathbf{B} tangentin suuntaisia. Vuoputki on ikäänkuin kimppu kenttäviivoja tai täsmällisemmin alue, jonka vaipan läpi ei kulje yhtään kenttäviivaa. Olkoot S_1 ja S_2 vuoputken päät. Tällöin vuoputken tilavuuden yli laskettu integraali on

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' dS_1 = \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0 \quad (6.34)$$

missä \mathbf{n} ja \mathbf{n}' ovat magneettikentän suuntaan laskettuja putken päiden normaalivektoreita. Magneettivuo pitkin vuoputkea on siis vakio.

Huom. Ylläoleva tulos koskee vain \mathbf{B} -kenttää eikä välttämättä päde \mathbf{H} -kentälle:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{H} dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dV = \int_V \rho_M dV \quad (6.35)$$

Vuoputken voi siis tulla magneettikentän voimakkuutta, mikäli väliaineen magneettisten napojen tiheys on äärellinen eli aineella on nollasta poikkeava napavoimakkuus.

6.6 Reuna-arvo-ongelmia magneettikentässä

Magneettiset reuna-arvo-ongelmat ovat yleensä monimutkaisempia kuin sähköstatiikan vastaavat ongelmat. Sähkövirtojen olemassaolo, epätasainen magnetoituminen tai epälineaarinen rakenneyhtälö edellyttävät Laplaceen yhtälöä monimutkaisempien yhtälöiden ratkomista ja hankaloittavat reunaehdoja. Rajoitutaan tässä yksinkertaisiin tilanteisiin.

Virrattomuus ($\nabla \times \mathbf{H} = 0$) tekee mahdolliseksi magneettikentän esittämisen skalaaripotentialin gradienttina $\mathbf{H} = -\nabla \psi$. Jos lisäksi aine on magneettisesti ainakin likimain lineaarista eli $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ja tasaisesti magnetoitunut ($\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$), niin $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ja pääsemme ratkaisemaan Laplaceen yhtälöä

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (6.36)$$

Magnetoituva pallo tasaisessa magneettikentässä

Tämä ongelma on periaatteessa sama kuin luvun 3.5 eristepallo tasaisessa ulkoisessa sähkökentässä. Lausumalla ψ vyöhykeharmonisten funktioiden avulla ja käyttämällä reunaehtoja saadaan (HT) magneettikentälle lausekkeet pallon sisällä

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \mathbf{e}_z = \text{vakio} \quad (6.37)$$

ja pallon ulkopuolella

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{e}_z + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \quad (6.38)$$

missä \mathbf{e}_z on ulkoisen magneettikentän suuntainen, koordinaatiston origo on pallon keskipisteessä ja kulma θ on poikkeama z -akselilta.

Tässä on syytä huomata, että nimenomaan \mathbf{B} -kenttä vastaa rakenteeltaan sähköstatiikan \mathbf{D} -kenttää.

Tasaisesti magnetoituneen pallon kenttä tyhjässä

Olkoon pallon säde a ja magnetoituma vakio $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$. Tilanne on jälleen aksiaalisymmetrinen, joten magneettinen skalaaripotentiali pallon ulkopuolella (1) ja sisällä (2) voidaan kirjoittaa (ks. luku 2.9.2)

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (6.39)$$

$$\psi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) \quad (6.40)$$

Erona aiempiin vastaaviin laskuihin on, että nyt ei ole taustan kenttää, joten ulkokentässä kaikki r :n positiiviset potenssit on jätettävä pois. Sisäkentässä ei voi puolestaan olla negatiivisia potensseja, jotta ratkaisu olisi äärellinen pallon keskipisteessä. Reunalla $r = a$

$$H_{1\theta} = H_{2\theta} \quad (6.41)$$

$$B_{1r} = B_{2r} \quad (6.42)$$

\mathbf{H} :n reunaehdosta seuraa yksinkertaisesti

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \quad (6.43)$$

\mathbf{B} -kentässä on mukana myös magnetoituma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.44)$$

ja tämän jatkuvuus reunalla edellyttää

$$-\mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \mu_0 M \cos \theta \quad (6.45)$$

Sijoittamalla näihin ψ :n lausekkeet saadaan yhtälöt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) P_n(\cos \theta) = \text{vakio} \quad (6.46)$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) [C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] \quad (6.47)$$

$$-\mu_0 M \cos \theta = 0$$

P_n :t ovat ortogonaalisia funktioita, joten jokaisen n -termin summauksissa täytyy toteutua erikseen. Kun $n = 0$, saadaan ehdot

$$C_{10} a^{-1} - A_{20} = \text{vakio} \quad (6.48)$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} = 0 \quad (6.49)$$

Siis $C_{10} = 0$ ja myös A_{20} voidaan valita nolllaksi ilman, että sillä on vaikutusta kenttiin \mathbf{B} tai \mathbf{H} . Termeille $n = 1$ on voimassa

$$C_{11} a^{-3} - A_{21} = 0 \quad (6.50)$$

$$2C_{11} a^{-3} + A_{21} - M = 0 \quad (6.51)$$

jonka ratkaisuna on $C_{11} = Ma^3/3$; $A_{21} = M/3$.

Kun $n \geq 2$ yhtälöt toteutuvat ainoastaan kertoimilla $C_{1n} = A_{2n} = 0$. Ongelma on ratkaistu. Potentiaalit ovat

$$\psi_1(r, \theta) = \frac{1}{3} M (a^3/r^2) \cos \theta \quad (6.52)$$

$$\psi_2(r, \theta) = \frac{1}{3} M r \cos \theta \quad (6.53)$$

ja \mathbf{H} -kentät saadaan näiden gradientteina

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} M (a^3/r^3) [2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \quad (6.54)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} M \mathbf{e}_z \quad (6.55)$$

Ulkoinen \mathbf{B} -kenttä on $\mu_0 \mathbf{H}_1$. Koska pallon magnetoituma $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z$, jää pallon sisäiseksi \mathbf{B} -kentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M \mathbf{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \quad (6.56)$$

joka on siis vastakkaissuuntainen \mathbf{H} -kentälle. Ongelman voisi ratkaista myös luvussa 6.2 esitetyllä tavalla skalaaripotentialin avulla, jolloin tehtäväksi

jää magnetoituman integroiminen. Tasaisesti magnetoitunut pallo on analoginen tasaisesti polarisoituneen pallon kanssa.

Huom. Vaikka Maxwellin yhtälöt ovat yksinkertaisemmat tyhjäkentille \mathbf{E} ja \mathbf{B} , jolloin ei tarvita rakenneyhtälöitä, käytännön magneettisissa ongelmissa \mathbf{H} -kenttä on usein yksinkertaisempi tarkasteltava.

Luku 7

Sähkömagneettinen induktio

Oppimateriaali RMC luku 11 ja CL 8.1; esitiedot KSII luku 5.

Toistaiseksi olemme tarkastelleet vain ajasta riippumattomia kenttiä. Ne voi mainiosti kuvitella kenttäviivojen avulla, joten emme ole törmänneet mihinkään, mikä puolustaisi Feynmanilta lainattua toteamusta kurssin alussa. Tässä luvussa alamme tarkastella ajasta riippuvia kenttiä ja siirtyä alueelle, jossa mielikuvitus joutuu paljon kovemmalle koetukselle.

7.1 Faradayn laki

Sähköstaattiselle kentälle pätee $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Mikäli kenttä ei ole staattinen ja siten integraali ei ole nolla, silmukkaan C sanotaan indusoituvan **sähkömotorisen voiman** (smv)

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.1)$$

joka havaintojen mukaan vastaa silmukan läpäisevän magneettivuon muutosta

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.2)$$

Tämä on **Faradayn induktiolaki**. Se ei riipu mitenkään siitä, kuinka magneettivuon tiheys itsessään muuttuu. Lain olemassaolo ei myöskään riipu fyysisen silmukan olemassaolosta, vaan pätee annettua reittiä C pitkin lasketulle integraalille. Faradayn laki on jälleen kokeellinen luonnonlaki, joka ei seuraa mistään muista luonnonlaeista.

Sähkömotorisen voiman yksikkö on sama kuin potentiaalieron eli voltti. Sähkömotorinen voima ei kuitenkaan ole minkään kahden pisteen välinen jännite, koska se lasketaan aina suljetun silmukan yli!

Koska Faradayn laki ei riipu kentän jakautumasta silmukan sisällä, voidaan silmukka ajatella kiinteäksi ja viedä aikaderivaatta vuointegraalin sisään, jolloin siitä tulee osittaisaikaderivaatta

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.3)$$

ja Stokesin lauseen mukaan

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.4)$$

Tämä on voimassa kaikille kiinteille pinnoille, joten Faradayn laki differentiaalimuodossa on

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.5)$$

joka on Maxwellin kolmas yhtälö.

Edellä oletettiin integrintisilmukka kiinteäksi. Faradayn lain integraalimuodossa \mathbf{E} on siis sähkökenttä silmukka-alkion $d\mathbf{l}$ kohdalla koordinaatistossa tai aineessa, jossa $d\mathbf{l}$ on levossa. Jos tarkastellaan liikkuvia silmukoita ja mahdollisesti liikkeen mukana muuttuvia silmukoita, liikkeen kanssa täytyy olla huolellinen. Magneettikentän kokonaismuutos havaitsijan koordinaatistossa riippuu sekä eksplisiittisestä aikamuutoksesta ($\partial/\partial t$) että muutoksesta liikkeen mukana ($\mathbf{V} \cdot \nabla$), missä $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ on väliaineen virtauskenttä havaitsijan koordinaatistossa. Silloin siis

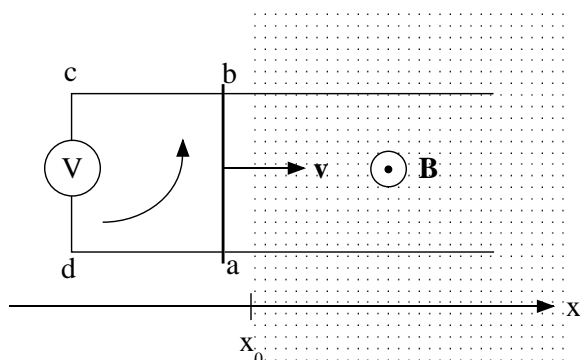
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (7.6)$$

Faradayn laissa oleva miinusmerkki ilmaisee **Lenzin lain**: “Induktiovirta vastustaa muutosta, joka sen aiheuttaa”. Induktiovirta kuluttaa energiaa. Tämä energia on saatava systeemiltä, joka aiheuttaa induktion. Tämä merkitsee, että induktion aiheuttajan on tehtävä työtä induktiovirran vastavaikutuksen voittamiseksi. Lenzin laki on usein kätevä tapa määrittää indusoituvan virran suunta, joka saattaa olla vaikea johtaa aikaderivaatan ja roottorin sisältävästä abstraktin näköisestä Faradayn laista.

Faradayn lain avulla voidaan ymmärtää esimerkiksi **betatronin** toiminta. Olemme todenneet, että vain sähkökenttä voi tehdä työtä varattuun hiukkaseen. Betatronissa muuttuva magneettikenttä indusoi sähkökentän, joka kiihdyttää hiukkasia. Lorentzin voiman lauseke ei tietenkään rajoitu staattisiin sähkö- ja magneettikenttiin.

Esimerkki: Liikkuva johdin magneettikentässä

Tarkastellaan yksinkertaisena, mutta toivottavasti ajatuksia herättävänä esimerkkinä magneettikentässä liikkuvaa johdetankoa. Oletetaan, että johdetanko ab (pituus L) liikkuu vakionopeudella \mathbf{v} pitkin johdinkiskoja ja saapuu



Kuva 7.1: Magneettikenttään saapuva kiskoilla liikkuva johdintanko.

alueeseen $x > x_0$, jossa on vakiomagneettikenttä \mathbf{B} kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan (kuva 7.1). Asetetaan välille cd suuriresistanssinen jännitemittari (silmukassa $abcd$ ei siis kulje virtaa).

Kentässä olevan johdetangon vapaisiin varauksiin vaikuttaa Lorentzin voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.7)$$

Voiman magneettinen osa ajaa positiivisia ja negatiivisia varauksia tangon eri päihin. Tämä aiheuttaa sähkökentän, joka pyrkii vastustamaan varausseparaatiota ja syntyy tasapainotilanne, jossa sähkökenttä suuntautuu pisteestä a kohti pistettä b ja kentän suuruus on

$$E = vB \quad (7.8)$$

Tangon päiden a ja b välillä on jännite

$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = EL = BLv \quad (7.9)$$

Tätä sanotaan liikkeen indusoimaksi potentiaalieroksi (joskus epätasaisesti liikkeen indusoimaksi sähkömotoriseksi voimaksi).

Edellä ei tarvittu induktiolakia ollenkaan, vaan mikrofysikaalinen tarkastelu oli riittävä. Voimme toisaalta laskea magneettivuon silmukan $abcd$ läpi, kun johdetanko kulkee magneettikentässä. Valitsemalla integroimisinnan eli silmukan tason normaalivektori magneettikentän suuntaiseksi saadaan vuon muutosnopeudeksi

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dA}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (7.10)$$

joten Faradayn lain mukaan piiriin indusoituu smv

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \quad (7.11)$$

Merkki kertoo, että sähkömotorinen voima vaikuttaa kuvaan merkittyä positiivista kiertosuuntaa vastaan. Jos virtapiiri oikosuljetaisiin jännitemittarin kohdalta, niin induktiovirta kulkisi myötäpäivään. Induktiovirta pyrkii siis pienentämään magneettivuon muutosta silmukan läpi.

Ajatellaan sitten, että neliösilmutta (sivu L) saapuu magneettikenttään nopeudella \mathbf{v} . Oikosuljetaan piiri, jolloin virta voi kulkea siinä. Silmukan tullessa magneettikenttään vuon muutos on vakio ($-Blv$), ja piiriin syntyvän myötäpäivään kulkevan induktiovirran suuruus on Blv/R (R on piirin resistanssi). Kun silmutta on kokonaan magneettikentän sisällä, vuo ei enää muutu ja virta lakkaa kulkemasta. Kannattaa huomata, että induktioilmiö voitaisiin tässä tapauksessa selittää myös Lorentzin voiman avulla.

Silmukan tullessa kenttään sivuun ab kohdistuu nopeudelle vastakkaisuuntainen voima \mathbf{F} suuruudeltaan BLI , joten silmukan kiskomiseen tarvittava teho on $Fv = BLIv$. Tämä on täsmälleen yhtä suuri kuin virtasilmukan ohmiset tehohäviöt.

Oletetaan nyt, että neliösilmutta on kokonaan alueessa $x > x_0$ eikä liiku. Muutetaan magneettikenttää silmukan kohdalla ajan funktiona: $B(t) = Bvt/L$. Tällöin magneettivuon silmukan läpi on $\Phi(t) = BvLt$, jolloin vuon muutos on sama kuin edellä liikkuvan tangon tapauksessa. Ratkaisevana erona edelliseen tilanteeseen on se, ettei induktioilmiötä voida nyt selittää Lorentzin voiman avulla ($\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$).

Magneettikenttään saapuvan silmukan tilannetta voitaisiin tarkastella myös silmukan mukana liikkuvan tarkkailijan kannalta. Hänen mielestään magneettisia voimia ei ole, joten taas tarvitaan induktiolakia selittämään sähkömotorisen voiman syntyminen.

Se, että liikkeen indusoima potentiaaliero on yhtä suuri kuin muuttuvan magneettikentän aiheuttama sähkömotorinen voima, ei ole itsestään selvää. Tämän ekvivalenssin selvittäminen oli keskeisessä osassa, kun Einstein kehitti suppeamman suhteellisuusteorian vuonna 1905. Liikkuviissa koordinaatistoissa oikean integroimistien valinta vuon muutoksen laskemiseksi ei ole aina helppoa. Koska Maxwellin yhtälöt kuitenkin osoittautuvat Lorentzinvariantteiksi, Faradayn laki differentiaalimuodossa ja Lorentzin voiman lauseke pätevät **kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa**.

7.2 Itseinduktanssi

Tarkastellaan eristettyä virtasilmutta, jossa magneettivuon on silmukan itsensä aiheuttama. Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettikenttä riippuu

lineaarisesti silmukassa kulkevasta sähkövirrasta I . Kiinteässä muuttumattomassa silmukassa vuon muutos johtuu vain virran muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (7.12)$$

Virran ja vuon muutoksen välistä verrannollisuuskerrointa

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (7.13)$$

kutsutaan silmukan **itseinduktanssiksi**. Jos vuo on suoraan verrannollinen virtaan, $L = \Phi/I$. Virran muutos indusoi sähkömotorisen voiman

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.14)$$

Koska sähkömotorisen voiman SI-yksikkö on voltti, niin induktanssin SI-yksikkö on Vs/A \equiv H eli henry. Itseinduktio ilmenee esimerkiksi siten, että virtapiireissä virta ei koskaan kytkeydy tai katkea täysin hetkellisesti. Itseinduktio korostuu, jos piirissä on käämi, koska silloin piirin induktanssi on käytännössä sama kuin käämin induktanssi.

Toroidaalisen kelan itseinduktanssi

Muodostetaan kela käämimällä johdinlankaa N kierrosta toruksen ympäri (poikkileikkauksen ala A). Itseinduktanssiin vaikuttaa sekä kela itse että silmukkaan virtaa syöttävä johteen ulkoinen osa. Oletetaan, että ulkoinen osa on koaksiaalikaapeli, joka ei aiheuta merkittävää ulkoista kenttää. Ampèren kiertosääntö antaa magneettikentäksi toruksen sisällä

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \quad (7.15)$$

missä l on toruksen keskimääräinen pituus (luku 5.3). Magneettivuo jokaisen yksittäisen kierroksen läpi on

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N I A}{l} \quad (7.16)$$

ja kaikkien kierrosten yhteenlaskettu vuo on

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I A}{l} \quad (7.17)$$

josta saadaan induktanssi

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (7.18)$$

7.3 Keskinäisinduktanssi

Tarkastellaan sitten n kappaletta erillisiä silmukoita. Kirjoitetaan kaikkien silmukoiden aiheuttama yhteenlaskettu vuo silmukan i läpi muodossa

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (7.19)$$

Tähän silmukkaan indusoituu smv

$$\mathcal{E}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \quad (7.20)$$

Jos kaikki silmukat ovat kiinteitä, kunkin silmukan osuus Φ_{ij} riippuu vain siinä kulkevan virran muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \quad (7.21)$$

Kertoimia

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \quad i \neq j \quad (7.22)$$

kutsutaan silmukoiden i ja j väliseksi keskinäisinduktansseiksi.

Jos väliaine on magneettisesti lineaarinen, M_{ij} :t ovat vakioita. Sähkömotorisen voiman lauseke sisältää myös silmukan i itseinduktanssin $L_i = M_{ii}$. Keskinäisinduktanssi voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen virtojen kulkusuunnista silmukoissa. Tarkastellaan kahta kiinteää silmukkaa lineaarisessa väliaineessa (yksinkertaisuuden vuoksi $\mu = \mu_0$). Tällöin

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (7.23)$$

Lasketaan magneettikenttä Biot'n ja Savartin lailla ja integroidaan siitä magneettivuo

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left[\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] \cdot \mathbf{n} dS_2 \quad (7.24)$$

Käyttämällä kaavaa

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (7.25)$$

saadaan

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left[\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right] \cdot \mathbf{n} dS_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \end{aligned} \quad (7.26)$$

jota kutsutaan **Neumannin kaavaksi**.

Neumannin kaava ei ole kovin hyödyllinen induktanssien laskemisessa, mutta se osoittaa, että keskinäisinduktanssi on puhtaasti silmukoiden geometriasta johtuva suure ja siten silmukoiden itsensä ominaisuus. Silmukoissa kulkeva sähkövirta ei vaikuta lineaarisessa tapauksessa induktanssiin. Lisäksi keskinäisinduktanssi on symmetrinen silmukoiden vaihtamisen suhteen ($M_{12} = M_{21}$), mikä vaikuttaa ensi näkemältä hieman yllättävältä.

Keskinäisinduktanssin laskeminen on käytännössä hankalaa, mutta mittaaminen varsin yksinkertaista: syötetään piiriin 1 tunnettu virta ja mitataan sen indusoima smv piirissä 2. Helpointa tämä on toteuttaa sinimuotoisen vaihtovirran avulla.

Kelojen kytkennöistä

Virtapiireissä on usein keloja, jotka on kytketty joko sarjaan tai rinnakkain. Täysin häviöttömän kelan rakentaminen on vaikeaa ja käytännössä niillä on aina myös sisäinen resistanssi. Tarkastellaan kahta sarjaan kytkettyä kela, joiden itseinduktanssit ovat L_1 ja L_2 , resistanssit R_1 ja R_2 ja keskinäisinduktanssi M . Olkoon kytkennän jännite V . Virran muuttuessa kumpaankin kelaan indusoituu smv, jolloin

$$V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I \quad (7.27)$$

josta saadaan

$$V = (R_1 + R_2)I + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{dI}{dt} \quad (7.28)$$

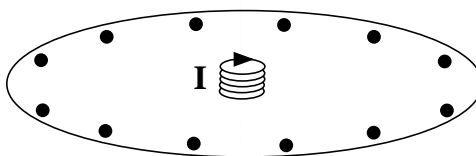
eli tilanne vastaa efektiivistä resistanssia $(R_1 + R_2)$ yhdessä efektiivisen induktanssin $(L_1 + L_2 + 2M)$ kanssa.

Kahdelle rinnakkain kytketylle kelalle vastaavia efektiivisiä resistansseja ja induktansseja ei voida esittää yksinkertaisina funktioina suureista L_1 , L_2 , R_1 ja R_2 , koska vastus-kela-parien läpi kulkee eri sähkövirta. Jos resistanssit ovat niin pieniä, että ne voidaan jättää huomiotta, saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} V &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V &= L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned} \quad (7.29)$$

Eliminoimalla ensin dI_1/dt ja sitten dI_2/dt saadaan kaksi yhtälöä

$$\begin{aligned} V(L_2 - M) &= (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt} \\ V(L_1 - M) &= (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (7.30)$$



Kuva 7.2: Levy, jonka keskellä kulkevassa käämissä kulkee tasavirta I . Reunalla on tasaisin välein varattuja palloja.

Laskemalla nämä yhteen saadaan lopulta määritetyksi efektiivinen induktanssi

$$V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \quad (7.31)$$

Induktanssit ovat tärkeitä vaihtovirtapiireissä, joita emme varsinaisesti käsittele tällä kurssilla. Vaihtovirrat on kuitenkin hyödyllistä kerrata vaikkapa KSII:n luvusta 6. Myös RMC:n luku 13 on oivallinen johdatus asiaan.

7.4 Pähkinä purtavaksi

Palataan lopuksi perusongelmien pariin (Feynman, osa 2, luku 17-4). Tarkastellaan levyä, joka pääsee pyörimään akselinsa ympäri (kuva 7.2). Keskellä on käämi, jossa pieni paristo pitää yllä tasavirtaa. Levyn reunalla on tasainen varausjakauma, esimerkiksi samanlaisia varattuja palloja. Oletetaan, että levy ei tässä tilanteessa pyöri. Oletetaan sitten, että virta käämissä katkeaa äkillisesti ilman ulkopuolista vaikutusta. Alkaako levy pyöriä?

Magneettikentän heikkeneminen indusoi vähäksi aikaa sähkökentän. Geometrian perusteella kenttäviivat ovat ympyröitä, joiden keskipiste on levyn akselilla. Varauspalloihin kohdistuva voima aiheuttaa silloin vääntömomentin, jonka takia levy alkaa pyöriä.

Toisaalta laitteiston liikemäärämomentti ennen virran katkaisua on nolla. Siihen ei kohdistu ulkoisia voimia, joten liikemäärämomentin säilymislain perusteella levy ei ala pyöriä.

Jos ensimmäinen vastaus on oikea, miten käy liikemäärämomentin säilymislain? Jos taas jälkimmäinen selitys pätee, niin sovellettiinko induktiolakia väärin?

Luku 8

Magneettinen energia

Oppimateriaali RMC Luku 12 ja CL 7.3; esitiedot KSII luvut 4 ja 5.

Luvussa 4 todettiin, että staattiseen sähkökenttään liittyy tietty energia. Näin on myös magneettikentän laita, sillä Faradayn lain mukaan magneettikentän muuttaminen aiheuttaa muutosta vastustavan voiman ja siten magneettikentän luominen edellyttää työtä.

8.1 Kytkeytyneiden virtapiirien energia

Tarkastellaan yksinkertaista virtasilmukkaa, jossa kulkee virta I ja jonka vastus on R . Liitetään virtapiiriin jännitelähde V . Tällöin

$$V + \mathcal{E} = IR \quad (8.1)$$

missä \mathcal{E} on virtasilmukkaan induoituva smv. Jännite tekee työtä siirtämällä varauksia silmukassa. Differentiaalisen varauksen $dq = I dt$ osalta työ on

$$V dq = VI dt = -\mathcal{E}I dt + I^2 R dt = I d\Phi + I^2 R dt \quad (8.2)$$

Termi $I^2 R dt$ antaa resistiivisen tehon hävikin lämmöksi (Joulen lämmitys). Termi $I d\Phi$ on induoitunutta sähkömotorista voimaa vastaan tehty työ, joka tarvitaan magneettikentän muuttamiseen:

$$dW_b = I d\Phi \quad (8.3)$$

missä alaindeksi b viittaa ulkoisen jännitelähteen (esim. pariston) tekemään työhön.

Tarkastellaan sitten systeemiä, joka koostuu n kappaleesta virtapiirejä:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i \quad (8.4)$$

Oletetaan, että kaikki vuonmuutokset ovat peräisin systeemin silmukoista, jolloin

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (8.5)$$

Oletetaan lisäksi, että silmukat ovat jäykkiä ja paikallaan, jolloin energianmuutoksiin ei liity mekaanista työtä. Tällöin dW_b on yhtäsuuri kuin magneettisen energian muutos dU . (Virrat oletetaan myös riittävän hitaasti muuttuviksi, jolloin ei tarvitse ottaa huomioon säteilyhäviöitä.)

Rajoitetaan tarkastelu yksinkertaiseen väliaineeseen, jossa magneettivuon ja virran välinen suhde on lineaarinen. Lasketaan virtapiirisysteemin energia lähtien tilasta, jossa kaikille virroille $I_i = 0$. Väliaineen lineaarisuudesta johtuen lopullinen magneettinen energia ei riipu tavasta, jolla tila on saavutettu. Näin ollen kaikkien silmukoiden virtaa voidaan kasvattaa nolasta lopputilaan samassa tahdissa eli joka hetki $I'_i = \alpha I_i$, missä α kasvaa $0 \rightarrow 1$. Tällöin $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$ ja systeemin **magneettinen energia** on

$$U = \int dW_b = \int_0^1 \sum_{i=1}^n I'_i \Phi_i d\alpha = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (8.6)$$

Tämä voidaan myös ilmaista summana silmukoiden yli

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \quad (8.7)$$

josta saadaan suoraan yhdelle silmukalle ($M_{11} = L_1 = L =$ silmukan itseinduktanssi)

$$U = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (8.8)$$

Tämän voi rinnastaa kondensaattorin energiaan $Q^2/(2C)$, joka ilmaisee kondensaattorin sähkökenttään varastoituneen energian. Kahdelle silmukalle saadaan

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (8.9)$$

missä otettiin huomioon symmetria $M_{12} = M_{21} = M$. Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että $L_1 L_2 \geq M^2$.

8.2 Magneettikentän energiatiheys

Tarkastellaan ylläolevaa tilannetta magneettikentän näkökulmasta. Oletetaan väliaine edelleen lineaariseksi ja virtapiirit yksinkertaisiksi silmukoiksi. Tällöin magneettivuoksi saadaan Stokesin lauseen avulla

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (8.10)$$

joten magneettinen energia on

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (8.11)$$

siirrytään sitten tilanteeseen, missä sähkövirta on tilavuusvirta \mathbf{J} ja C_i on suljettu lenkki johtavassa väliaineessa. Tilannetta voi ajatella suurena joukkona lähellä toisiaan olevia silmukoita, jolloin $I_i d\mathbf{l}_i \rightarrow \mathbf{J} dV$ ja

$$\sum_i \oint_{C_i} \rightarrow \int_V$$

eli

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (8.12)$$

Sähköstatiikassa energia lausuttiin vastaavasti varaustiheyden ja potentiaalilin integraalina (luku 4.2).

Koska $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ja $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, niin divergenssiteoreemaa käyttämällä saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.13)$$

Fysikaalisesti järkevä oletus on, että virtasilmukat eivät ulotu äärettömyyteen, joten pinta S voidaan siirtää kauas niiden ulkopuolelle. Kenttä \mathbf{H} heikkenee vähintään kuten $1/r^2$ ja vektoripotentiaali \mathbf{A} vähintään kuten $1/r$, mutta pinta kasvaa vain kuten r^2 . Siispä pintaintegraali häviää kuten $1/r$ tai nopeammin r :n kasvaessa rajatta. Tilavuusintegraali voidaan siis ottaa koko avaruuden yli ja tulokseksi tulee

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (8.14)$$

Samoin kuin sähköstaattisen energian tapauksessa voidaan määritellä **magneettinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (8.15)$$

Tulos pätee siis **lineariselle** magneettiselle väliaineelle. Mikäli väliaine on lisäksi isotrooppista, saadaan

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (8.16)$$

Huom. Edellä tarkasteltiin stationaarista tilannetta. Sähkömagneettisen kentän energia yleisessä ajasta riippuvassa tilanteessa käsitellään luvussa 9.

Esimerkki: Koaksiaalikaapelin energiatiheys

Tarkastellaan koaksiaalikaapelia, jonka keskellä on a -säteinen johdin (matemaattisesti sylinteri), sen ulkopuolella sylinterisymmetrisesti eristekerros välillä $a \leq \rho \leq b$, jonka ulkopuolella on jälleen johtava sylinterisymmetrinen kerros $b \leq \rho \leq c$. Oletetaan, että kaikkialla $\mu = \mu_0$. Kulkekoon sisäjohtimessa virta I ja ulkojohtimessa virta $-I$. Suoran johtimen aiheuttama magneettikenttä on Amperen kiertosäännön perusteella

$$\mathbf{B} = B_\theta(\rho) \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I(\rho)}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\theta \quad (8.17)$$

Tarkastellaan sisempää johdinta ($0 \leq \rho \leq a$). Tällöin $I(\rho)/I = (\pi\rho^2)/(\pi a^2)$, joten

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \quad (8.18)$$

ja magneettinen energiatiheys on

$$u_a = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \quad (8.19)$$

Sisemmän johteen yli integroitu energia l :n pituisella matkalla on

$$U_a = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi} \quad (8.20)$$

Johtimien välissä $a \leq \rho \leq b$ kenttä määräytyy sisemmän johtimen kokonaisvirrasta ja vastaavat tulokset ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta b} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ u_b &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2} \\ U_b &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (8.21)$$

missä siis kokonaisenergia tarkoittaa johtimien välisessä alueessa olevaa kokonaisenergiaa. Uloimmassa johtimessa $b \leq \rho \leq c$ vastaavat lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta c} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2}{\rho} - \rho \right) \\ u_c &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2} \left(\frac{c^4}{\rho^2} - 2c^2 + \rho^2 \right) \\ U_c &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2} \left[c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

ja kokonaisenergia on jälleen kyseisen välin yli integroitu energiatiheys. Lopulta koaksiaalikaapelin ulkopuolella kenttä on nolla, joten energiakin on siellä nolla.

8.3 Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin

Siirretään virtapiirijärjestelmän yhtä silmukkaa matka $d\mathbf{r}$. Oletetaan, että silmukoissa kulkevat virrat säilyvät ennallaan. Tällöin siirroksessa tehty työ on

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.23)$$

Työ koostuu kahdesta osasta

$$dW = dW_b - dU \quad (8.24)$$

missä dU on magneettisen energian muutos ja dW_b on ulkoisten lähteiden tekemä työ, jotta virrat säilyvät ennallaan.

Eliminoidaan dW_b olettamalla silmukat jälleen jäykiksi ja lineaarinen väliaine. Magneettisen energian muutos on

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i \quad (8.25)$$

Toisaalta

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i \quad (8.26)$$

joten

$$dW_b = 2 dU \quad (8.27)$$

ja

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.28)$$

eli voima saadaan energian gradienttina olettaen virrat vakioiksi

$$\mathbf{F} = \nabla U \Big|_I \quad (8.29)$$

Käytännössä tilanne on usein sellainen, että virtapiirin liike rajoittuu kiertymiseen jonkin akselin ympäri. Tällöin

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (8.30)$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on magneettinen vääntömomentti ja $d\boldsymbol{\theta}$ on kiertymän kulmaelementti. Vääntömomentti akselin i suhteen on siten

$$\tau_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right)_I \quad (8.31)$$

Tarkasteltu tilanne on siis samantapainen kuin luvussa 4.5 käsitelty järjestely, jossa johdesysteemi pidetään vakiopotentialissa ulkoisen jännitelähteen avulla. Joissain tapauksissa virtapiirien läpi kulkeva magneettinen vuo voidaan puolestaan ajatella vakioiksi. Tällaisiin tilanteisiin joudutaan tarkasteltaessa (lähes) äärettömän hyvin johtavia väliaineita kuten suprajohteita tai

täysin ionisoitunutta harvaa plasmaa. Tällöin mikään ulkoinen lähde ei tee työtä eli $dW_b = 0$ ja

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU \quad (8.32)$$

Nyt voiman ja vääntömomentin komponentit saadaan derivoimalla U :ta pitäen Φ vakiona, mikä vastaa sähköstatiikassa vapaiden johteiden systeemiä.

Käytännön sovellutuksena magneettisesta vääntömomentista voi mainita vaikka avaruusaluksen asennonsäätöjärjestelmän. Maapallon magneettikentän vaikutuksen alaisena olevaan satelliittiin rakennetaan kelajärjestelmä. Kun satelliittia halutaan kääntää, ajetaan keloihin sellaiset virrat, että satelliitti kääntyy haluttuun kulmaan magneettikenttään nähden. Menetelmän etuna on se, että operaatio voidaan tehdä aurinkoenergian avulla, haittana taas kentän pienuudesta johtuva vääntömomentin heikkous ja siten operaation hitaus.

Kahden virtasilmukan välinen voima

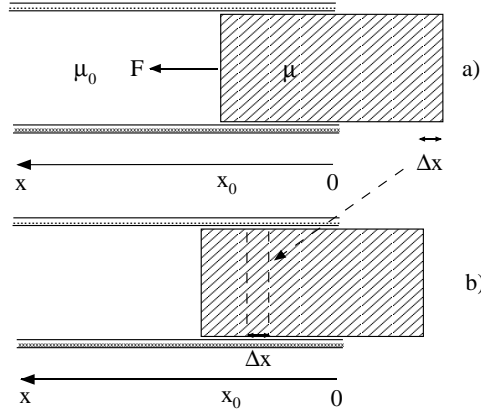
Palataan sitten aivan magnetostatiikan alkuun, missä kerrottiin Ampèren empiirisestä lausekkeesta voimalle kahden virtasilmukan välillä (yhtälö 5.23). Lasketaan sama tulos tämän luvun keinoin. Virtapiiriin 1 aiheuttama voima virtapiiriin 2 on

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_2 M \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \end{aligned} \quad (8.33)$$

missä keskinäisinduktanssi M on ilmaistu von Neumannin kaavan avulla (ks. luku 7). Ensi silmäyksellä näyttää kuin olisimme saaneet eri tuloksen kuin piti. Näin ei kuitenkaan ole, minkä osoittaminen jääköön harjoitustehtäväksi.

Rautatanko solenoidin sisällä

Luvussa 4 tarkasteltiin levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin kohdistuvaa voimaa. Tarkastellaan nyt solenoidin sisällä olevaa rautatankoa, jonka poikkipinta-ala on A ja permeabiliteetti μ . Olkoon solenoidin pituus l ja olkoon sitä kierretty N kierrosta johteella, jossa kulkee vakiovirta I . Vedetään tankoa ulos solenoidista kunnes siitä on enää puolet sisällä ja lasketaan voima, joka yrittää vetää tankoa takaisin (kuva 8.1).



Kuva 8.1: Solenoidiin työnnettyyn rautasauvaan vaikuttava voima.

Ongelma olisi itse asiassa aika vaikea, jos kysyttäisiin alkuperäisen tai lopullisen tilanteen todellista magneettista energiaa, koska silloin olisi huomioitava reunojen vaikutukset. Koska voima on energian gradientti, sen määrittämiseksi riittää tarkastella kahden eri tilan eroa. Tarkastellaan oikein kuvan mukaista lyhyttä siirrosta. Kuvien a) ja b) välinen ero on, että pituusalkio Δx on siirretty kentän ulkopuolisesta osasta solenoidin sisään, kun taas hankalan reunan kohdalla kaikki näyttää samalta molemmissa kuvissa. Koska \mathbf{H} -kenttä on lähes pitkittäinen alueessa Δx ja koska \mathbf{H} -kentän tangentialikomponentti on jatkuva sauvan sylinterinmuotoisen reunan yli, voidaan magneettinen energia laskea lausekkeesta

$$U = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dV \quad (8.34)$$

missä \mathbf{H} on vakio sauvan sisä- ja ulkopuolella, koska I on vakio. Siirroksen jälkeen energia on

$$\begin{aligned} U(x_0 + \Delta x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{2} \int_{A\Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dV \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A \Delta x \end{aligned} \quad (8.35)$$

Koska voima on energian gradientti, se voidaan arvioida tästä

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2} \chi_m \mu_0 H^2 A \quad (8.36)$$

Voima osoittaa x :n positiiviseen suuntaan eli vetää sauvaa solenoidiin. Tilanteesta, jossa magneettivuo Φ on vakio, on yksinkertainen esimerkki harjoituksissa.

Luku 9

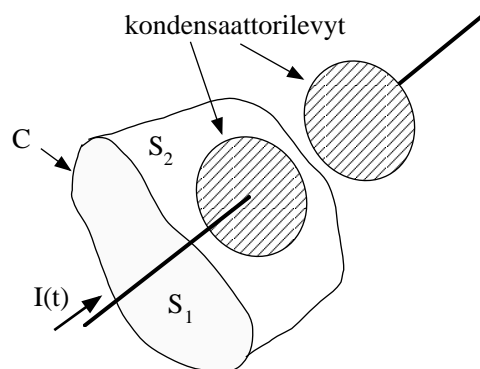
Maxwellin yhtälöt

Oppimateriaali RMC luku 16 ja CL luvut 8–9; esitiedot KSII luku 7 ja KSIII luku 5.

Nyt meillä on koossa elektrodynamiikan peruspilarit sillä tasolla, jolla ne tunnettiin 1860-luvun alussa. Maxwell huomasi yhtälöissä piilevän teoreettisen ongelman: Mitä tapahtuu, jos varaustiheys ja siten sähkökenttä muuttuvat ajallisesti? Ampèren laki on voimassa vain staattiselle systeemille ja ottamalla siitä divergenssi $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}$ nähdään, että $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Varaustiheyden muuttuessa ajallisesti pitäisi kuitenkin **jatkuvuusyhtälön** $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ olla voimassa.

9.1 Siirrosvirta

Tarkastellaan kuvan 9.1 mukaista ajatuskoetta, jossa varataan kondensaattoria sähkövirralla I . Ampèren lain mukaan sähkövirta on silmukkaa C



Kuva 9.1: Ampèren laki varattaessa kondensaattoria

pitkin laskettu integraali

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = I \quad (9.1)$$

missä S_1 on pinta, jonka läpi virta I kulkee. Nyt kuitenkin mikään ei sano, missä silmukan C rajoittaman yhdesti yhtenäisen pinnan tulisi olla, joten pinnaksi pitäisi voida valita myös kondensaattorin levyjen välisen alueen kautta piirretty pinta S_2 , joka ei leikkaa virtaa missään ja

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (9.2)$$

Molemmat integraalit on laskettu matemaattisesti oikein, joten ongelman täytyy olla puutteellisesti ymmärrettyssä fysiikassa. Ratkaisu on siinä, että virta I tuo varausta kondensaattorin levyille eikä varaus poistu systeemistä samaan tahtiin. Virralla on siis divergenssiä pintojen S_1 ja S_2 rajaamassa tilavuudessa.

Tarkastellaan ongelmaa differentiaalimuodossa lähtien varauksen jatkuvuusyhtälöstä

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

Varaustiheys voidaan ilmaista Gaussin lain avulla

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (9.4)$$

joten jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.5)$$

Maxwellin oivallus oli korvata virrantiheys Ampèren laissa ylläolevalla sulku-lausekkeella ja tuloksena oli neljäs Maxwellin laeista

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.6)$$

jota voi hyvällä syyllä kutsua Ampèren ja Maxwellin laiksi. Termiä $\partial \mathbf{D} / \partial t$ kutsutaan **kentänmuutosvirraksi**, **kenttävirraksi** tai **siirrosvirraksi**.

Maxwellin idea siirrosvirrasta oli puhtaasti teoreettinen, sillä sen vaikutus on niin pieni, että mikään tuolloinen mittaus ei ollut ristiriidassa Ampèren lain kanssa. Siirrosvirta alkaa olla verrattavissa johtavuusvirtaan vasta, kun $\omega\epsilon/\sigma > 0.01$ eli johteiden tapauksessa taajuuksien on oltava erittäin korkeita. Eristeissä tilanne on toinen ja jo tavallisessa 50 Hz vaihtovirtapiirissä olevan kondensaattorin läpi kulkeva virta on siirrosvirtaa. Kondensaattorin sisäistä virtaa ei tosin useinkaan tarvitse tarkastella virtapiirianalyysissä.

Koska siirrosvirta tulee näkyviin vasta suurilla taajuuksilla, se liittyy sähkömagneettiseen aaltoliikkeeseen luonnollisella tavalla. Vuonna 1888 Heinrich Hertz todensi siirrosvirran olemassaolon tutkiessaan sähkömagneettisia aaltoja. Tämän jälkeen myös Maxwellin alunperin teoreettinen oivallus sai kokeellisen perustan.

Varauksen **jatkuvuusyhtälö** seuraa nyt Ampèren ja Maxwellin laista yhdessä Gaussin lain kanssa, joten sitä ei tarvitse ottaa mukaan erillisenä yhtälönä. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että varauksen **säilymlaki** seuraaisi Maxwellin yhtälöistä, vaan sitä, että annetussa tilavuudessa varauksen ajallinen muutos kompensoituu alueeseen tulevalle tai siitä poistuvalla sähkövirralla, koska varaus säilyy!

9.2 Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa koko Maxwellin yhtälöiden ryhmä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{9.7}$$

Tässä lähdetermeinä ovat **vapaat varaukset** ρ ja **vapaat virrat** \mathbf{J} . Sidotut varaukset ja virrat on kätkeyty kenttiin \mathbf{D} ja \mathbf{H} . Mikäli kyseessä on tyhjää monimutkaisempi väliaine, tarvitaan lisäksi rakenneyhtälöt $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

Yhtälöryhmä 9.7 ei kuitenkaan ole sen yleisempi tai rajoitetumpi kuin luvussa 1 esitetty ”tyhjömuodossa” kirjoitettu yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{9.8}$$

missä ρ ja \mathbf{J} kuvaavat **kaikkia** varauksia ja virtoja. Esitysmuoto 9.7 on joitain merkintöjä vaille sama, jossa Maxwell itse esitti yhtälönsä. Muotoa 9.8 voi kuitenkin pitää jossain mielessä perustavampana, koska se ei ota mitään kantaa mahdollisen väliaineen sähköisiin tai magneettisiin ominaisuuksiin.

Vaikka usein puhutaan neljästä Maxwellin yhtälöstä, yhtälöryhmässä 9.8 on kuitenkin 8 yhtälöä (2 skalaariyhtälöä ja 6 vektoriyhtälöiden komponenttia). Yhtälöryhmä on **lineaarinen**, joten yhtälöiden ratkaisuille pätee superpositioperiaate. Mikäli lähdeterminit ρ ja \mathbf{J} tunnetaan, on jäljellä 6 tuntematonta ja yhtälöryhmä riittää mainiosti \mathbf{E} :n ja \mathbf{B} :n määrittämiseen. Jos kuitenkin etsitään itseksistenttejä ratkaisuja, tuntemattomia on 10 kpl (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{J} ja ρ), joten systeemistä tarvitaan lisätietoa. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi Ohmin laki ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). Kuten aina differentiaaliyhtälöitä ratkotessa, myös **reunaehdot** täytyy määrätä oikein.

9.3 Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä

Tarkastellaan seuraavaksi SM-kentän energian ja liikemäärän säilymistä. Käsitellään asia hieman perusteellisemmin kuin RMC:ssä.

9.3.1 Poyntingin teoreema

Oletetaan väliaine yksinkertaiseksi (LIH). Sähköinen ja magneettinen energiatiheys ovat tuttuja käsitteitä luvuista 4 ja 8:

$$u_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (9.9)$$

$$u_m = \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (9.10)$$

Koska pyrimme tutkimaan näiden ajallista muutosta, etsimme Maxwellin yhtälöistä termejä, jotka sisältävät kenttien aikaderivaattoja. Ottamalla Ampèren ja Maxwellin lain skalaaritulo \mathbf{E} :n kanssa ja vähentämällä siitä Faradayn lain skalaaritulo \mathbf{H} :n kanssa päästään liikkeelle oikeaan suuntaan

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9.11)$$

Yhtälön vasen puoli voidaan vielä kirjoittaa muotoon $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. LIH väliaineen ϵ , μ ja σ eivät riipu ajasta, joten

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (9.12)$$

ja vastaavasti magneettikentälle. Näin olemme saaneet yhtälön

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9.13)$$

Yhtälön oikealla puolella on sähkömagneettisen energian ajallinen muutos sekä sähkömagneettisen kentän varauksille luovuttamaa energiaa kuvaava termi. Integroidaan yhtälö annetun tilavuuden yli

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (9.14)$$

Käyttämällä divergenssiteoreemaa tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV + \oint_{\partial V} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da \quad (9.15)$$

missä tilavuuden V reuna on nyt kirjoitettu sekaannusten välttämiseksi ∂V ja pintaelementti da .

Jos tilavuudessa V ei ole työtä tekevää sähkömotorista voimaa, yhtälön vasen puoli on aina negatiivinen ja vastaa sähkömagneettisen energian dissipoitumista Joulen lämmityksenä. Jos alueessa jokin prosessi tekee mekaanista työtä, voi yhtälön vasen puoli olla myös positiivinen ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} < 0$). Tällöin kyseessä on jonkinlainen generaattori, joka muuttaa mekaanista energiaa sähkömagneettiseksi energiaksi. Yhtälön oikealla puolella on puolestaan sähkömagneettisen energian ajallinen muutos ja termi, joka kuvaa vektorin

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (9.16)$$

vuota aluetta rajaavan pinnan läpi. Vektoria \mathbf{S} kutsutaan **Poyntingin vektoriksi** ja yhtälöä 9.15 **Poyntingin teoreemaksi**. Poyntingin teoreema ilmaisee **sähkömagneettisen kentän energian säilymlain**: SM-kentän energian muutos aikayksikössä on yhtä suuri kuin kentän varauksiin tekemän työn ja tarkasteltavaa varausjoukkoa rajaavan pinnan läpi virtaavan Poyntingin vuon summa.

Differentiaalinen Poyntingin teoreema voidaan kirjoittaa säilymlaki-muodossa

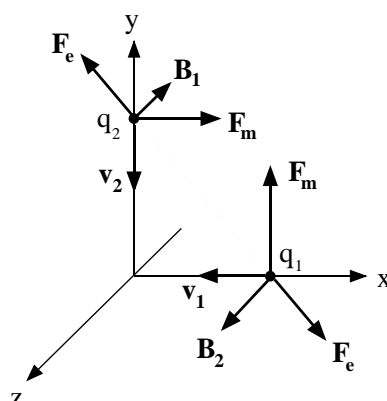
$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (9.17)$$

Tulkitsemalla \mathbf{S} energiavuoksi nähdään, että SM-kentän lähteinä tai nieluina on mekaaninen työ. Kokonaisenergia tietenkin säilyy eli

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{em} + u_{mech}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (9.18)$$

Poyntingin vektorin $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ tulkinta ”energian kuljettajana” johtaa erikoiselta vaikuttaviin tilanteisiin yksinkertaisissakin esimerkeissä, joista tasavirtajohdinta käsitellään harjoituksissa. Ei ole itsestään selvää, että Poyntingin vektorin ”oikea” lauseke on 9.16. Poyntingin teoreeman differentiaalimuodosta nähdään, että vektoriin \mathbf{S} voitaisiin lisätä roottorikenttä. Monimutkaisempiakin muunnelmia on olemassa, mutta silloin myös energiatiheyksien lausekkeita on muutettava. Oleellista on, että energian säilymlaki pätee. Pohjimmiltaan kyse on siitä, ettei sähkömagneettisen kentän energiaa voida paikallistaa.

Yllä oletettiin LIH väliaine. Isotropiaa ei varsinaisesti käytetty, mutta myös epäisotrooppisessa väliaineessa vektorin \mathbf{S} tulkinta voi olla ongelmallinen. Olennaista on jälleen, että säilymlaissa on $\nabla \cdot \mathbf{S}$, joten säilymlaki



Kuva 9.2: Rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymlakia?

on yhä voimassa. Suurempia monimutkaisuksia tulee ajassa tai paikassa epähomogeenisten sekä epälineaaristen väliaineiden kanssa. Ongelmat liittyvät usein SM-aaltoihin. Epähomogeenisuus aiheuttaa dispersiota eli aaltopakettit hajoavat matkan varrella ja epälineaarisuus taas jakaa energiaa eri taajuuksille. Eteentulevat ongelmat ovat sekä tärkeitä että mielenkiintoisia, mutta tämän kurssin ulkopuolella.

9.3.2 Maxwellin jännitystensori

Tarkastellaan kuvan 9.2 kaltaista tilannetta. Kaksi samanmerkkistä varausta (q_1 ja q_2) liikkuu negatiivisten x - ja y -akselien suuntaan. Oletetaan, että hiukkaset ovat jonkinlaisilla kiskoilla, mikä pakottaa ne jatkamaan matkaansa huolimatta liikettä poikkeuttavista voimista. Hiukkasten välillä on sähköinen poistovoima \mathbf{F}_e . Varauksen q_1 aiheuttama magneettikenttä varauksen q_2 kohdalla osoittaa sivun sisään ja magneettinen voima \mathbf{F}_m oikealle. Vastaavasti varauksen q_2 aiheuttama magneettikenttä varauksen q_1 kohdalla osoittaa sivulta ulospäin ja magneettinen voima ylöspäin. Siispä varauksen q_1 varaukseen q_2 kohdistama sähkömagneettinen kokonaisvoima ei ole vastakkaisuuntainen varauksen q_2 varaukseen q_1 kohdistamaan voimaan. Onko siis jouduttu ristiriitaan Newtonin kolmannen lain kanssa ja sitä tietä ristiriitaan liikemäärän säilymlain kanssa!?

Vastaus on kielteinen. Ratkaisu on siinä, että SM-kentällä on energian lisäksi **liikemäärää**. Säilyvä suure on hiukkasten ja kenttien yhteenlaskettu liikemäärä. Tämän tarkastelemiseksi on tutustuttava Maxwellin jännitystensoriin.

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi väliainetta, jolle $\epsilon = \epsilon_0$ ja $\mu = \mu_0$. Kaikkien tilavuudessa V olevien hiukkasten liikemäärien summa \mathbf{p}_{mech}

noudattaa Newtonin toista lakia

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} = \int_V \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (9.19)$$

joten **voimatiheys** on

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (9.20)$$

Eliminoidaan ρ ja \mathbf{J} Maxwellin yhtälöiden avulla, jolloin

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \quad (9.21)$$

Nyt

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (9.22)$$

missä viimeisessä termissä on käytetty Faradayn lakia. Voimatiheys on siten

$$\mathbf{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9.23)$$

Lauseke saadaan symmetrisemmäksi lisäämällä termi $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/\mu_0$, joka on aina nolla. Kenttien roottorilausekkeet voi kirjoittaa auki kaavalla

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (9.24)$$

ja samoin \mathbf{B} :lle. Näin voimatiheys on saatu muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Tämä näyttää pahalta, mutta siistiytyy määrittelemällä **Maxwellin jännitystensori** \mathcal{T} , jonka komponentit ovat

$$\mathcal{T}_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (9.26)$$

Tensorin \mathcal{T} divergenssi on vektori, jonka komponentit ovat

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathcal{T})_j = & \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \end{aligned} \quad (9.27)$$

Nämä ovat Poyntingin vektorin aikaderivaattaa vaille voimatiheyden komponentit, joten

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathcal{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (9.28)$$

Integroidaan tämä tilavuuden V yli ja kirjoitetaan jännitystensorista riipuva osa pintaintegraaliksi. Tällöin kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \quad (9.29)$$

Jännitystensorin kirjoittaminen pintaintegraalina kertoo, että staattisessa tilanteessa sähkömagneettinen kokonaisvoima määräytyy jännitystensorista pelkästään tarkasteltavan alueen reunalla. Siis \mathcal{T} laskettuna alueen reunalla jotenkin pitää sisällään voimien kannalta olennaisen tiedon kenttien energiasta koko alueessa.

Voimien laskeminen jännitystensorista ei rajoitu elektrodynamiikkaan. Mekaniikasta tuttu energia-impulssitensori on formaalisti samanlainen otus, yleinen suhteellisuusteoria formuloidaan Einsteinin tensorin avulla, jne.

Esimerkki. Johdepalloon vaikuttava sähköstaattinen voima.

Asetetaan ohut johtava pallonkuori (säde a) homogeeniseen sähkökenttään \mathbf{E}_0 . Osoitetaan, että kentän suuntaan vastakkaisia pallonkuoren puolikkaita repii eri suuntiin voima $F = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2$.

Sähkökenttä määritettiin jo luvussa 2.9. Pallon pinnalla sähkökentällä on vain radiaalinen komponentti $E_r(r = a) = 3E_0 \cos \theta$. Harjoitustehtävänä on osoittaa, että staattisessa sähkökentässä olevaan johdekappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_S \sigma_s \mathbf{E} dS \quad (9.30)$$

missä σ_s on varaustiheys johteen pinnalla S . Käsiteltävässä esimerkissä symmetriasta seuraa, että pallon ylempään puoliskoon ($0 < \theta < \pi/2$) vaikuttava voima on z -akselin suuntainen ($F_+ \mathbf{e}_z$) ja alempaan puoliskoon ($\pi/2 < \theta < \pi$) vaikuttava voima on $\mathbf{F}_- = -\mathbf{F}_+$. Koska pallon pinnalla $\sigma_s = \epsilon_0 E_r(a)$, niin

$$F_+ = \int \mathbf{e}_z \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 E_r^2(a) \mathbf{e}_r = \frac{9}{2} \epsilon_0 E_0^2 a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^3 \theta = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 a^2 E_0^2 \quad (9.31)$$

9.3.3 Liikemäärän säilyminen

Palataan sitten takaisin kysymykseen liikemäärän säilymisestä. Newtonin toisen lain mukaan hiukkaseen vaikuttava voima on yhtä suuri kuin sen liikemäärän aikaderivaatta

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mech}}{dt} \quad (9.32)$$

missä alaindeksi *mech* viittaa mekaaniseen liiketilan muutokseen. Toisaalta olemme edellä ilmaisseet sähkömagneettisen voiman jännitystensorin avulla, joten

$$\frac{d\mathbf{p}_{mech}}{dt} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \quad (9.33)$$

Tämän voi tulkita samaan tapaan kuin Poyntingin teoreeman. Oikean puolen ensimmäinen termi kertoo liikemäärän virtauksen aikayksikössä pinnan ∂V läpi ja jälkimmäinen termi puolestaan kenttiin kertyneen liikemäärän muutoksen. Siis **sähkömagneettisen kentän liikemäärä** on

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbf{S} dV \quad (9.34)$$

Yhteenlasketun sähkömagneettisen ja mekaanisen liikemäärän muutos vastaa tarkastelualueeseen kenttien mukanaan tuomaa liikemäärää. Jos tilavuus on koko avaruus, vuosuure on nolla ja silloinkin kokonaisliikemäärä säilyy.

Olkoon \hat{p}_{mech} mekaaninen liikemäärätiheys. Määritellään vastaavasti SM-kentän **liikemäärätiheys**

$$\hat{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \quad (9.35)$$

Tällöin liikemäärän säilyminen voidaan ilmaista differentiaalimuodossa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{p}_{mech} + \hat{p}_{em}) = \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (9.36)$$

Todetaan vielä lopuksi, että sähkömagneettisella kentällä on myös **impulssimomenttia**. Impulssimomentin tiheys määritellään

$$\hat{l}_{em} = \mathbf{r} \times \hat{p}_{em} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \quad (9.37)$$

Myös kokonaisimpulssimomentti on säilyvä suure.

9.4 Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla

Luvuissa 3 ja 6 käsiteltiin staattisten sähkö- ja magneettikenttien reunaehtoja kahden aineen rajapinnalla. Magneettikentän normaalikomponentille saatiin yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pillerirasiakikalla reunaehto

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (9.38)$$

Tämä pätee tietenkin myös ajasta riippuvassa kentässä.

Tarkastellaan sitten sähkökentän tangentialikomponenttia. Sähköstaattisen yhtälön $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ sijasta on käytettävä Faradayn lakia

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.39)$$

Tehdään samanlainen suorakulmainen silmukka kuin luvussa 3 ja integroidaan Faradayn laki silmukan sulkeman pinnan yli

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.40)$$

Sovelletaan Stokesin teoreemaa lausekkeen vasemmalle puolelle ja suoriteetaan viivaintegraalit:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1E_{1n} + h_2E_{2n} - h_1E'_{1n} - h_2E'_{2n} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.41)$$

missä l on silmukan pituus rajapinnan suunnassa, h_1 ja h_2 ovat silmukan etäisyydet rajapinnasta kummankin väliaineen puolella ja E_{in} ja E'_{in} ottavat huomioon, että sähkökentän normaalikomponentit saattavat poiketa toisistaan silmukan eri päissä. Kun silmukka litistetään nollapaksuiseksi häviävät sähkökentän normaalikomponenttien termit ja samoin yhtälön oikea puoli sillä edellyksellä, että $\partial \mathbf{B} / \partial t$ pysyy äärellisenä. Lopullisesta yhtälöstä voi supistaa l :n ja jäljelle jää sama reunaehto kuin sähköstatiikassa

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (9.42)$$

\mathbf{D} -vektorin normaalikomponentin reunaehto on monimutkaisempi, koska nyt pintavaraustiheys voi muuttua. Sekaannusten välttämiseksi merkitään johdavuutta σ :lla ja pintavaraustiheyttä σ_s :llä. Tarkastellaan yhtälöä $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ pillerirasialaskalla, joka antaa samannäköisen tuloksen kuin sähköstatiikassa

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s \quad (9.43)$$

Toisaalta varaustiheyden muutosta kontrolloi jatkuvuusyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.44)$$

Tehdään tällekin pillerirasialasku, joka antaa

$$J_{1n} - J_{2n} = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \quad (9.45)$$

joten lopputulos riippuu pintavaraustiheyden ajallisesta muutoksesta.

Rajoitetaan tarkastelu yksinkertaiseen aaltoliikkeeseen eli oletetaan sähkökentän olevan muotoa $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Tällöin voidaan korvata $\partial / \partial t \rightarrow -i\omega$ ja yhtälön oikealla puolella on $i\omega\sigma_s$. Olettamalla lineaarinen väliaine ja käyttämällä rakennesyhtälöitä $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ja $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ voidaan D_n :n ja J_n :n reunaehdot kirjoittaa yhtälöparina

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} &= \sigma_s \\ \sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} &= i\omega\sigma_s \end{aligned} \quad (9.46)$$

Jos pintavaraustiheys häviää, on oltava $\epsilon_1/\sigma_1 = \epsilon_2/\sigma_2$, mikä voidaan saada aikaan valitsemalla sopivat väliaineet. Samoin käy myös kahden erittäin hyvän eristeen rajapinnalla, jolloin johtavuudet häviävät. Yleisesti σ_s ei häviä, joten se voidaan eliminoida yhtälöparista ja sähkökentän normaalikomponentille on voimassa reunaehto

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{\sigma_1}{\omega}\right) E_{1n} - \left(\epsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega}\right) E_{2n} = 0 \quad (9.47)$$

Tarkasteltaessa \mathbf{H} -vektorin tangentialikomponenttia täytyy kentänmuutosvirta huomioida

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (9.48)$$

Tangentialikomponentin reunehto löytyy jälleen suorakulmaisesta silmukasta. Samoin kuin Faradayn laissa oletettiin $\partial \mathbf{B}/\partial t$:n pysyvän äärellisenä silmukkaa kutistettaessa, nyt pidetään $\partial \mathbf{D}/\partial t$ äärellisenä ja jäljelle jää magnetostatiikasta tuttu reunaehto

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp} \quad (9.49)$$

missä j_{\perp} on pintavirran tiheyden komponentti, joka on kohtisuorassa tarkasteltavaa H -komponenttia vastaan. Pintavirrantiheys on nolla, jos väliaineen johtavuus on äärellinen. Siis ellei väliaineen johtavuus ole ääretön, magneetikentän tangentialikomponentti on jatkuva.

Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa väliaineen 2 johtavuus on ääretön. Ampèren ja Maxwellin laki väliaineelle 2 on

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} = \mathbf{J}_2 \quad (9.50)$$

Olettamalla harmoninen aikariippuvuus $e^{-i\omega t}$ ja käyttämällä rakenneyhtälöitä saadaan

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2 \quad (9.51)$$

Jos $\nabla \times \mathbf{H}_2$ on rajoitettu, niin ehto $\sigma_2 \rightarrow \infty$ edellyttää, että $\mathbf{E}_2 = 0$. Olettaen myös \mathbf{H}_2 :n aikariippuvuus harmoniseksi Faradayn laki ja lineaarinen rakenneyhtälö $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ antavat

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (9.52)$$

ja siten myös \mathbf{H}_2 häviää. Tämä kaikki tarkoittaa sitä, että sähkömagneettinen aalto ei etene äärettömän hyvään johteeseen. Reunaehdoksi tulee tällöin

$$H_{1t} = j_{\perp} \quad (9.53)$$

9.5 Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet

9.5.1 Aaltoyhtälö tyhjässä

Siirrosvirtatermin ansiosta Maxwellin yhtälöillä on ratkaisunaan **sähkömagneettinen aaltoliike**. Tarkastellaan tilannetta ensiksi tyhjässä ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Ottamalla roottori Ampèren ja Maxwellin laista saadaan

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (9.54)$$

josta kirjoittamalla vasemman puolen roottorit auki ja käyttämällä magneettikentän lähteettömyyttä saadaan aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.55)$$

Ottamalla puolestaan roottori Faradayn laista ja huomioimalla, että myöskään sähkökentällä ei ole tyhjässä lähteitä, saadaan sähkökentälle sama yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.56)$$

Tällainen aalto etenee nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ eli valon nopeudella.

9.5.2 Potentiaaliesitys

Tarkastellaan seuraavaksi Maxwellin yhtälöiden ratkaisemista olettamalla kenttien lähteet ρ ja \mathbf{J} tunnetuiksi. Esitetään tarkastelu tyhjänkaltaisessa väliaineessa (ϵ_0, μ_0) kentille \mathbf{E} ja \mathbf{B} . Tarkastelun siirtäminen lineaariseen väliaineeseen on suoraviivaista.

Ongelmaa on tehokkainta lähestyä käyttämällä kenttien skalaari- ja vektoripotentiaaleja ϕ ja \mathbf{A} . Ensinnäkin yhtälö $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implikoi tutun relaatios $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sijoittamalla tämä Faradayn lakiin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (9.57)$$

Fysikaalisen siisteille kentille aika- ja paikkaderivaattojen järjestyksen voi vaihtaa, joten

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.58)$$

eli voidaan kirjoittaa $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi$. Sähkökenttä on siis muotoa

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.59)$$

eli sähköstaattisen potentiaalin lisäksi Faradayn laki tuo vektoripotentiaalin aikamuutoksesta johtuvan osuuden sähkökenttään. Näin kenttien kuusi komponenttia on ilmaistu neljän muuttujan (φ , \mathbf{A}) avulla. Tähän on tarvittu neljä Maxwellin yhtälöiden kahdeksasta skalaarikomponentista, joten meillä on jäljellä neljä yhtälöä neljän tuntemattoman ratkaisemiseen. Jäljelläolevat Coulombin ja Ampèren ja Maxwellin lait saadaan muotoon

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.60)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0\mathbf{J} \quad (9.61)$$

Saatu yhtälöryhmä näyttää pahemmalta kuin alkuperäiset Maxwellin yhtälöt, mutta sille löytyy käteviä ratkaisumenetelmiä. Koska kentät \mathbf{E} ja \mathbf{B} muodostuvat potentiaalien derivaatoista, voidaan potentiaaleihin lisätä sellaisia tekijöitä, jotka katoavat derivoitaessa. Tätä ominaisuutta kutsutaan **mittainvarianssiksi**. Yksi tapa säilyttää alkuperäiset kentät on edellyttää

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (9.62)$$

Tätä ehtoa kutsutaan **Lorentzin ehdoksi** ja kyseistä mitta **Lorentzin mitaksi**. Tällainen muunnos voidaan aina tehdä.

Lorentzin mitassa jäljellä olevat yhtälöt redusoituvat **epähomogeeniseksi aaltoyhtälöiksi**

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.63)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \quad (9.64)$$

joille tunnetaan yleisiä ratkaisumenetelmiä.

9.5.3 Viivästyneet potentiaalit

Edellä on löydetty itse asiassa neljä karteesisissa koordinaateissa toisistaan riippumatonta skalaariyhtälöä, joten ratkaisumenetelmän kannalta riittää tarkastella yhtälöä φ :lle.

Mikäli kyseessä olisi staattinen kenttä, meillä olisi tuttu Poissonin yhtälö, jonka ratkaisuja ovat Laplacen yhtälön yleiset ratkaisut sekä jokin Poissonin yhtälön erikoisratkaisu. Ratkaistaan aaltoyhtälö ensin yhdelle varaukselle, joka on sijoitettu origoon. Tällöin homogeenisen aaltoyhtälön

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0 \quad (9.65)$$

on toteuduttava kaikkialla muualla kuin origossa. Pienessä alueessa origon ympärillä puolestaan

$$\int_{\Delta V} dV \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q(t) \quad (9.66)$$

Koska tilanne on pallosymmetrinen, $\varphi = \varphi(r)$ ja homogeeninen aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa pallokoordinaatistossa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.67)$$

Tämä palautuu yksiulotteiseksi aaltoyhtälöksi sijoituksella

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (9.68)$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.69)$$

ja tällä on tutut $\pm r$ -suuntiin etenevät ratkaisut

$$\chi = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (9.70)$$

Näistä $f(r - ct)$ etenee pois päin varauksesta ja $g(r + ct)$ etenee kohti varausta. Koska haluamme ymmärtää varauksen vaikutusta ympäristöönsä, meille riittää tarkastella ratkaisua f .

Olemme siis löytäneet homogeeniselle aaltoyhtälölle pallosymmetrisen ratkaisun

$$\varphi = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (9.71)$$

ja nyt pitäisi määrittää funktion f muoto. Staattisessa tapauksessa potentiaali on

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.72)$$

ja nyt $q = q(t)$. Kirjoitetaan f ajan funktiona $f(t - r/c)$, missä vakio $-c$ on upotettu määrättävään funktioon itseensä. Näin ollen ajanhetkellä $t - r/c$ on voimassa

$$f(t - r/c) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (9.73)$$

ja yksittäisellä varauksen epähomogeenisella aaltoyhtälöllä on ratkaisu

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.74)$$

Integroimalla kaikkien varausten yli saadaan lopulta ratkaisu

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.75)$$

missä $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ on **viivästynyt aika**. Potentiaalia φ kutsutaan **viivästyneeksi skalaaripotentialiksi**, koska se huomioi ajan, joka kuluu kustakin pisteestä tarkastelupisteeseen nopeudella c etenevältä signaalilta.

Vektoripotentialin aaltoyhtälön kukin komponentti on matemaattisesti aivan samanlainen kuin skalaripotentialin aaltoyhtälö

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_i = -\mu_0 J_i \quad (9.76)$$

joten jokaiselle komponentille on olemassa sama ratkaisu. Kokoamalla kaikki komponentit yhteen saadaan **viivästynyt vektoripotentiali**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.77)$$

Olemme siis saaneet määritetyksi skalaari- ja vektoripotentialit annettujen varaus- ja virtajakautumien funktioina. Sähkö- ja magneettikentät saadaan näistä suoraviivaisesti: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ja $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Olemme siis ratkaisseet Maxwellin yhtälöt annetuille varaus- ja virtajakautumille. Käytännössä derivaattojen laskeminen on kuitenkin varsin työlästä.

Tutustumme kurssin lopulla suppeamman suhteellisuusteorian formalismin, jossa vektori- ja skalaaripotentialien aaltoyhtälöt voidaan koota **nelipotentialin** $A^\alpha = (\varphi, A_i)$ aaltoyhtälöksi

$$\partial^2 A^\alpha \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\alpha = -j^\alpha \quad (9.78)$$

missä **nelivirran** j^α komponentit ovat $(\rho/\epsilon_0, \mu_0 J_i)$.

Osoittautuu, että Maxwellin yhtälöt ovat Lorentz-invariantteja eli valmiiksi kelvollisia suhteellisuusteorian pätevyysalueelle. Historiallisesti juuri elektrodynamiikka johti Einsteinin suhteellisuusteorian jäljille.

9.5.4 Aaltoyhtälön Greenin funktio

Tarkastellaan aaltoyhtälön ratkaisua käyttämällä luvussa 2.11 esitettyä Greenin funktion ideaa. Sekä \mathbf{A} :n että φ :n aaltoyhtälöt ovat muotoa

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t) \quad (9.79)$$

missä $f(\mathbf{r}, t)$ on tunnettu lähde-termi. Tehdään sekä ψ :lle että f :lle Fourier-muunnos ajan suhteen

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega ; f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (9.80)$$

Sijoittamalla nämä aaltoyhtälöön ja merkitsemällä $k = \omega/c$ saadaan Fourier-komponenteille

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{r}, \omega) \quad (9.81)$$

Tämä on **epähomogeeninen Helmholtzin aaltoyhtälö**, joka tapauksessa $k = 0$ palautuu Poissonin yhtälöksi. Sen Greenin funktion täytyy toteuttaa yhtälö

$$(\nabla^2 + k^2) G_k(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.82)$$

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on silloin

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \int G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) f(\mathbf{r}', \omega) dV' \quad (9.83)$$

johon voidaan lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja.

Koska aaltoyhtälöä joudutaan käytännössä ratkomaan heijastavien reunojen, aaltoputkien jne. yhteydessä, Greenin funktion muoto riippuu ongelman reunaehdoista (vrt. pallon Greenin funktio luvussa 2.11). Tarkastellaan nyt vain reunatonta avaruutta, jolloin G_k on pallosymmetrinen ja riippuu ainoastaan tarkastelupisteen ja lähdepisteen etäisyydestä $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Kirjoitetaan ∇^2 pallokoordinaateissa

$$\nabla^2 G_k = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial G_k}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R G_k) \quad (9.84)$$

Koska R on ainoa muuttuja, voidaan käyttää kokonaisderivaattaa

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.85)$$

Muualla kuin pisteessä $R = 0$ tämä yksinkertaistuu yhtälöksi

$$\frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 (R G_k) = 0 \quad (9.86)$$

jonka ratkaisut ovat

$$R G_k = A e^{ikR} + B e^{-ikR} \quad (9.87)$$

Rajalla $R \rightarrow 0$, $kR \ll 1$ ja (9.85) palautuu Poissonin yhtälöksi, jonka ratkaisu käyttäytyy kuten $1/R$. Tämä antaa sidosehdon $A + B = 1$ ja Greenin funktio on muotoa

$$G_k(R) = A G_k^+(R) + B G_k^-(R) \quad (9.88)$$

missä $G_k^\pm = e^{\pm ikR}/R$. G_k^+ kuvaa origosta pois päin etenevää palloaaltoa ja G_k^- origoon tulevaa palloaaltoa aivan kuten edellisessäkin jaksossa esitettyssä ratkaisussa.

A ja B määräytyvät reunaehdoista **ajan** suhteen. Jos lähde on hiljaa hetken $t = 0$ asti ja alkaa sitten vaikuttaa, ulospäin etenevä ratkaisu $A G_k^+$

on fysikaalisesti mielekäs valinta, mutta jos aallon amplitudi on annettu sopivilla reunaehdoilla, myös $B G_k^-$ voi olla käyttökelpoinen.

Tarkastellaan sitten **ajasta riippuvaa** Greenin funktiota, joka toteuttaa yhtälön

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (9.89)$$

Koska

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} \quad (9.90)$$

voidaan lähdetermi yhtälössä 9.82 kirjoittaa muodossa $-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{i\omega t'}$ ja ajasta riippuva Greenin funktio on

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (9.91)$$

missä $\tau = t - t'$. Äärettömän avaruuden Greenin funktio riippuu siis vain lähteen ja havaitsijan välisestä etäisyydestä R ja aikaerosta $t - t'$. Koska $k = \omega/c$, voidaan ω -integraali laskea ja lopputulos on

$$G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - [t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c]) \quad (9.92)$$

Nyt G^+ on **viivästynyt** Greenin funktio ja G^- puolestaan **edistynyt** Greenin funktio.

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on siis

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (9.93)$$

johon voi lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja. Viivästyneelle Greenin funktiolle ratkaisu on tietenkin sama kuin luvussa 9.5.3 suuremmalla laskulla löytynyt ratkaisu. Tässä esitetty menetelmä on kuitenkin yleisempi ja käyttökelpoisempi tarkasteltaessa monimutkaisempia olosuhteita kuin yksinkertaista lähdettä reunattomassa avaruudessa.

9.6 Mittainvarianssi

Aaltoyhtälön ratkaisu helpottui valitsemalla sopiva mitta. Tämän teki mahdolliseksi Maxwellin yhtälöiden tärkeä ominaisuus: **mittainvarianssi**. Tämä tarkoittaa sitä, että kenttien potentiaaleja voidaan muuttaa tietyllä yleisellä

tavalla ilman, että kentät itse muuttuvat. Elektrodynamiikan mittamuunnokset ovat muotoa

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \quad (9.94)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t \quad (9.95)$$

Funktiota Ψ kutsutaan **mittafunktioksi** ja se voidaan valita usealla eri tavalla eli on olemassa suuri joukko erilaisia mittoja. Yksi näistä on siis edellä käytetty Lorentzin mittaehto

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0 \quad (9.96)$$

Voidaan osoittaa, että Lorentzin mittaehtoon toteuttava funktio Ψ on aina olemassa, mutta se ei ole yksikäsitteinen.

Lorentzin mitan etu on, että sitä käytettäessä yhtälöiden Lorentz-kovarianssi näkyy eksplisiittisesti ja tulokset on suoraviivaista siirtää koordinaatistosta toiseen. Käytännön laskut voivat kuitenkin olla hyvin monimutkaisia.

Useissa tapauksissa laskennallisesti yksinkertaisempi vaihtoehto on **Coulombin mitta**, jonka mittaehto on

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \quad (9.97)$$

Nyt vektoripotentialiaali saadaan muunnoksella

$$\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (9.98)$$

joka määrittää mittafunktion (additiivista vakiota vaille) yksikäsitteisesti, jos $\mathbf{A} \rightarrow 0$ ja $\varphi \rightarrow 0$, kun $r \rightarrow \infty$. Coulombin mitassa skalaaripotentialiaali ratkaistaan yhtälöstä 9.60

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.99)$$

Huom. Nyt aika ei ole viivästetty vaan skalaaripotentialiaali määräytyy samanaikaisesta varausjakautumasta kaikkialla. Tämä merkitsee, että Coulombin mitta ei ole Lorentz-kovariantti. Koska Coulombin mitta on kuitenkin kelvollinen mitta Maxwellin yhtälöille, tästä ei seuraa ristiriitaa kenttien \mathbf{E} ja \mathbf{B} osalta. Coulombin mittaa käytettäessä on kuitenkin oltava tarkkana koordinaatistonmuutosten kanssa.

Coulombin mitassa vektoripotentialialille tulee aaltoyhtälö

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu_0\mathbf{J} \quad (9.100)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi on pyörteetön. Helmholtzin teoreeman mukaan vektorikenttä \mathbf{F} voidaan jakaa pyörteettömään ja lähtettömään osaan

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t ; \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 ; \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0$$

missä l viittaa **pitkittäiseen** (longitudinaaliseen, pyörteettömään) ja t **poikittaiseen** (transversaaliseen, lähteettömään) osuuteen. Käyttämällä virran jatkuvuusyhtälöä aaltoyhtälö saadaan muotoon (ks. esim. Jackson)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t \quad (9.101)$$

Koska vektoripotentiali määräytyy vain virran poikittaisesta komponentista, Coulombin mitta kutsutaan usein poikittaismitaksi. Se tunnetaan myös nimellä säteilymitta, koska sähkömagneettiset säteilykentät saadaan lasketuksi viivästyneestä vektoripotentialista

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_t(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.102)$$

mikä on olennaisesti helpompaa kuin säteilykenttien laskeminen Lorentzin mitasta.

Coulombin mitta separoi annetussa koordinaatistossa sähkökentän staattiseen (s) ja induktiiviseen (i) osaan

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\varphi ; \mathbf{E}_i = -\partial\mathbf{A}/\partial t \quad (9.103)$$

Huom. Tämä separaatio ei ole Lorentz-kovariantti: Yhdessä koordinaatistossa esiintyvä sähköstaattinen kenttä voidaan hävittää siirtymällä sopivalta nopeudella liikkuvaan koordinaatistoon. Tämä ilmiö on läheisesti tekemisissä Faradayn lain yhteydessä käsitellyn liikkeen indusoiman ja oikean sähkömotorisen voiman välisen yhteyden kanssa.

Klassinen elektrodynamiikka on ensimmäinen esimerkki mittainvariantista fysiikan perusteorioista. Mittakentän käsitteestä on tullut erittäin keskeinen osa fysiikan perusteorioissa kuten kvanttielektrodynamiikassa, sähköheikon vuorovaikutuksen teoriassa, kvanttikromodynamiikassa ja näitä yhdistävissä yhtenäiskenttäteorioissa. Esimerkkinä käyköön vuoden 1999 Nobelin palkinto, jonka saivat Gerardus t'Hooft ja Martinus Veltman töistään kvanttikromodynamiikan ei-abelisten mittakenttien parissa.

Luku 10

Sähköiset ja magneettiset materiaalit

Aiemmat 9 lukua ovat esitelleet klassisen elektrodynamiikan peruskäsitteet ja teorian perusrakenteen. Alamme nyt perehtyä elektrodynamiikan käyttöön erilaisissa ongelmissa. Tarkastellaan aluksi aineen sähköisiä ja magneettisia ominaisuuksia mikroskooppisella tasolla. Erityisesti magnetismin osalla on tyydyttävä varsin kvalitatiiviseen kuvailuun, koska tarkka käsittely vaatisi varsin pitkälle menevää kvanttimekaniikkaa. Tämän luvun aineisto on peräisin useammasta lähteestä (mm. Feynman, Jackson, RMC).

Palautetaan ensin mieleen Maxwellin yhtälöt tilanteessa, jossa väliaine kuvataan polarisoituman \mathbf{P} ja magnetoituman \mathbf{M} avulla:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{vapaa} \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.3)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_{vapaa} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (10.4)$$

Tässä ρ_{vapaa} sisältää muut varaukset kuin polarisaatiovarauksen ja \mathbf{j}_{vapaa} muut virrat kuin magnetoitumisvirran. Määrittelemällä sähkövuon tiheys \mathbf{D} ja magneettikentän voimakkuus \mathbf{H}

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (10.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (10.6)$$

voidaan Maxwellin yhtälöt väliaineessa esittää muodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{vapaa} \quad (10.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{vapaa} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.10)$$

Sähkökenttä \mathbf{E} ja magneettivuon tiheys \mathbf{B} ovat suureet, jotka lopulta halutaan määrittää. Tätä varten on tunnettava rakenneyhtälöt esimerkiksi muodossa $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ja $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

10.1 Molekulaarinen polarisoituvuus

Tarkastellaan yksinkertaista väliainetta, jossa yksittäisen molekyylin dipolimomentti \mathbf{p}_m on verrannollinen polarisoivaan sähkökenttään \mathbf{E}_m :

$$\mathbf{p}_m = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_m \quad (10.11)$$

Suuretta α kutsutaan polarisoituvuudeksi (yksikkö m^3). Oletetaan lisäksi, ettei molekyylillä ole pysyvää dipolimomenttia. Tavoitteena on lausua molekyylin polarisoituvuus makroskooppisesti mitattavien suureiden avulla.

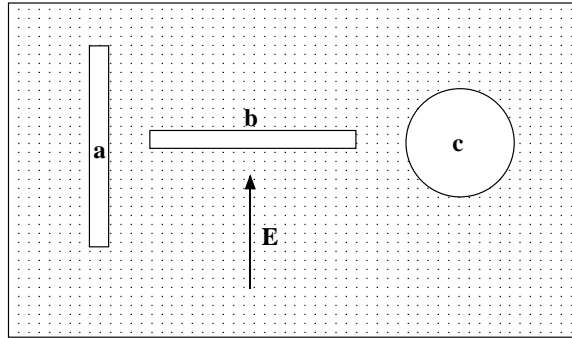
Ensimmäinen ongelma liittyy polarisoivaan sähkökenttään: se on kenttä, jonka aiheuttavat kaikki ulkoiset lähteet ja väliaineen polarisoituneet molekyylit lukuunottamatta tarkasteltavaa molekyyliä itseään. Kuinka kenttä \mathbf{E}_m määritetään? Luonnollinen ajatus on poistaa makroskooppisesti pieni mutta mikroskooppisesti suuri palanen ainetta tarkasteltavan molekyylin ympäriltä ja laskea kenttä jäljelle jäävässä onkalossa. Kenttä tarkasteltavan molekyylin kohdalla on silloin

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{near} \quad (10.12)$$

Tässä \mathbf{E} on keskimääräinen kenttä koko kappaleessa, \mathbf{E}_p onkalon pinnan polarisaatiovarauksen aiheuttama kenttä ja \mathbf{E}_{near} onkalossa olevien kaikkien muiden molekyylien aiheuttama kenttä. Aivan tarkasteltavan molekyylin kohdalla on siis otettava huomioon aineen yksityiskohtainen mikroskooppinen rakenne.

Kenttä \mathbf{E}_{near} on nolla esimerkiksi säännöllisen kuutiohilan hilapisteissä, jos molekyylien dipolimomenttivektorit ovat identtisiä (HT). Samoin voidaan olettaa \mathbf{E}_{near} nollaksi nesteissä ja kaasuissa, joissa molekyylit ovat täysin satunnaisesti jakautuneita. Useista molekyylylityypeistä koostuvissa aineissa tämä kenttä voi kuitenkin poiketa nolasta. Jatkossa oletetaan, että $\mathbf{E}_{near} = 0$.

Pulmallista on vielä se, että polarisaatiokenttä \mathbf{E}_p riippuu onkalon muodosta (kuva 10.1). Jos onkalo on kapean suorakaiteen muotoinen ja sen



Kuva 10.1: Molekulaarisen kentän määrittäminen erilaisissa onkaloissa.

pitkä sivu on makroskooppisen kentän \mathbf{E} suuntainen (a), niin sähkökenttä on onkalossa sama kuin väliaineessa kentän tangentialikomponentin jatkuvuuden perusteella. Jos suorakaidetta käännetään 90 astetta (b), niin onkalossa $\mathbf{E}_b = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0$ sähkövuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuuden vuoksi (pinnoilla on polarisaatiovarausta, mutta ei vapaata varausta).

Luonnolliselta tuntuva vaihtoehto on olettaa onkalo palloksi (c). Nyt kenttä onkalossa saadaan vähentämällä tasaisesti polarisoituneen pallon kenttä kentästä \mathbf{E} . Voidaan käyttää hyväksi analogiaa magnetostatiikkaan, jossa tasaisesti magnetoituneen pallon sisällä on vakiokenttä $\mathbf{H} = -\mathbf{M}/3$ (ks. luku 6.6). Tästä voidaan suoraan päätellä, että polarisoituneen pallon sisällä on kenttä $-\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$, ja onkalossa $\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)$. Tämä on jonkinlainen välimuoto suorakaiteen muotoisten onkaloiden kentistä.

Nyt voidaan laskea polarisoituma suoraviivaisesti. Jos molekyylien lukumäärätiheys on n , niin polarisoituma on määritelmän mukaan $\mathbf{P} = n\mathbf{p}_m$, joten

$$\mathbf{P} = n\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)) \quad (10.13)$$

Toisaalta $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$, joten saadaan Clausiuksen ja Mossottin yhtälö

$$\alpha = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{n(\epsilon_r + 2)} \quad (10.14)$$

jossa suhteellinen permittiivisyys ϵ_r ja tiheys n ovat makroskooppisesti mitattavia suureita. Voidaan esimerkiksi mitata kaasun ϵ_r ja n , jolloin saadaan α laskettua. Olettamalla, että polarisoitumismekanismi on samanlainen myös nesteessä voidaan tunnettujen tiheyksien avulla ennustaa nesteen suhteellinen permittiivisyys. Näin saadaan varsin hyviä tuloksia esimerkiksi aineille CS_2 , O_2 , CCL_4 . Mainittakoon, että vedelle tulisi vastaavalla tavalla ennusteksi negatiivinen permittiivisyys, joten pysyvästi polarisoituneelle aineelle esitetty malli ei päde.

Useimmilla eristeillä \mathbf{E}_m menee nolnaan \mathbf{E} :n mukana. Joissain tapauksissa on olemassa pysyvää polarisaatiota \mathbf{P}_0 , jolloin \mathbf{E} :n ollessa nolla

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{3}\mathbf{P}_0 \quad (10.15)$$

Tällöin

$$\mathbf{P}_0 = n\alpha\mathbf{E}_m = \frac{n\alpha}{3}\mathbf{P}_0 \quad (10.16)$$

joten nollasta poikkeava pysyvä polarisaatio edellyttää, että

$$\frac{n\alpha}{3} = 1 \quad (10.17)$$

Tämä ehto on varsin tiukka ja useimmille materiaaleille $n\alpha/3 < 1$, joten ne käyttäytyvät kuten tavalliset eristeet. Jotkin kristallirakenteiset kiinteät aineet kuitenkin toteuttavat ehdon ja niitä kutsutaan ferroelektriseksi materiaaleiksi. Esimerkiksi BaTiO_3 on ferroelektristä alle 120°C :n lämpötilassa (aiheesta enemmän Feynman Lectures, osa II, luku 11-7).

Pysyvästi polarisoitunut kappale (elektretti) on kestopolymagneetin sähköinen vastine. Se eroaa kuitenkin magneetista ratkaisevasti, koska elektretin pinnalle kertyy vähitellen väliaineesta vapaita varauksia, jotka neutralisoivat polarisaatiopintavarauksen.

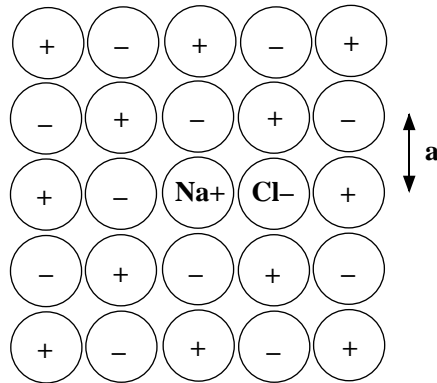
Ferroelektrisyydelle ominainen pysyvä polarisoituvuus aiheuttaa **hystereesi-ilmiön**. Kun aine on kerran polarisoitu tasolle P , niin polarisaatio ei katoa viettäessä sähkökenttä nolnaan, vaan vasta selvästi nollan alapuolella. Kasvatettaessa negatiivista sähkökenttää polarisaatio saavuttaa uudelleen uuden tason $-P$, josta ei puolestaan päästä eroon kasvattamalla sähkökenttä nolnaan vaan kenttää on kasvatettava riittävän paljon nollan yläpuolelle. Siten polarisaation ja sähkökentän välinen relaatio ei ole yksikäsitteinen. Vastaavaan ilmiöön tutustutaan myöhemmin ferromagnetismin yhteydessä.

10.2 Ionikiteen sähköstaattinen energia

Tutkitaan seuraavaksi sähköstatiikan keinoin ionikiteen energiaa. Tarkastellaan esimerkkinä suolaa (NaCl , kuva 10.2). Kokeellisesti tiedetään, että suolan hajottaminen Na^+ ja Cl^- -ioneiksi vaatii energiaa 7.92 eV molekyyliä kohti. Lasketaan, onko tämä sama kuin yhden molekyylin sähköstaattinen potentiaalienergia kaikkien muiden suolakiteen ionien kentässä.

Riittää tarkastella yhtä Na^+ -ionia. Sen potentiaalienergia on

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (10.18)$$



Kuva 10.2: Poikkileikkaus NaCl-kiteestä.

missä q_i on $\pm e$ (e = alkeisvaraus) ja r_i on kunkin ionin etäisyys origoon sijoitetusta Na^+ -ionista. Koska halutaan yhden molekyylin potentiaalienergia U , niin on laskettava summa $U = 2U_1$:

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (10.19)$$

N voidaan turvallisesti olettaa äärettömäksi, koska se on makroskooppisille kiteille Avogadron vakion $6.02 \cdot 10^{23}$ suuruusluokkaa.

Röntgendifraktiokokeiden perusteella tiedetään, että ionit ovat kuutiohilassa, jossa kuution sivun pituus a on noin $2.82 \cdot 10^{-10} m$. Koska $e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx 5.1 eV$, niin suuruusluokan puolesta ollaan oikeilla jäljillä. Energian lauseke voidaan kirjoittaa summana

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (10.20)$$

missä ei pidä ottaa mukaan termiä $m = n = p = 0$. Numeerisesti saadaan $U \approx -1.747e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx -8.91 eV$. Tämä on hieman liian suuri arvo, koska edellä ei otettu huomioon hyvin lähellä toisiaan olevien ionien välillä vallitsevaa poistovoimaa. Sen vaikutus pienentää molekyylin hajottamiseen tarvittavaa energiaa. Lisäksi pieni korjaus tulisi ottamalla huomioon kidevärähtelyistä johtuva liike-energia.

10.3 Sähkönjohtavuus mikrokooppisesti

Tarkastellaan johteessa nopeudella \mathbf{v} liikkuvaa varausta q klassisen mekaniikan mukaisesti. Mikäli hiukkaseen vaikuttaa sähkökenttä \mathbf{E} , se kiihtyy voiman $m d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E}$ vaikutuksesta. Olkoon kyseessä lineaarinen ohminen

johde, jossa sähkökenttä aiheuttaa tasaisen virrantiheyden \mathbf{J} . Hiukkaseen täytyy vaikuttaa toinenkin voima, joka kumoaa sähkökentän aiheuttaman kiihtyvyyden. Oletetaan, että jarruttava voima on mekaanisen kitkan kaltainen eli verrannollinen hiukkasen nopeuteen, jolloin

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \quad (10.21)$$

Alkuehdolla $\mathbf{v}(0) = 0$ liikeyhtälöllä on ratkaisu

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G}\mathbf{E}(1 - e^{-Gt/m}) \quad (10.22)$$

Tämän mukaan hiukkasen nopeus lähestyy kulkeutumisenopeutta $\mathbf{v}_d = q\mathbf{E}/G$ eksponentiaalisesti $e^{-t/\tau}$ aikavakion τ ollessa

$$\tau = m/G \quad (10.23)$$

Sijoittamalla tämä \mathbf{v}_d :n lausekkeeseen Ohmin laki voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\tau}{m}\mathbf{E} \quad (10.24)$$

joten

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (10.25)$$

missä n on hiukkasten lukumäärätiheys. Jos virrankuljettajia on useampaa laatua, niin

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \quad (10.26)$$

Kohtuullisen hyvillä johteilla metalleista puolijohteisiin τ voidaan tulkitta johtavuuselektronien **keskimääräiseksi törmäysajaksi**. Matkaa, jonka johtavuuselektroni kulkee keskimäärin törmäysten välillä kutsutaan **keskimääräiseksi vapaaksi matkaksi** l_{mfp} ja se on

$$l_{mfp} = v_T \tau \quad (10.27)$$

missä v_T on elektronien **terminen** nopeus. Nyt termisen nopeuden on oltava paljon suurempi kuin v_d , sillä muutoin τ tulisi riippuvaiseksi sähkökentästä eikä väliaineella olisi enää lineaarista Ohmin lakia. Useimmilla metalleilla $v_T \approx 10^6$ m/s ja v_d yleensä alle 10^{-2} m/s. Metalleilla $l_{mfp} \approx 10^{-8}$ m huoneenlämmössä, joten $\tau \approx 10^{-14}$ s. Puolijohteilla relaksaatioaika voi olla kertalukua suurempi, mutta joka tapauksessa sähkövirta reagoi käytännössä välittömästi sähkökentän muutokseen. Tämä selittää, miksi ennen Maxwellia kentänmuutosvirtaa ei ollut havaittu missään koetilanteessa.

10.4 Molekulaarinen magneettikenttä

Tarkasteltaessa aineen magnetismia molekyyalitasolla kenttien \mathbf{B} ja \mathbf{H} välinen ero olennaisesti katoaa, sillä molekyylien ajatellaan sijaitsevan tyhjöissä ja mikrokooppinen magneettikenttä \mathbf{B}_m tarkasteltavan molekyylin kohdalla voidaan korvata mikrokooppisella kentällä \mathbf{H}_m kirjoittamalla

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (10.28)$$

Molekulaarisen magneettikentän muodostavat kaikki ulkoiset sähkövirrat ja kaikki molekulaariset dipolit lukuunottamatta molekyyliä, jonka kohdalla kenttä lasketaan. Tehdään tarkasteltavan pisteen ympärille onkalo, jonka ulkopuolinen väliaine käsitellään jatkumona samalla tavalla kuin luvussa 10.1 molekulaarista polarisoitumista määritettäessä. Molekulaarinen kenttä on siis

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{near} \quad (10.29)$$

missä \mathbf{H} on makroskooppinen kenttä, \mathbf{H}_s onkalon reunoilla olevien pintadipolien aiheuttama kenttä ja \mathbf{H}_{near} onkalon sisällä olevien dipolien tuottama kenttä. Samanlaisella laskulla, jolla määritettiin \mathbf{E}_m edellä, saadaan (vrt. luku 6.6, tasaisesti magnetoitunut pallo)

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (10.30)$$

Onkalossa olevat dipolit antavat puolestaan

$$\mathbf{H}_{near} = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \quad (10.31)$$

missä \mathbf{r}_i on etäisyys onkalon keskipisteestä i :nteen dipoliin. Suurelle joukolla aineita \mathbf{H}_{near} on merkityksettömän pieni, jolloin

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (10.32)$$

10.5 Para- ja diamagnetismista

Tässä luvussa käsitellään hieman yksityiskohtaisemmin väliaineen vaikutusta magneettikenttään. Rajoitumme tässä kvalitatiiviseen käsittelyyn. Hyviä kuvauksia voi löytää korkeatasoisista lukion oppikirjoistakin (esim. Kurki-Suonio et al., Kvantti 2, jota tässä on käytetty yhtenä lähdeksi).

Aine magnetoituu ulkoisessa magneettikentässä. Väliaine ja kenttään tuodut kappaleet synnyttävät oman magneettikenttensä. Tilanne on kuitenkin selvästi erilainen kuin sähkökentän tapauksessa, mikä lienee tuttua kaikille hankaussähkön ja kestopagneettien kanssa leikkineille. Kaikkien aineiden polarisoituminen sähkökentässä havaitaan siitä, että varattu kappale

Taulukko 10.1: Joitain dia- ($\chi_m < 0$) ja paramagneettisia ($\chi_m > 0$) aineita. Suskeptiivisuudet on annettu huoneenlämpötilassa. Kaasujen tapauksessa oletetaan lisäksi normaali ilmanpaine.

| aine | suskeptiivisuus |
|-----------|-----------------------|
| alumiini | $2.1 \cdot 10^{-5}$ |
| elohopea | $-2.8 \cdot 10^{-5}$ |
| happi | $193.5 \cdot 10^{-8}$ |
| hopea | $-2.4 \cdot 10^{-5}$ |
| kulta | $-3.5 \cdot 10^{-5}$ |
| kupari | $-0.98 \cdot 10^{-5}$ |
| magnesium | $1.2 \cdot 10^{-5}$ |
| timantti | $-2.2 \cdot 10^{-5}$ |
| titaani | $18 \cdot 10^{-5}$ |
| typpi | $-0.67 \cdot 10^{-8}$ |
| vety | $-0.22 \cdot 10^{-8}$ |

vetää puoleensa neutraalejakin kappaleita. Sen sijaan magneeteilla on selvästi näkyvä vaikutus vain harvoihin aineisiin. Lähellä olevat kappaleet ja väliaineet eivät siksi yleensä häiritse merkittävästi magneettisia tutkimuksia.

Väliaineen vaikutusta magneettikenttään on yksinkertaista tutkia toroidikäämin avulla, koska käämin kenttä on kokonaan toroidin sisällä (vrt. eristeiden tutkimus kondensaattorin avulla). Kentän muoto ei muutu, jos toroidi täytetään väliaineella, vaan ainoastaan magneettivuon tiheys muuttuu. Väliaineen suhteellinen permeabiliteetti voidaan silloin mitata vertaamalla magneettivuon tiheyttä käämissä väliaineen kanssa ja ilman sitä.

Koska suurimmalla osalla aineista suhteellinen permeabiliteetti on lähellä ykköstä, käytetään useammin magneettista suskeptiivisuutta

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (10.33)$$

ja useille aineille pätee yksinkertainen rakenneyhtälö

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \quad (10.34)$$

Ainetta kutsutaan diamagneettiseksi, jos $\chi_m < 0$ ja paramagneettiseksi, jos $\chi_m > 0$. Näille aineille on tyypillisesti $\chi_m < 10^{-3}$, joten yleensä voidaan aineen permeabiliteetti olettaa samaksi kuin tyhjän permeabiliteetti (taulukko 10.1). Poikkeuksena ovat ferromagneettiset aineet, jotka eivät noudata yksinkertaista magnetoitumislakia.

Aineen magneettisten ominaisuuksien mikroskooppinen selitys perustuu useisiin eri tekijöihin. Alkeishiukkaset ovat pieniä alkeismagneetteja, joiden

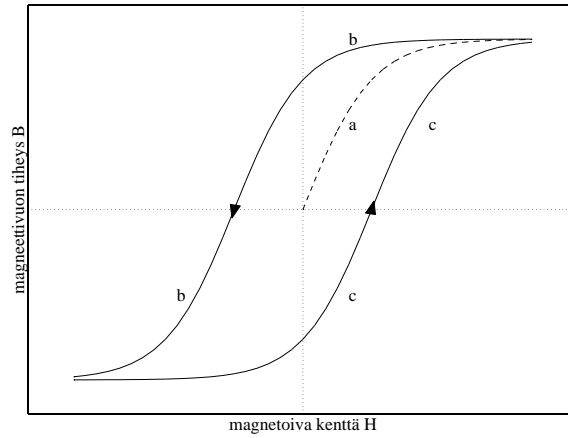
magneettimomentti liittyy hiukkasteen spiniin. Elektronin magneettimomentti on noin 700 kertaa suurempi kuin protonin ja noin 1000 kertaa suurempi kuin neutronin magneettimomentti, joten elektronit määräävät aineen magneettiset ominaisuudet. (Neutroni ei siis kuitenkaan ole magneettisessa mielessä täysin neutraali.)

Elektronin kiertoliike atomissa vastaa virtasilmuksia ja siitä aiheutuva magneettimomentti on samaa suuruusluokkaa kuin spinistä johtuva. Rataliikkeestä johtuva magneettimomentti voidaan ymmärtää klassisella mallilla, jossa elektroni kiertää r -säteistä ympyrärataa kulmataajuudella $\omega = 2\pi/T$. Malli vastaa virtasilmuksia, jonka pinta-ala on $A = \pi r^2$ ja jossa kulkee virta $I = q/T = qv/2\pi r$. Magneettimomentti on siis $m = IA = qvr/2$. Elektronin liikemäärämomentti radan keskipisteen suhteen on $L = m_0vr$ (massa $= m_0$). Ottaen huomioon, että kyse on vektorisuureista, voidaan suuntasäännöt muistaen kirjoittaa $\mathbf{m} = -e/(2m_0)\mathbf{L}$, joka vastaa myös havaintoja. Samaan tulokseen päädytään, jos tarkastellaan pyörivän hiukkasen magneettimomentin ja liikemäärämomentin suhdetta (HT). Elektronin spinistä johtuva magneettimomentti on kuitenkin kaksinkertainen, joten klassinen kuva ei tässä anna oikeaa ennustetta. Samalla nähdään, ettei spiniä voida selittää arkipäiväisen mielikuvan mukaan pyörimisestä johtuvaksi, vaan kyseessä on puhtaasti kvanttimekaaninen suure.

Atomin magneettimomentti muodostuu elektronien spinien ja rataliikkeen magneettimomenteista, jotka yleensä pyrkivät kumoamaan toisensa pareittain. Jos atomilla tai molekyylillä on parillinen määrä elektroneja, sen magneettimomentti yleensä puuttuu. Muuten atomien magneettimomentit ovat samaa suuruusluokkaa kuin elektroneilla.

Ulkoinen magneettikenttä suuntaa atomien ja metallien vapaiden elektronien magneettimomenteja siten, että niiden kenttä vahvistaa ulkoista kenttää aineessa. Tämä selittää paramagnetismin. Lämpötilan noustessa lämpöliike häiritsee atomien järjestäytymistä, jolloin susceptiivisuus pienenee. Vastaavasti lämpötilan nousu heikentää pysyvien sähködipolien suuntautumista aiheutuvan polarisoitumista.

Ulkoinen magneettikenttä vaikuttaa myös elektronien rataliikkeeseen. Tällöin atomiin indusoituu magneettimomentti, joka suuntautuu ulkoista kenttää vastaan, mikä selittää diamagnetismin. Ilmiö tapahtuu kaikissa aineissa, mutta peittyi molekyylien magneettimomenttien alle, jos molekyyleillä on magneettimomenttia (vrt. pysyvä ja indusoituva polarisaatio sähkökentän vaikutuksesta). Diamagneettinen susceptiivisuus ei riipu merkittävästi lämpötilasta, koska atomien lämpöliike ei pysty häiritsemään nopeasti ulkoiseen kenttään sopeutuvia elektroneja.



Kuva 10.3: Magneettivuon tiheys ferromagneettisessa aineessa ei ole magnetoivan kentän yksikäsitteinen funktio. Kuvaan on piirretty myös magneetoitumiskäyrä (*a*).

10.6 Ferromagnetismi

Joissain kiinteissä aineissa atomien välinen vuorovaikutus pyrkii suuntaamaan niiden magneettimomentit samansuuntaisiksi, jolloin muodostuu atomin kokoon nähden suuria magneettisia alkeisalueita. Niissä kaikkien atomien magneettimomentit ovat samansuuntaisia. Ulkoinen kenttä puolestaan kasvattaa alkeisalueita ja pyrkii kääntämään kaikkien alueiden magneettimomentit samansuuntaiseksi. Tämä on ferromagnetismin perusmekanismi. Ferromagneettisia aineita ovat esimerkiksi rauta (Fe), koboltti (Co) ja nikkeli (Ni) sekä näiden monet yhdisteet. Riittävän korkeassa lämpötilassa (Curie-pisteessä) ferromagneettinen aine muuttuu paramagneettiseksi. Raudan Curie-piste on 770°C ja nikkelin 358°C .

Myös ferromagneettisille aineille on tapana kirjoittaa rakenneyhtälö μ :n avulla, mutta nyt $\mu = \mu(\mathbf{H})$, joka ei ole välttämättä yksikäsitteinen funktio. Vastaesimerkkinä on hystereesi (kuva 10.3), jossa ja magnetoivan kentän \mathbf{H} ja aineen magneettivuon tiheyden \mathbf{B} välinen yhteys on erilainen riippuen siitä, ollaanko magnetoivaa kenttää kasvattamassa vaiko pienentämässä. Suskeptiivisuus χ_m on siis kentän \mathbf{H} funktio ja on yleisesti ottaen iso.

Kun kentän \mathbf{H} voimakkuutta kasvatetaan, aineen magneetoituminen voimistuu (kuva 10.3). Tätä voi jatkaa kuitenkin vain tiettyyn kyllästysarvoon \mathbf{M}_s asti. Tämän jälkeenkin \mathbf{B} -kenttä jatkaa kasvamistaan lineaarisesti termin $\mu_0\mathbf{H}$ myötä. Olkoon ferromagneetti nyt magneetoitu tällä tavoin ja annetaan \mathbf{H} :n alkaa pienetä. Nyt \mathbf{B} -kenttä ei pienene saman käyrän mukaisesti vaan tapahtuu kuvassa 10.3 esitetty hystereesi-ilmiö.

Ferromagnetismin vastakohtana on tilanne, jossa järjestyneen vastakkaisuuntaisista spineistä muodostuvan rakenteen magneettinen momentti on nolla. Tällaista ainetta kutsutaan **antiferromagneetiksi**. Vielä yleisempi järjestynyt rakenne on sellainen, jossa on vastakkaisia spinejä, mutta kuitenkin nollassa poikkeava kokonaismagneettimomentti. Tällaisia aineita kutsutaan **ferriteiksi**. Niitä ovat esimerkiksi tietyt rautaoksidit (MFe_2O_3 , missä M on jokin kaksivalenssinen metalli-ioni). Tunnetuin ferritti lienee magnetiitti (Fe_3O_4). Ferrittien teknologinen merkitys on niiden korkeissa magnetoituman kyllästymisarvoissa ja huonossa sähkönjohtavuudessa. Ferrittien tyypilliset resistiivisyydet ovat luokkaa $1\text{--}10^4 \Omega\text{m}$, kun raudan resistiivisyys on vain $10^{-7} \Omega\text{m}$. Ferrittejä käytetään etenkin korkeataajuuslaitteissa, joissa pyörrevirtoihin liittyvä energiahäviö on ongelma.

10.7 Epälineaariset energiahäviöt

Todellinen makroskooppinen ferromagneetti käyttäytyy huomattavasti molekyyalitasoa rakeisempana. Aine koostuu ferromagneettisista alueista, jotka ovat magnetoituneet eri suuntiin ja joiden välillä on suuruusluokkaa 100 atomin paksuisia seiniä. Kun nämä alueet järjestyvät uudelleen ulkoisen magneettikentän muuttuessa, syntyy kitkaa, joka kuluttaa energiaa. Tarkasteltaessa aiemmin sähkömagneettista energiaa väliaineet oletettiin lineaarisiksi. Ferromagneettinen aine on kuitenkin epälineaarista ja eteen tulee kysymys, mitä tapahtuu, kun hystereesisilmukkaa kierretään ympäri. Tämän selvittämiseksi tarkastellaan virtapiiriä, jonka muodostaa ferromagneettisen aineen ympärille kierretty kela (N kierrosta), johon ulkoinen energian lähde syöttää virtaa.

Jos magneettivuo kelan läpi muuttuu tekijällä $\delta\Phi$, niin ulkoinen energianlähde tekee sähkömotorista voimaa vastaan työn

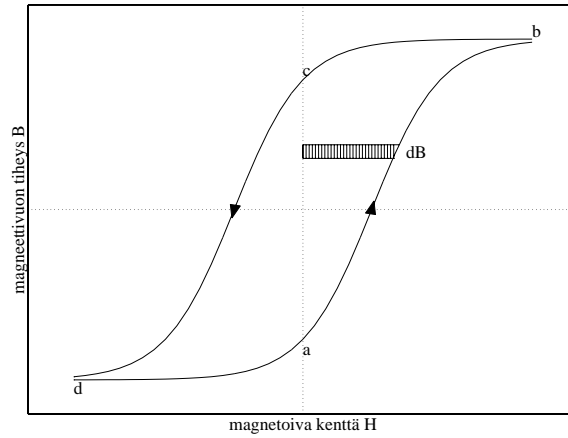
$$\delta W_b = NI\delta\Phi \quad (10.35)$$

Ajatellaan ferromagneetti pätkäksi magneettista silmukkaa eli aluetta, jossa magneettikenttä poikkeaa nollassa. Tällöin kelan kohdalla Amperen kiertosäännön mukaan $NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$. Merkitsemällä magneettisen silmukan pinta-alaa $d\mathbf{l}$:n kohdalla A :lla saadaan

$$\delta W_b = \oint \delta\Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (10.36)$$

Mikäli ferromagneetti käyttäytyy reversiibelisti, saadaan systeemin magneettinen energia integroimalla magneettivuon tiheys arvosta $\mathbf{B} = 0$ lopulliseen arvoonsa. Lineariselle aineelle tulos on luvusta 8 tuttu

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (10.37)$$



Kuva 10.4: Yksikkötilavuutta kohti tehty työ ferromagneettisessa syklissä.

Lauseke 10.36 on kuitenkin yleisempi ja antaa oikean työn myös hystereesitilanteessa. Magneettikentän muutosta vastaava työ yksikkötilavuudessa on

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (10.38)$$

Tarkastellaan nyt hystereesisykliä, joka alkaa H :n arvosta 0, kasvaa arvoon H_{max} , pienenee arvoon $-H_{max}$ ja palaa sen jälkeen takaisin nolnaan (kuva 10.4).

Työ kuvan 10.4 pisteestä a pisteeseen b

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H dB \quad (10.39)$$

on hystereesikäyrän ab ja B -akselin välinen pinta-ala ja se on positiivinen koska sekä H että dB ovat positiivisia. Vastaavasti $(w_b)_{bc}$ on B -akselin ja käyrän bc välinen pinta-ala, mutta se pitää laskea negatiivisena, koska $dB < 0$. Samoin lasketaan työ negatiivisilla H ja lopputulos on, että yhden hystereesisyklin myötä tehty työ on hystereesisilmukan sisään BH -tasossa jäävä pinta-ala

$$w_b = \oint H dB \quad (10.40)$$

Täyden syklin jälkeen ferromagneetin tila on sama kuin alussa, joten sen magneettinen energia on yhtä suuri kuin aluksi. Ulkoinen energianlähde on kuitenkin tehnyt työtä, joka on kulunut magneettisten alueiden uudelleen järjestäytymiseen. Kyseessä on palautumaton SM-energian häviö lämmöksi. Tämän ilmiön vuoksi esimerkiksi muuntaja lämpenee. Yleensäkin hystereesihäviöt on tärkeää huomioida rakennettaessa vaihtovirtalaitteita. Ylläoleva

lasku tehtiin yhdelle hystereesisyklille, joten mitä korkeammalla taajuudella laite toimii, sitä nopeammin hystereesi hävittää energiaa.

Käytännössä ferromagneettinen sykli on usein mielekkäämpää käsitellä magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} ja magnetoituman avulla ilman viittausta magneettivuon tiheyteen \mathbf{B} . Tämä onnistuu seuraavasti ($\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$):

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.41)$$

Nyt termi $\mu_0 H dH$ on tyhjässä tehty työ, joka on nolla integroituna kokonaisen syklin yli ja termi $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ on materiaalille ominainen työ. Koko syklin yli työ on siis

$$w_b = \mu_0 \oint H dM = -\mu_0 \oint M dH \quad (10.42)$$

missä on käytetty hyväksi lauseketta $d(MH) = H dM + M dH$. Kokonaisdiferentiaalin $d(MH)$ integraali on nolla riippumatta aineen ominaisuuksista.

Luku 11

Sähkömagneettiset aallot

Tämä luku käsittelee monokromaattisten sähkömagneettisten aaltojen etene- mistä erilaisissa homogeenisissa väliaineissa (RMC luku 17; CL käsittelee aaltoliikettä luvussa 10). Epähomogeenisuudet ja niistä aiheutuvat heijas- tumis- ja taittumisilmiöt käsitellään seuraavassa luvussa. SM-aaltojen spek- tri on erittäin laaja. Esimerkkejä löytyy hyvin matalista taajuuksista aina gamma-säteisiin, joiden taajuudet ovat suuruusluokkaa $10^{20} - 10^{22}$ Hz.

11.1 Tasoallot eristeessä

Eristeellä tarkoitetaan tässä yhteydessä niin huonosti johtavaa väliainetta, ettei sähkönjohtavuutta σ tarvitse huomioida ($\omega\epsilon \gg \sigma$). Tutkitaan aalto- yhtälön ratkaisua monokromaattiselle aallolle, jolla on nimensä mukaisesti vain yksi taajuus. Tämä tarkoittaa olennaisesti samaa kuin tarkastella aallon **Fourier-komponentteja** erikseen. Tällöin on hyödyllistä käyttää komp- leksilukuesitystä ja kirjoittaa aikariippuvuus muodossa $e^{-i\omega t}$, esimerkiksi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (11.1)$$

Etuna on se, että aikaderivaatta korvautuu tekijällä $-i\omega$.

Huom. Käytettäessä kompleksilukuesitystä **fysikaalinen suure on kompleksisen suureen reaaliosa** (voitaisiin myös käyttää imaginaariosaa). Tämä on erityisen tärkeää pitää mielessä kerrottaessa kompleksisuureita. Ensin on laskettava loppuun asti kompleksiluvuilla ja otettava lopputulok- sesta reaaliosa.

Huom. Kirjallisuudessa on yleisesti käytössä myös aikariippuvuus $e^{+i\omega t}$.

Aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.2)$$

monokromaattiselle aallolle on

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.3)$$

Tämä Helmholtzin yhtälö kuvaa aallon muutosta paikan funktiona. Oletetaan, että kenttä on riippumaton x - ja y -koordinaateista. Tällöin

$$\frac{d^2\mathbf{E}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(z) = 0 \quad (11.4)$$

Tämä on harmonisen värähtelijän yhtälö, jolla on ratkaisuna

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm ikz} \quad (11.5)$$

missä \mathbf{E}_0 on vakiovektori ja $k = \omega/c$ eli **aaltoluku**. Aaltoyhtälöllä on siis ratkaisuna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp kz)} \quad (11.6)$$

jonka reaaliosa on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \mp kz) = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t \mp z/c) \quad (11.7)$$

Kyseessä on joko $+z$ - tai $-z$ -akselin suuntaan nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ etenevä siniaalto. z -akselin valinta ei tässä ole rajoittava tekijä. Aaltoluku voidaan esittää vektorina \mathbf{k} , jolloin aallon paikkariippuvuus tulee muotoon $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

Edellä on käytetty aaltoliikeopista tuttuja käsitteitä. **Kulmataajuuden** ω yksikkö on radiaania sekunnissa. Vastaava **värähtelytaajuus** on $f = \omega/2\pi$, jonka yksikkö on puolestaan hertsi (Hz). Aaltoluvun yksikkö on m^{-1} ja vastaava **aallonpituus** on $\lambda = 2\pi/k$. Aallon **vaihenopeus** on $v_p = \omega/k$, joka tyhjössä on sama kuin valon nopeus.

Mikäli väliaineen μ ja ϵ poikkeavat tyhjän suureista, aallon vaihenopeudeksi tulee

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (11.8)$$

Tällöin taajuuden ja aaltoluvun välinen relaatio eli **dispersioyhtälö** on

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{n}{c}\omega \quad (11.9)$$

missä on määritelty väliaineen **taitekerroin**

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (11.10)$$

Taitekerroin on tärkeä parametri tarkasteltaessa aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnoilla.

Muotoa $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ olevia Maxwellin yhtälön ratkaisuja kutsutaan **taso-**
aalloiksi. Mikäli yhtälöillä voidaan annetussa tilanteessa olettaa olevan
tasoaalto ratkaisuja, voidaan myös paikkaderivaatat korvata seuraavasti

$$\begin{aligned}\nabla &\rightarrow i\mathbf{k} \\ \nabla \cdot &\rightarrow i\mathbf{k} \cdot \\ \nabla \times &\rightarrow i\mathbf{k} \times\end{aligned}$$

Fysikaalisesti tasoallolle voidaan löytää suunta, jota vastaan kohtisuoral-
la, mutta muuten mielivaltaisella tasolla aallon vaihe on annetulla hetkellä
sama kaikissa tason pisteissä. Eristeessä tämä on yhtäpitävää sen kanssa,
että kyseisillä tasoilla sähkö- ja magneettikentät ovat vakioita. Vaihenopeus
tarkoittaa puolestaan vakiovaiheen ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{vakio}$) etenemisnopeut-
ta. Johtavissa väliaineissa vakiovaiheen ja vakiokenttien välinen relaatio on
monimutkaisempi.

Oletetaan, ettei väliaineessa ole vapaita varauksia eikä virtoja. Tasoaal-
loille saadaan Maxwellin yhtälöistä yhtälöryhmä

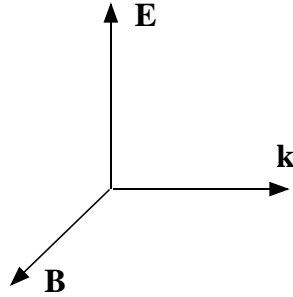
$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D}\end{aligned}\tag{11.11}$$

Huom. RMC merkitsee tasoallon kenttävektoreita lisäämällä niiden päälle
hatun ($\hat{\mathbf{E}}$), mutta tässä ei ole sekaannuksen vaaraa, kunhan muistetaan, että
nyt aika- ja paikkariippuvuudet ovat eksponenttifunktiossa. Silloin kun on
tarpeen erotella tasoallon vektori vektorista $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, kirjoitetaan edellinen
mieluummin $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ tai $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$, mikä viittaa siihen, että kenttä on määritelty
tietylle taajuudelle ja aaltoluvulle. On hyvä huomata myös, että $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ on
yleisesti **kompleksivektori**.

Oletetaan väliaine lineaariseksi ja kirjoitetaan $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Käytännössä
kaikilla lineaarisilla väliaineilla $\mu = \mu_0$ on hyvä approksimaatio. Silloin
Maxwellin yhtälöt tulevat muotoon

$$\begin{aligned}\epsilon_r \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_r \mathbf{E}\end{aligned}\tag{11.12}$$

Koska tarkastelemme monokromaattisia aaltoja, voimme pitää taajuutta ω
annettuna. Oletetaan, että ϵ_r on tarkasteltavalle aineelle ominainen vakio.
Vektorit \mathbf{k} , \mathbf{E} ja \mathbf{B} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja aaltoa kutsutaan
poikittaiseksi (transversaaliseksi) (kuva 11.1).



Kuva 11.1: Sähkömagneettisen tasoallon sähkökenttä \mathbf{E} ja magneettikenttä \mathbf{B} ovat toisiaan ja etenemissuunnan ilmaisevaa aaltolukuvektoria \mathbf{k} vastaan kohtisuorassa ja muodostavat oikeakätisen kolmikon $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$.

Sähkö- ja magneettikentän välinen suhde seuraa Faradayn lakia vastaavasta yhtälöstä: $B = (k/\omega)E$. \mathbf{k} :n itseisarvo saadaan laskemalla

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (11.13)$$

Toisaalta $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E}$. Koska $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$,

$$-\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \quad (11.14)$$

eli dispersioyhtälö saa muodon

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c} \quad (11.15)$$

Dispersioyhtälöä kutsutaan usein dispersiorelaatioksi. Se voidaan kirjoittaa **taitekertoimen** $n = \sqrt{\epsilon_r}$ avulla

$$k = n \frac{\omega}{c} \quad (11.16)$$

Oikea aalto ei välttämättä ole monokromaattinen. Jos aalto koostuu joukosta diskreettejä taajuuksia ω_i , Maxwellin yhtälöiden lineaarisuuden vuoksi kokonaissähkökenttä voidaan esittää summana

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i) \exp[-i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})] \quad (11.17)$$

Vektoreita $\mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i)$ kutsutaan aallon **Fourier-komponenteiksi**. Jos \mathbf{k} ja ω käsitellään jatkuvina, funktio $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ on $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:n **Fourier-muunnos** (kertaa FYMM I:stä!).

11.2 Aaltojen polarisaatio

Tarkastellaan seuraavaksi aaltojen polarisaatiota. Peruskurssilta tuttu lineaarinen polarisaatio on helposti mielletävä ilmiö, mutta ympyräpolarisaatio kannattaa miettiä huolellisesti läpi. Asiaa ei lainkaan helpota, että vasen- ja oikeakätisyys määritellään eri lähteissä eri tavoin.

Vektorit $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ ja $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ ovat kompleksivektoreita. Kirjoitetaan \mathbf{E} oikeakätisessä reaalisessa kannassa, jonka yksikkövektorit ovat $(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u} \quad (11.18)$$

missä hattu viittaa kompleksilukuun. Koska tarkastelemme tasoaaltoa, on luonnollista valita \mathbf{u} aallon etenemissuunnaksi, jolloin sähkökenttä on joka hetki ps -tasossa

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \quad (11.19)$$

Ilmaistaan vielä kompleksiset komponentit kompleksitason vaihekulman ϕ avulla

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p}; \quad \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (11.20)$$

missä E_p ja E_s ovat reaalilukuja. s -akselin suunta voidaan valita vapaasti (kunhan se on kohtisuorassa u -akseliin), joten ϕ_s voidaan asettaa nolaksi ja ottaa käyttöön merkintä $\phi_p = \phi$. Niinpä (\mathbf{k}, ω) -avaruuden sähkökenttä on

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s} \quad (11.21)$$

ja sitä vastaava (\mathbf{r}, t) -avaruuden kenttä puolestaan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (11.22)$$

Aallon **fysikaalinen** sähkökenttä on tämän reaaliosta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (11.23)$$

Aallon sähkökentällä on kaksi komponenttia, joiden **reaaliset amplitudit** E_p ja E_s voivat olla eri suuria ja lisäksi komponentit voivat värähdellä eri vaiheessa **vaihe-eron** ollessa ϕ . Tarkastellaan muutamaa erikoistapausta. Valitaan kaikissa tilanteissa tarkastelupisteeksi $\mathbf{r} = 0$. (Piirrä itse kuva kaikista tapauksista!)

1. **Komponentit samassa vaiheessa** $\phi = 0$. Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t \quad (11.24)$$

Sähkökenttä värähtelee $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$:sta $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$:een osoittaen koko ajan suuntaan $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$. Tämä on **lineaarinen polarisaatio**. Lineaarinen polarisaatio on kyseessä myös, jos $E_p = 0$ tai $E_s = 0$, koska silloin aalto värähtelee toisen koordinaattiakselin suunnassa. Myös 180 asteen vaihe-ero antaa lineaarisen polarisaation ($E_p \rightarrow -E_p$).

2. **Vaihe-ero** $\phi = \pm\pi/2$. Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = \pm E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \quad (11.25)$$

Nyt sähkökenttävektori pyörii ps -tasossa piirtäen ellipsin joko myötä- tai vastapäivään riippuen katselusuunnasta. Tämä on **elliptinen polarisaatio**.

3. **Vaihe-ero** $\phi = \pm\pi/2$ ja $E_p = E_s$. Tällöin ellipsi palautuu ympyräksi ja kyseessä **ympyräpolarisaatio**

Jos vaihe-ero on jotain muuta kuin $\phi = \pm\pi/2$, kyseessä on aina elliptinen polarisaatio (mahdollisesti surkastunut lineaariseksi).

Tarkastellaan sitten sähkökentän pyörimissuuntaa. Rajoitutaan yksinkertaisuuden vuoksi ympyräpolarisaatioon. Jos yllä $\phi = +\pi/2$, pyörii aallon sähkökenttä myötäpäivään, kun katsotaan kohti saapuvaa aaltoa. **Optiikassa** tätä kutsutaan **oikeakätisesti polarisoituneeksi** aalloksi. Jos pyörimistä tarkastellaan aallon etenemissuuntaan, se kuitenkin näyttää toteuttavan vasemman käden kiertosäännön. Tarkasteltaessa sähkömagneettisten, esim. radioaaltojen ominaisuuksia magnetoituneessa johtavassa väliaineessa (esim. plasmassa) tällaista aaltoa kutsutaankin **vasenkätisesti polarisoituneeksi**. Tämä valinta on sikäli johdonmukainen, että näin polarisoitunut aalto muodostaa avaruudessa **vasenkätisen ruuvin**. Aallolla sanotaan olevan **negatiivinen helisiteetti** ja voidaan puhua negatiivisesti polarisoituneesta aallosta. Vastaavasti $\phi = -\pi/2$ antaa päinvastaiset nimitykset. Meidän ei tarvitse tällä kurssilla murehtia oikea- tai vasenkätisyyksien sekamelskasta, mutta asia on hyvä tietää vastaisen varalta.

Todetaan vielä, että mielivaltainen elliptinen polarisaatio voidaan hajottaa eri vaiheissa värähtelevien oikea- ja vasenkätisesti polarisoituneiden aaltojen summaksi. Esimerkiksi lineaarinen polarisaatio on summa kahdesta eri suuntiin pyörivästä samanamplitudisesta komponentista.

11.3 Sähkömagneettisen aallon energia

Kompleksisen sähkö- tai magneettikentän reaali-osa on fyysikaalinen mitattava kenttä. Koska Maxwellin yhtälöt ovat lineaariset kenttien suhteen ja toteutuvat siten erikseen reaali- ja imaginaariosille, tästä ei tullut edellä ongelmia. Kenttien energiat ja Poyntingin vuo ovat kuitenkin vektoreiden tuloja, jolloin reaali- ja imaginaariosat sekoittuvat toisiinsa eli $\text{Re}(A \cdot B) \neq \text{Re} A \cdot \text{Re} B$. Niinpä on syytä ottaa ensin suureiden reaali-osa ja kertoa ne vasta sitten keskenään.

Tarkastellaan aaltoa pisteessä $\mathbf{r} = 0$. Tällöin $\mathbf{E}(0, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t)$ ja

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2(\omega t) \quad (11.26)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (11.27)$$

Koska $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ja $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, on $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, joten tasoaallon energiatiheys on

$$u_w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \quad (11.28)$$

Toisaalta $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH \mathbf{u}$, joten Poyntingin vektori osoittaa aallon etenemissuuntaan ja on suuruudeltaan

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (11.29)$$

Tasoaaltojen energiatiheys ja energiavuo pinta-alayksikköä kohti saavat siis hyvin yksinkertaiset lausekkeet ja lisäksi

$$S = \frac{c}{n} u_w \quad (11.30)$$

Jos vaihenopeutta käsitellään aallon etenemissuuntaisena vektorina \mathbf{v}_p , voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{S} = u_w \mathbf{v}_p \quad (11.31)$$

Tasoaallon Poyntingin vuo voidaan siis ymmärtää energiatiheyden etenemisenä vaihenopeuden mukana.

Tasoaallon energiatiheys u_w ja energiavuo \mathbf{S} ovat verrannollisia suureeseen E^2 . Ympyräpolarisoituneelle aallolle ($\phi = \pm\pi/2$)

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2 \quad (11.32)$$

joka on vakio. Lineaarisesti polarisoituneelle aallolle ($\phi = 0, \pi$) puolestaan

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t \quad (11.33)$$

joka vaihtelee nollan ja maksiminsa välillä kaksi kertaa aallon taajuudella.

Sähkömagneettisen aallon mukanaan viemää energiaa tarkastellaan usein korkeataajuisten aaltojen tapauksessa. Tällöin E^2 :n aikakeskiarvo on tärkeämpi suure kuin sen ajallinen vaihtelu. Koska $\cos^2(\omega t - \phi)$:n keskiarvo yhden jakson aikana on $1/2$, kaikilla polarisaatioilla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} (E_p^2 + E_s^2) \quad (11.34)$$

Tämän voi kirjoittaa myös kompleksisen \mathbf{E} -vektorin avulla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \quad (11.35)$$

missä * viittaa kompleksikonjugaattiin. Tämä lauseke kertoo myös, että koko ongelma voidaan käsitellä alusta loppuun kompleksisena, mutta silloin mitattavat suureet on käsiteltävä jakson yli otettuina keskiarvoina.

Sähkömagneettisella kentällä on energian lisäksi liikemäärää ja impulssimomenttia. SM-aallot kuljettavat myös näitä suureita mukanaan.

11.4 Tasoaallot johteessa

Linearisessa homogeenisessa väliaineessa, jossa ei ole vapaita varauksia (μ , ϵ ja σ ovat vakioita ja $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$) aaltoyhtälöt saavat muodon (HT)

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (11.36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (11.37)$$

Nämä yhtälöt ovat seurausta Maxwellin yhtälöistä. Päinvastainen ei kuitenkaan ole totta. Yhtälöillä on ratkaisuja, jotka eivät välttämättä toteuta Maxwellin yhtälöitä, joten ratkaisujen fysikaalisuus on tarkastettava erikseen käytännön ongelmissa.

Sähkökentän aaltoyhtälöä (11.37) kutsutaan lennätinyhtälöksi. Se on standardiesimerkki osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta Fouriermuunnosten avulla. Tehdään tässä sama ratkaisu oikaisemalla sikäli, että oletetaan tasoaaltoratkaisu ja lähdetään liikkeelle Maxwellin yhtälöistä, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H} \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} \end{aligned} \quad (11.38)$$

Koska $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ja $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, niin aalto on jälleen poikittainen.

Valitaan koordinaatisto siten, että $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_x$ ja $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$. Tällöin

$$\begin{aligned} kE_x &= \omega\mu H_y \\ ikH_y &= -(\sigma - i\omega\epsilon)E_x \end{aligned} \quad (11.39)$$

Tästä (tai suoraan aaltoyhtälöstä) saadaan dispersioyhtälö $k = k(\omega)$:

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega \quad (11.40)$$

k on kompleksiluku, joka voidaan kirjoittaa muodossa $k = |k|e^{i\alpha}$ ja dispersioyhtälöstä voidaan ratkaista

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\mu\omega\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \sigma^2}} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right) \end{aligned} \quad (11.41)$$

Lennätinyhtälön ratkaisu harmonisille aalloille on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \mathbf{e}_x e^{i(\operatorname{Re}(k)z - \omega t)} e^{-\operatorname{Im}(k)z} \\ &= E_0 \mathbf{e}_x \exp[i(|k|z \cos \alpha - \omega t)] \exp[-|k|z \sin \alpha] \end{aligned} \quad (11.42)$$

Tässä on valittava α :n vaihe siten, että $\operatorname{Im}(k) > 0$ eli $\sin \alpha > 0$ (HT: piirrä kuva kompleksitasossa). Tällöin **aalto vaimenee** edetessään väliaineeseen (tekijä $e^{-|k|z \sin \alpha}$), mikä on fysikaalisesti mielekäs ratkaisu. Vaihenopeudeksi tulee nyt

$$v_p = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k)} = \frac{\omega}{|k| \cos \alpha} \quad (11.43)$$

Etäisyys, jolla aallon amplitudi vaimenee tekijällä e , on väliaineen **tunkeutumissyvyys** (skin depth):

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{Im}(k)} = \frac{1}{|k| \sin \alpha} \quad (11.44)$$

Väliaineen **impedanssi** (aaltovastus) määritellään

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \sigma^2}}} \exp\left[-\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)\right] \quad (11.45)$$

Impedanssin yksikkö on vastus: $[Z] = \Omega$ (kertaa impedanssin, admittanssin ja reaktanssin käsitteet KSII:sta tai lue RMC:n luku 13).

Esimerkkejä

1) Hyvä johde: $\sigma \gg \epsilon\omega \Rightarrow \alpha = 45^\circ$; $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$

$$v_p = \delta\omega \tan \alpha = \delta\omega$$

$$\text{Kuparille: } \begin{cases} f = 50 \text{ Hz} & \delta \approx 1 \text{ cm} & v_p \approx 3 \text{ m/s} \\ f = 50 \text{ MHz} & \delta \approx 10 \mu\text{m} & v_p \approx 3 \times 10^3 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{-i\pi/4} \Rightarrow 45^\circ \text{ vaihe-ero } \mathbf{E}\text{:n ja } \mathbf{H}\text{:n välillä.}$$

2) Eriste: $\sigma = 0$, $\epsilon > 0$, $\mu = \mu_0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ eli aalto ei vaimene tunkeutuessaan eristeeseen!

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \equiv Z_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}},$$

missä Z_0 on **tyhjän impedanssi**: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega$.

Yksinkertaisella laskulla voidaan osoittaa, että aallon Fourier-komponenttien yhtälöryhmä (11.38) voidaan palauttaa yhtälöryhmän (11.12) kaltaiseksi kirjoittamalla

$$\begin{aligned} \epsilon_r \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \hat{\epsilon}_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (11.46)$$

missä on otettu käyttöön **kompleksinen dielektrisyysvakio** $\hat{\epsilon}_r$

$$\hat{\epsilon}_r = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (11.47)$$

Nyt myös taitekerroin kannattaa määritellä kompleksilukuna

$$\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}_r \quad (11.48)$$

Tällöin kompleksinen aaltoluku \hat{k} toteuttaa yhtälön

$$\hat{k}^2 = \frac{\hat{n}^2 \omega^2}{c^2} \quad (11.49)$$

11.5 Palloaallot

Tasoaalto on erittäin käyttökelpoinen matemaattinen idealisaatio. Todellisuudessa sähkömagneettinen aalto kuitenkin synnytetään esimerkiksi äärellisen kokoisella antennilla. Antennin lähellä sähkö- ja magneettikenttien rakenne on hyvinkin monimutkainen ja riippuu käytetyn antennin geometriasta. Kun aalto lähtee etenemään avaruuteen, se laajenee ja tarkasteltaessa aaltorintamaa riittävän pienellä alueella se näyttää tasoaaltorintamalta. Joskus on kuitenkin tarpeen ottaa huomioon aaltorintaman globaali muoto. Tarkastellaan esimerkkinä origosta joka suuntaan eteneviä pallonmuotoisia aaltorintamia, **palloaalloja**. Periaatteessa ongelma ratkaistiin jo luvussa 9, jossa johdettiin viivästyneet potentiaalit ja myös palloaallon Greenin funktio. Emme kuitenkaan laskeneet itse kenttiä, sillä derivaattojen laskeminen viivästyneistä potentiaaleista on aika työläs tehtävä.

Tyhjössä etenevän SM-aallon sähkökentän aaltoyhtälö on

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.50)$$

josta monokromaattiselle aallolle tulee vektorimuotoinen Helmholtzin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.51)$$

Nyt sähkökenttä pitäisi esittää pallokoordinaattien avulla. Ongelmaksi tulee termin $\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$ kirjoittaminen pallokoordinaateissa. Termin $-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ radiaalikomponentissa ovat mukana myös muut pallokoordinaatiston muuttujat ja samoin käy atsimutaali- ja napakulman komponenteille. Lopputulos on kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön ryhmä, joissa kaikissa on mukana kaikki sähkökentän komponentit. Vektorimuotoinen Laplaceen yhtälö voidaan separoida kunkin muuttujan erillisiksi differentiaaliyhtälöiksi vain karteesisissa koordinaateissa.

Tarkastellaan tämän ongelman ratkaisemiseksi skalaarimuotoista Helmholtzin yhtälöä

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0 \quad (11.52)$$

Nyt on suoraviivainen harjoitustehtävä osoittaa, että

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (11.53)$$

on (11.51):n ratkaisu, ja $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Magneettikenttä on valittava siten, että se yhdessä sähkökentän kanssa toteuttaa Maxwellin yhtälöt. Kirjoitetaan Faradayn laki muodossa

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (11.54)$$

jolloin

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (11.55)$$

mikä toteuttaa loput Maxwellin yhtälöt tyhjössä (HT). Voisimme aivan yhtä hyvin lähteä liikkeelle \mathbf{B} -kentän aaltoyhtälöstä ja löytää ratkaisuparin

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (11.56)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (11.57)$$

Ratkaisuparissa (\mathbf{E}, \mathbf{B}) sähkökenttä on jokaisessa pisteessä tangentialinen origokeskisen pallon pinnan kanssa. Tätä aaltoa kutsutaan joskus **transver-saaliseksi sähköiseksi** (TE) moodiksi. Ratkaisuparissa $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ magneettikentällä on puolestaan sama ominaisuus ja aaltoa kutsutaan **transver-saaliseksi magneettiseksi** (TM) moodiksi. (HT: piirrä kuvat!)

Nyt on vielä löydettävä ψ Helmholtzin skalaariyhtälön ratkaisuna. Tässä käytetään Laplacen yhtälön ratkaisemisesta tuttua muuttujien separointia pallokoordinaatistossa (luku 2). Ratkaistava yhtälö on pallokoordinaateissa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (11.58)$$

Erona Laplacen yhtälöön on siis termi $k^2 \psi$.

Tehdään tällä kertaa separointiyrite $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Sijoitetaan tämä ylläolevaan yhtälöön. Jaetaan tulos vielä ψ :llä ja kerrotaan tekijällä $r^2 \sin^2 \theta$, mikä antaa yhtälön

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (11.59)$$

ϕ -riippuvuuden osalta separointi antaa saman yhtälön kuin Laplacen yhtälön tapauksessa

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (11.60)$$

θ - ja r riippuvat yhtälöt ovat puolestaan

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_{lm} = 0 \quad (11.61)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - k^2 r^2] R_l = 0 \quad (11.62)$$

Nyt yhtälön (11.60) ratkaisut ovat tietenkin muotoa $\Phi_m = e^{\mp im\phi}$ ja yhtälön (11.61) ratkaisut ovat tutut Legendren liittofunktiot (luku 2). Termi $k^2 \psi$ muuttaa siis ainoastaan radiaalista yhtälöä (11.62), jonka ratkaisut saadaan tekemällä ensin muuttujanvaihdos $\xi = kr$, jolloin

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{dR_l}{d\xi} - [l(l+1) - \xi^2] R_l = 0 \quad (11.63)$$

Tästä saadaan **Besselin yhtälö** sijoituksella $R_l = \xi^{-1/2} Z_l$:

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - [(l+1/2)^2 - \xi^2] Z_l = 0 \quad (11.64)$$

Tämä on yksi matemaattisen fysiikan tärkeimpiä yhtälöitä, jonka ratkaisuina ovat Besselin ja Neumannin funktiot $J_{l+1/2}(kr)$ ja $N_{l+1/2}(kr)$. Pallokoordinaatistossa näistä muodostetaan erityisiä pallobesseleitä

$$j_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{l+1/2}(kr) \quad (11.65)$$

$$n_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} N_{l+1/2}(kr) \quad (11.66)$$

Pallobesselit ovat alkeisfunktioita, joten niitä ei tarvitse pelätä: esimerkiksi $j_0(r) = \sin r/r$, $n_0(r) = -\cos r/r$. Jääköön näiden enempi pohdiskelu kuitenkin FYMM II:n huoleksi.

Nyt meillä on koossa yleinen ratkaisu skalaarimuotoiselle Helmholtzin yhtälölle muodossa

$$\psi_{lm} = \sqrt{\pi/2kr} Z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) e^{\mp im\phi} \quad (11.67)$$

Sijoittamalla tämä TE- tai TM-moodin kenttien lausekkeisiin saadaan niiden paikkariippuvuus. Yksinkertaisin fysikaalisesti mielenkiintoinen valinta on

$$\psi_{10} = \frac{1}{kr} e^{ikr} \left[1 + \frac{i}{kr} \right] \cos \theta \quad (11.68)$$

josta saadaan TE-moodille

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi_{10} = -E_0 e^{ikr} \left[\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right] \sin \theta \mathbf{e}_\phi \quad (11.69)$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -i \frac{1}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{i}{\omega} E_0 e^{ikr} \left\{ \left[\frac{1}{kr^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right] 2 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[\frac{i}{r} - \frac{1}{kr^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right] \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right\} \end{aligned} \quad (11.70)$$

Tulemme myöhemmin näkemään, että tämä on magneettisen dipoliantennin säteilemä aaltokenttä.

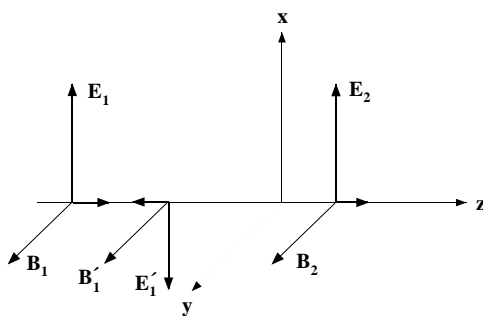
Luku 12

Aaltojen heijastuminen ja taittuminen

Tarkastelemme tässä luvussa sähkömagneettisten aaltojen heijastumis- ja taittumisominaisuuksia erilaisten väliaineiden rajapinnalla, ja lopuksi tutustutaan yksinkertaiseen dispersiivisen väliaineen malliin. Rajoitumme monokromaattisiin aaltoihin ja oletamme väliaineet lineaarisiksi ja magnetoitumattomiksi ($\mu = \mu_0$) koko luvun ajan, ellei toisin mainita. Oppimateriaalina on RMC:n luku 18, CL käsittelee asiaa luvussa 10.4; esitiedot KSIII luku 5.

12.1 Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle

Tarkastellaan ensin aallon heijastumista kahden eristeen rajapinnalla, kun aalto saapuu kohtisuoraan pintaa vastaan, siis aaltovektori on pinnan nor-



Kuva 12.1: Heijastuminen ja läpäisy kohtisuoraan xy -tasolle saapuvalla aal-
lolle.

maalin suuntainen (kuva 12.1). $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ kuvaa $+z$ -akselin suuntaan etenevää **saapuvaa** aaltoa, $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{B}'_1)$ $-z$ -akselin suuntaan etenevää **heijastunutta** aaltoa ja $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ rajapinnan **läpäissyttä** aaltoa. Rajapinta on xy -tasossa. Oletetaan, että aallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut x -akselin suuntaan, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{e}_x E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_x E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (12.1)$$

missä $k_1 = n_1 \omega / c$, $k_2 = n_2 \omega / c$. Magneettikenttä saadaan Faradayn laista seuraavasta relaatiosta $\mathbf{B} = (n/c) \mathbf{u} \times \mathbf{E}$, missä $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z$ tulevalle ja läpäisseele aallolle ja $\mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$ heijastuneelle aallolle. Magneettikentät ovat y -akselin suuntaiset:

$$\begin{aligned} c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}'_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{e}_y n_2 E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Kaikilla aalloilla on oltava sama kulmataajuus ω , jotta reunaehdot rajapinnalla toteutuisivat kaikilla ajanhetkillä t . Sähkökentän tangentialikomponentti on jatkuva, joten

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \quad (12.3)$$

Sama pätee epämagneettisessa väliaineessa ($\mu = \mu_0$) myös magneettikentälle. Koska magneettikenttä voidaan ilmaista sähkökentän avulla, saadaan jatkuvuusehdoksi

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x} \quad (12.4)$$

Oletetaan saapuvan aallon amplitudi tunnetuksi ja ratkaistaan heijastuneen ja läpäisseen aallon amplitudit:

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}; \quad E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (12.5)$$

Määritellään **Fresnelin kertoimet** kohtisuoraan tulevalle aallolle:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (12.6)$$

$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (12.7)$$

missä r viittaa heijastumiseen (reflection) ja t läpäisyyn (transmission). Käytännön ongelmissa mitataan yleensä kunkin osa-aallon mukana kulkevaa keskimääräistä energiavuota pinta-alayksikköä kohti eli **intensiteettiä**. Se saadaan Poyntingin vektorista luvun 11.3 mukaisesti

$$\langle S \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2) \quad (12.8)$$

Tässä käsitellyssä tapauksessa valitaan $E_p = E_x$ ja $E_s = 0$. Määritellään nyt **heijastussuhde** (reflektanssi) R_n ja **läpäisysuhde** (transmittanssi) T_n (n viittaa normaalin suuntaiseen saapumiseen) seuraavasti

$$R_n = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = r_{12}^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (12.9)$$

$$T_n = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = \frac{4n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2} \quad (12.10)$$

Mille hyvänsä eristeparille $R_n + T_n = 1$, mikä ilmaisee energian säilymisen.

Elliptiselle polarisaatiolle on tarkasteltava erikseen x - ja y -komponentteja. x -komponenteille pätee yllä oleva tarkastelu sellaisenaan ja y -komponenteille tulee samat Fresnelin kertoimet. Myös y -komponentit pysyvät samassa vaiheessa keskenään, vaikka ne ovatkin eri vaiheessa kuin x -komponentit. Myös heijastus- ja läpäisysuhteet pysyvät ennallaan sillä intensiteetti $\langle S \rangle$ on eri polarisaatiokomponenttien intensiteettien summa.

Esimerkkejä

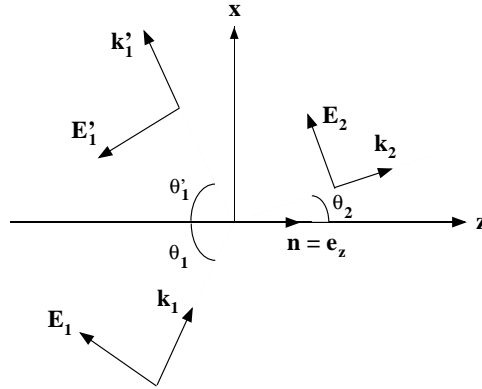
1. Ilman ($n_1 = 1$) ja lasin ($n_2 = 1.5$) rajapinnalla $R_n = 0.04$ ja $T_n = 0.96$.
2. Puhtaan veden taitekerroin näkyvän valon aallonpituudella on $n_2 = 1.33$, joten $R_n = 0.02$. Kun ω on alle 10^{11} s^{-1} , veden suhteellinen permittiivisyys on kuitenkin suuri $K_2 = 81$, joten $n_2 = 9$ ja $R_n = 0.64$. Vesi siis heijastaa huomattavasti tehokkaammin radioaaltoja kuin valoa. Paremmiin sähköä johtavalle merivedelle heijastussuhde on paljon suurempi.

12.2 Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa

Tarkastellaan sitten mielivaltaista saapumiskulmaa. Kuva 12.2 esittää tilanetta, jossa rajapinta on xy -tasossa ja saapuvan aallon aaltovektori xz -tasossa (**saapumistasossa**). Aaltojen polarisaation tarkastelemiseksi valitaan jokaiselle osa-aallolle jälleen $\{\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u}\}$ -kanta, jolloin kuvan tilanteessa kullakin aallolla on vain sähkökentän p -komponentti.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{p}_1 \hat{E}_{1p} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= \mathbf{p}'_1 \hat{E}'_{1p} e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{p}_2 \hat{E}_{2p} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (12.11)$$

Koska kunkin osa-aallon magneettikenttä on kohtisuorassa sekä \mathbf{k} - että \mathbf{p} -vektoreihin nähden, magneettikentällä on vain s -komponentti ja se on tässä geometriassa kaikilla osa-aalloilla y -akselin suuntainen.



Kuva 12.2: Heijastuminen ja taittuminen p -polarisaatiolle.

Vaikka kuva 12.2 näyttää erikoistapaukselta, kyseessä on toinen kahdesta perustilanteesta. Olkoon $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ rajapinnan yksikkönormaali. Jotta aaltokenttä olisi jatkuva rajapinnalla, täytyy aaltojen taajuuden lisäksi myös vaiheiden olla samat missä hyvänsä rajapinnan pisteessä \mathbf{r}_0 , joten

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (12.12)$$

Tästä on helppo (HT) näyttää, että

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}'_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}_2 \quad (12.13)$$

Siis kaikki \mathbf{k} -vektorit ja \mathbf{n} ovat kohtisuorassa vektoria $(\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1)/|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1| = \mathbf{e}_y$ kohtaan, joten kaikkien osa-aaltojen aaltovektorit ovat samassa tasossa.

Muistisääntönä p -komponentti viittaa saapumistasossa olevaan komponenttiin (parallel). Käytämme tällaisesta polarisaatiosta nimitystä **p -polarisaatio**. Radioaaltojen yhteydessä tätä kutsutaan myös **vertikaaliseksi polarisaatioksi**, sillä tarkasteltaessa radioaallon heijastumista ionosfääristä näin polarisoituneen aallon sähkökentällä on pystykomponentti.

Toinen peruspolarisaatio on **s -polarisaatio** tai **horisontaalinen polarisaatio**, jossa sähkökentällä on vain s -komponentti. s viittaa saksankielen sanaan senkrecht (kohtisuora). Tällöin puolestaan osa-aaltojen magneettikentillä on erisuuntaiset p -komponentit. Koska kaikki muut polarisaatiotilat voidaan ilmaista eri vaiheissa värähtelevien s - ja p -polarisoituneiden aaltojen summana, riittää tarkastella näitä kahta perustapausta

Ehdosta (12.12) seuraa kaksi muutakin tärkeää tulosta. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} &= k_1 \cos \theta_1 \\ \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n} &= -k'_1 \cos \theta'_1 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} &= k_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (12.14)$$

joten

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| &= k_1 \sin \theta_1 \\ |\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}| &= k'_1 \sin \theta'_1 \\ |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}| &= k_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (12.15)$$

Niinpä on oltava

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (12.16)$$

Koska saapuva ja heijastunut aalto etenevät samalla taaajuudella samassa väliaineessa, $k_1 = k'_1$ ja saamme **heijastuslain**

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad \text{eli} \quad \theta_1 = \theta'_1 \quad (12.17)$$

Aaltolukuja eri väliaineissa puolestaan sitoo dispersioyhtälö $k = n\omega/c$, joten olemme saaneet **Snellin lain**

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (12.18)$$

HUOM! Näissä relaatioissa ei ole käytetty Maxwellin yhtälöistä seuraavia reunaehtoja, vaan ne riippuvat aaltoliikkeen yleisistä geometrisista ominaisuuksista ja Snellin lain osalta väliaineen taitekertoimesta.

Fresnelin kertoimien määrittämiseksi tarkastellaan kenttien tangentiaalikomponenttien jatkuvuusehtoja. Normaalikomponenttien jatkuvuusehdot toteutuvat automaattisesti. Vektorikenttä voidaan hajottaa normaali- ja tangentiaalikomponentteihin kirjoittamalla $\mathbf{E} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$. Tangentiaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa, että

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (12.19)$$

Magneettikentälle puolestaan (kun $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_2 \quad (12.20)$$

Jos aaltovektorin suuntainen yksikkövektori on \mathbf{u} , niin $\mathbf{B} = (n/c)\mathbf{u} \times \mathbf{E}$, joten magneettikentän jatkuvuus edellyttää

$$n_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}'_1 \times \mathbf{E}'_1) = n_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{E}_2) \quad (12.21)$$

Kirjoittamalla vektorikolmitulot auki ja tarkastelemalla s -komponenttia saadaan osa-aallolle \mathbf{E}_1 yhtälö

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{1s}) = -\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} \quad (12.22)$$

ja vastaavasti muille osa-aalloille. Näin (12.21) saadaan muotoon

$$n_1 (\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} - \cos \theta'_1 \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} \quad (12.23)$$

Koska $\theta_1 = \theta'_1$, tämä sievenee muotoon

$$n_1 \cos \theta_1 (\mathbf{E}_{1s} - \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} \quad (12.24)$$

Sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuudesta saadaan suoraan s -komponenteille ehto

$$\mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}'_{1s} = \mathbf{E}_{2s} \quad (12.25)$$

Näistä yhtälöistä saadaan Fresnelin kertoimet s -polarisaatiolle

$$\mathbf{E}'_{1s} = r_{12s} \mathbf{E}_{1s}, \quad \mathbf{E}_{2s} = t_{12s} \mathbf{E}_{1s} \quad (12.26)$$

missä

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (12.27)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (12.28)$$

p -polarisaatio näyttää geometrialtaan hankalammalta, koska sähkökenttä ei ole rajapinnan tasossa. Mutta nyt voidaan tarkastella magneettikenttää, joka on rajapinnan tasossa. Näin saadaan yhtälöpari

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\mathbf{B}_{1s} - \mathbf{B}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \mathbf{B}_{2s} \quad (12.29)$$

$$\mathbf{B}_{1s} + \mathbf{B}'_{1s} = \mathbf{B}_{2s} \quad (12.30)$$

ja Fresnelin kertoimet saadaan ehdosta

$$\mathbf{B}'_{1s} = r_{12p} \mathbf{B}_{1s}, \quad \mathbf{B}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p} \mathbf{B}_{1s} \quad (12.31)$$

missä

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (12.32)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (12.33)$$

Koska Snellin laki 12.18 sitoo taitekertoimet saapumis- ja taittumiskulmiin

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (12.34)$$

voidaan taittumiskulma eliminoida Fresnelin kertoimista.

Intensiteettien väliset relaatiot saadaan keskimääräisten Poyntingin voiden avulla, mutta nyt täytyy käsitellä s - ja p -polarisaatiot erikseen.

$$R_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad T_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (12.35)$$

$$R_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} \quad T_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (12.36)$$

jotka Fresnelin kertoimien avulla saavat muodon

$$R_s = r_{12s}^2 \quad T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (12.37)$$

$$R_p = r_{12p}^2 \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (12.38)$$

ja lisäksi $R_s + T_s = 1$, $R_p + T_p = 1$.

Käyttämällä hyväksi Snellin lakia Fresnelin kertoimet voi muuntaa puhtaasti trigonometrisiksi (HT)

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (12.39)$$

$$t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (12.40)$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (12.41)$$

$$t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (12.42)$$

Tarkastellaan näiden avulla paria esimerkkiä

Brewsterin kulma

Millä kulmilla aalto ei lainkaan heijastu rajapinnalta? Molemmille polarisaatioille tämä tapahtuu tietenkin kun $\theta_1 = \theta_2$, mutta tämä ei ole kovin mielenkiintoinen tapaus, koska silloin molemmilla väliaineilla on oltava sama taitekerroin. p -polarisaation kyseessä ollen myös tapaus $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ tekee heijastuskertoimesta nollan. Taittuneen ja heijastuneen säteen välinen kulma on silloin suora. Merkitään sisääntulokulmaa θ_B ja kirjoitetaan $\theta_2 = \pi/2 - \theta_B$, jolloin Snellin laista saadaan ratkaistuksi

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (12.43)$$

Kulmaa kutsutaan **Brewsterin kulmaksi**. Koska tämä ehto on voimassa vain p -polarisaatiolle (vertikaaliselle polarisaatiolle), tämän avulla voidaan tuottaa polarisoitunutta valoa. Esimerkiksi ilman ($n = 1$) ja lasin ($n = 1.5$) rajapinnalla $\theta_B = 56^\circ$ ja tässä kulmassa rajapinnalle tulevasta polarisoitumattomasta (tai mielivaltaisesti polarisoituneesta) valosta heijastuu vain s -polarisoitunut komponentti.

Kokonaisheijastus

Aalto heijastuu kokonaan, jos $\theta_2 = \pi/2$. Sitä vastaava sisääntulokulma saadaan jälleen Snellin laista

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (12.44)$$

Tätä kutsutaan **kriittiseksi kulmaksi**. Tämä kulma on reaalin vain, jos $n_2 < n_1$. Tarkastellaan jälleen lasin ja ilman rajapintaa, mutta nyt lasin suunnasta. Tällöin $\theta_c = 42^\circ$. Jos kulma on tätä suurempi, Snellin laki antaa ehdon

$$\sin \theta_2 > 1 \quad (12.45)$$

jolla ei ole reaalisia ratkaisuja. Tarkastelemalla kompleksisia Fresnelin kertoimia voidaan näyttää, että $R_s = R_p = 1$ kaikille $\theta_1 \geq \theta_c$. Fysikaalisesti tämä merkitsee, että kriittistä kulmaa suuremmilla saapumiskulmilla kaikki aallon energia heijastuu. Tästä on hyötyä käytännön optiikassa, kuten prismakiikareissa ja valokaapeleissa.

12.3 Druden ja Lorentzin oskillaattorimalli

Dispersiivisessä väliaineessa dispersioyhtälö on yksinkertaista lineaarista relaatiota $\omega = (c/n)k$ monimutkaisempi. Aineen eristeominaisuudet voivat riippua taajuudesta ja aaltoluvusta: $\epsilon = \epsilon(\omega, \mathbf{k})$. Tarkastellaan väliainetta, jossa ei ole vahvoja sisäisiä voimia, ja jätetään aineen magneettiset ominaisuudet huomiotta ($\mu = \mu_0$). Tarkastellaan yhtä elektronia, joka on sidottu atomiin harmonisella voimalla

$$\mathbf{F}_h = -m\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (12.46)$$

missä \mathbf{r} on poikkeama tasapainoasemasta. Oletetaan lisäksi jokin elektronin liikettä vastustava voima (esim. kitka)

$$\mathbf{F}_d = -m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (12.47)$$

missä alaindeksi d (damping) viittaa siihen, että voima vaimentaa harmoniseen voimaan liittyvää värähtelyä. Ulkoisessa sähkökentässä $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ liikeyhtälöksi tulee

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right) = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.48)$$

Oletetaan harmoninen aikariippuvuus ($\propto \exp(-i\omega t)$), jolloin liikeyhtälön ratkaisu on

$$\mathbf{r} = \frac{-e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (12.49)$$

Elektronin poikkeama tasapainoasemasta aiheuttaa dipolimomentin \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (12.50)$$

Oletetaan, että yksikkötilavuudessa on n molekyyliä ja jokaista molekyyliä kohti on Z elektronia. Oletetaan, että f_j kappaleella jokaisen molekyylin elektroneista on ominaistajuus ω_{0j} ja vaimennustekijä γ_j . Tekijöitä f_j kutsutaan **oskillaattorivoimakkuuksiksi** ja ne normitetaan elektronien lukumäärään $\sum_j f_j = Z$. Nyt sähköinen polarisoituma (dipolimomenttien tiheys) on

$$\mathbf{P} = \frac{ne^2\mathbf{E}}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (12.51)$$

Sähkövuon tiheydestä yksinkertaisessa aineessa $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ saadaan

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) \quad (12.52)$$

Siis permittiivisyys on **taajuudesta riippuva kompleksiluku**.

Oletetaan sitten, että aineessa on jonkin verran vapaita elektroneja (f_0 kappaletta molekyyliä kohti), mutta että muuten väliaine on samanlainen kuin edellä. Vapaille elektroneille $\omega_{00} = 0$, jolloin

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) - \frac{ne^2}{m\omega} \frac{f_0}{\omega + i\gamma_0} \quad (12.53)$$

Merkitään oikean puolen ensimmäistä termiä ϵ_b ja käytetään Ohmin lakia ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). Tällöin Maxwellin neljännestä laista saadaan

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon_b)\mathbf{E} \equiv -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (12.54)$$

joten

$$\epsilon = \epsilon_b + \frac{i\sigma}{\omega} \quad (12.55)$$

Vertaamalla tätä lausekkeeseen (12.53) saadaan

$$\sigma = \frac{f_0 ne^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \quad (12.56)$$

Johtavuus σ on nyt taajuuden kompleksiarvoinen funktio. Jos $\gamma_0 \gg |\omega|$ ja $f_0 = 1$, tästä tulee luvusta 10 tuttu staattisen johtavuuden lauseke

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\gamma_0} \quad (12.57)$$

missä γ_0 on törmäysajan τ käänteisluku.

Esimerkki: Kuparilla on huoneen lämpötilassa ominaisuudet

$$\sigma = 5.6 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}, \quad n = 8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad f_0 = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

Oletus staattisesta johtavuudesta on siis hyvä approksimaatio taajuuksilla $|\omega| \ll 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$, mikä on varsin korkea taajuus verrattuna esimerkiksi tyypilliseen radioasemaan $\omega = 96.2 \text{ MHz} \cdot 2\pi \approx 6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$

Taajuuksia ω_{0j} kutsutaan **resonanssitaaajuuksiksi**. Monissa käytännön ongelmissa $\gamma_j \ll \omega_{0j}$, joten $\epsilon(\omega)$ on melkein reaalinen paitsi resonanssitaaajuuksien lähellä eli

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \quad (12.58)$$

Dispersiota kutsutaan **normaaliksi**, jos $d(\text{Re } \epsilon(\omega))/d\omega > 0$ ja **anomaaliseksi**, jos $d(\text{Re } \epsilon(\omega))/d\omega < 0$. Normaalin dispersion alueella permittiivisyys kasvaa taajuuden myötä. Anomaalista dispersiota ilmenee ainoastaan lähellä resonanssikohtaa, missä $\text{Im } \epsilon$ poikkeaa nolasta (HT: piirrä kuva).

Tarkastellaan energiabudjettia resonanssikohtan lähellä. Sähkövirta on nyt polarisaatiovirtaa $\mathbf{J}_P = \partial\mathbf{P}/\partial t$ ja sähkökentän tekemä työ on

$$W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_P = \mathbf{E} \cdot \partial\mathbf{P}/\partial t \quad (12.59)$$

Yhden jakson aikana tehty keskimääräinen työ on

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \cdot (-i\omega\mathbf{P})^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(i\omega(\epsilon^* - \epsilon_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{\omega}{2} |\mathbf{E}|^2 \text{Im } \epsilon(\omega) \quad (12.60)$$

Jos $\text{Im } \epsilon > 0$, energia siirtyy sähkökentältä elektroneille eli aalto vaimenee. Tätä kutsutaan **resonanssiabsorptioksi**.

Tässä mallissa $\text{Im } \epsilon > 0$, kun $\omega > 0$. On olemassa tärkeitä fysikaalisia prosesseja, joissa aalto saa energiaa hiukkasilta, mutta tämä malli ei sovellu näihin tapauksiin. Tässä yhteydessä on opettavaista todeta merkinvalinnan vaikutus. Jos aikariippuvuudeksi valittaisiin $\exp(+i\omega t)$, muuttuisi $\text{Im } \epsilon$:n merkki. Tilanteen fysiikka on tietenkin riippumatonta merkkisopimuksista.

Väliaineen taitekerroin ja aallon aaltoluku ovat

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \quad (12.61)$$

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \frac{\omega}{c} \quad (12.62)$$

Tästä saadaan vaihenopeus

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \quad (12.63)$$

Tämä ei kuitenkaan ole energian etenemisnopeus dispersiivisessä väliaineessa. Sen antaa **ryhmänopeus**, joka määritellään $v_g = d\omega/dk$ ja on siten (ks. Jackson)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{dk}} \quad (12.64)$$

Samaan aikaan lähtevät eritaajuiset aallot saavuttavat vastaanottajan eri aikaan, mikäli ne etenevät dispersiivisessä väliaineessa.

Luku 13

Aaltoputket ja resonanssikaviteetit

Kerrataan ensin ajasta riippuvan sähkömagneettisen kentän käyttäytyminen ideaalijohteessa ja sen pinnalla. Äärettömän hyvän johteen sisällä ei ole sähkökenttää, koska vapaasti liikkuvat varaukset luovat pinnalle varauskahteen σ_S , jolloin kokonaissähkökenttä johteen sisällä on nolla. Samoin ajasta riippuva magneettikenttä häviää ideaalijohteen sisällä. Varaukset liikkuvat pinnalla luoden sellaisen pintavirran \mathbf{K} , että kokonaiskenttä on nolla johteessa. Muut reunaehdot ovat \mathbf{B} :n normaalikomponentin ja \mathbf{E} :n tangentialikomponentin jatkuvuus. Koska \mathbf{B} ja \mathbf{E} ovat nollia ideaalijohteessa, niin aivan johteen ulkopuolella sähkökenttä on kohtisuorassa ja magneettikenttä yhdensuuntainen pintaan nähden. Todellisuudessa ideaalijohteita ei ole, mutta tällainen malli antaa kuitenkin hyvän peruskäsityksen aaltoputkista. Käytännön esimerkki aaltoputkesta on optinen kuitu ja resonanssikaviteetista mikroaaltouuni.

13.1 Sylinteriputki

Tarkastellaan onttoa poikkileikkaukseltaan mielivaltaista metallisylinteriä, jonka seinämät oletetaan ideaalijohteiksi. Sylinterin sisällä aine oletetaan johtamattomaksi (permittiivisyys ϵ_0 , permeabiliteetti μ_0). Kenttien aika-riippuvuus olkoon harmoninen ($e^{-i\omega t}$). Maxwellin yhtälöt sylinterin sisällä ovat

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (13.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = 0 \quad (13.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} + i\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 0 \quad (13.4)$$

Kenttien Helmholtzin yhtälöt ovat

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E} = 0, \quad (\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{B} = 0 \quad (13.5)$$

Valitaan koordinaatisto siten, että z -akseli osoittaa aallon etenemissuuntaan. Sylinterigeometrian vuoksi tehdään yritteet

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad (13.6)$$

(z -akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto e^{-ikz} käsitellään vastaavalla tavalla.) On huomattava, että nyt ei enää yleensä ole $k = \omega/c$. Sijoittamalla yritteet aaltoyhtälöihin saadaan

$$(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{E} = 0, \quad (\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{B} = 0 \quad (13.7)$$

missä

$$\nabla_t = \nabla - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (13.8)$$

Jaetaan kentät pitkittäiseen ja poikittaiseen osaan, esimerkiksi sähkökenttä seuraavasti:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t \quad (13.9)$$

missä

$$\mathbf{E}_z = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z \quad (13.10)$$

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_z$$

Nyt Maxwellin yhtälöt saadaan muotoon (HT)

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = -\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ikE_z \quad (13.11)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = -ikB_z \quad (13.12)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z \quad (13.13)$$

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \nabla_t E_z - ik\mathbf{E}_t = i\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_t \quad (13.14)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -\frac{i\omega}{c^2} E_z \quad (13.15)$$

$$\nabla_t B_z - \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} = \nabla_t B_z - ik\mathbf{B}_t = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (13.16)$$

Jos B_z ja E_z tunnetaan, voidaan poikittaiset kentät ratkaista yhtälöistä 13.14 ja 13.16. Yhtälöitä 13.11-13.16 ei pidä opetella ulkoa, vaan on ymmärrettävä käsittelyn perusideat.

TEM-moodit

TEM-moodit (transverse electromagnetic modes) ovat sähkömagneettisia aaltoja, joiden kentät ovat kohtisuorassa etenemissuuntaan nähden (siis $B_z = 0$, $E_z = 0$). Tällöin yhtälöistä 13.11-13.16 seuraa $\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0$, $\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = 0$, $\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$, $\nabla_t \times \mathbf{B}_t = 0$ ja kenttien laskeminen palautuu muodollisesti kaksiulotteiseksi statiikan ongelmaksi:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_t = 0, \nabla^2 \mathbf{B}_t = 0 \quad (13.17)$$

Havaitaan seuraavat seikat:

1) Aaltoluku k on

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (13.18)$$

2) Magneetti- ja sähkökentällä on 13.16:n mukaan samanlainen yhteys kuin tyhjän tasoaalloissa:

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (13.19)$$

3) TEM-moodi ei voi edetä, jos sylinteri on ontto (sähkökenttä sisällä on täsmälleen nolla). Jos sylinteripintoja on useampia, TEM-moodit voivat edetä (esimerkiksi koaksiaalikaapelissa).

4) TEM-moodilla ei ole katkaisutaajuutta (cut-off frequency) eli taajuutta, jolla aaltoluku häviäisi.

TM- ja TE-moodit

Tarkastellaan onttoa sylinteriä, jossa ei siis ole TEM-moodeja. Oletetaan nyt, että kentillä on etenemissuuntaiset (z -)komponentit. Kentät voidaan jakaa kahteen toisistaan riippumattomaan moodiin:

1) TM-moodit (transverse magnetic modes):

$$B_z = 0 \text{ kaikkialla}$$

$$E_z = 0 \text{ sylinterin pinnalla}$$

2) TE-moodit (transverse electric modes):

$$E_z = 0 \text{ kaikkialla}$$

$$\partial B_z / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla_t B_z = 0 \text{ sylinterin pinnalla.}$$

Huom. Kirjallisuus on moodien nimityksessä varsin sekava.

Tarkastellaan ensin TM-moodeja ja oletetaan z - ja t -riippuvuus $e^{i(kz - \omega t)}$. Lausutaan \mathbf{B}_t ja \mathbf{E}_t E_z :n avulla (vrt. 13.11, 13.14, 13.16):

$$\mathbf{B}_t = \frac{\omega}{kc^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (13.20)$$

ja

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t E_z \quad (13.21)$$

missä on merkitty

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (13.22)$$

E_z ratkaistaan yhtälöstä 13.7:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)E_z = 0 \quad (13.23)$$

Samalla tavalla käsitellään TE-moodeja, ja saadaan (HT)

$$\mathbf{E}_t = \frac{\omega}{k} \mathbf{B}_t \times \mathbf{e}_z \quad (13.24)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t B_z \quad (13.25)$$

missä B_z toteuttaa yhtälön 13.7:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)B_z = 0 \quad (13.26)$$

Suureen γ^2 :n on oltava positiivinen, jotta E_z ja B_z ovat värähteleviä ja reunaehdot voivat toteutua. Yhtälöiden ratkaisuja vastaa joukko ominaisarvoja γ_p , joita puolestaan vastaavat aaltoluvut k_p . Katkaisutaajuus saadaan määritelmän mukaan asettamalla k^2 nolaksi, jolloin

$$\omega_p = c\gamma_p = \frac{\gamma_p}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (13.27)$$

Aaltoluku on tällöin

$$k_p = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad (13.28)$$

Jos taajuus on alle katkaisutaajuuden, aaltomoodi on eksponentiaalisesti vaimeneva, eikä siis etene.

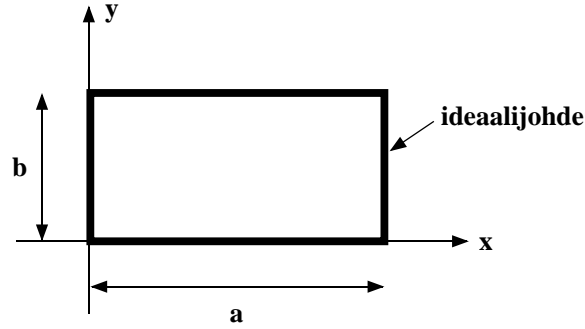
13.2 Suorakulmainen aaltoputki

Erikoistapauksena tutkitaan suorakulmaisessa aaltoputkessa eteneviä TE-moodeja (kuva 13.1).

Ratkaistaan ensin B_z :n Helmholtzin yhtälö

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)B_z = 0 \quad (13.29)$$

reunaehdoin $\partial B_z / \partial n = 0$, kun $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.



Kuva 13.1: Aaltoputki, jonka poikkileikkaus on suorakaide.

Tehdään separointiyrite $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$, jolloin saadaan

$$X'' + p^2X = 0, Y'' + q^2Y = 0 \quad (13.30)$$

missä p^2 on separointivakio ja $q^2 = \gamma^2 - p^2$. Ratkaisu on

$$B_z(x, y) = B_0(e^{ipx} + Ce^{-ipx})(e^{iqy} + De^{-iqy}) \quad (13.31)$$

missä B_0 , C ja D ovat vakioita. Reunaehdot toteutuvat, jos

$$\begin{aligned} C = D = 1 \\ \sin pa = 0 \Rightarrow p = m\pi/a, m = 0, 1, 2, \dots \\ \sin qb = 0 \Rightarrow q = n\pi/b, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13.32)$$

Yhtälön ominaisarvot ovat siis

$$\gamma_{mn}^2 = p^2 + q^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2) \quad (13.33)$$

joita vastaavat ratkaisut ovat

$$B_{z,mn}(x, y) = B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (13.34)$$

Katkaisutaajuudet ovat

$$\omega_{mn} = c\gamma_{mn} = \pi c \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2} \quad (13.35)$$

Jos $a > b$, niin matalin katkaisutaajuus on $\omega_{10} = \pi c/a$. Tämän TE_{10} -moodin B_z -komponentti on

$$B_z = B_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \quad (13.36)$$

ja muut komponentit saadaan yhtälöistä 13.24 ja 13.25:

$$\mathbf{B}_t = -\frac{ika}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x \quad (13.37)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{i\omega a}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y \quad (13.38)$$

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{10}^2}}{c} \quad (13.39)$$

Vastaavalla tavalla käsitellään z -akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto (e^{-ikz}).

13.3 Resonanssikaviteetit

Tarkastellaan äärellisen pituisia sylinterimäisiä aaltoputkia (kaviteetteja, onkaloita), joiden päissä on täydellisesti johtavat seinät. Sisällä oleva aine on johtamatonta sähkömagneettisin parametrein μ_0 , ϵ_0 . Resonanssikaviteetti on onkalo, jonka pituus on jonkin aaltoputken moodin aallonpituuden monikerta. Kenttien z -riippuvuus on muotoa $A \sin kz + B \cos kz$ (seisovat aallot eli e^{+ikz} ja e^{-ikz} -aaltojen summa). Jos päädyt ovat tasoilla $z = 0$ ja $z = d$, niin reunaehdot voivat sekä TM- että TE-moodeille toteutua vain, jos $k = \pi p/d$, $p = 0, 1, 2, \dots$ Silloin

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \quad (13.40)$$

eli jokaisella p ominaisarvoa γ_q vastaa ominaistajuus ω_{qp} , joka on

$$\omega_{qp}^2 = c^2 \left(\gamma_q^2 + \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \right) \quad (13.41)$$

Ominaisarvot määräytyvät tarkasteltavan systeemin geometriasta. Havaitaan seuraava ero aaltoputkien ja resonanssikaviteettien välillä: Aaltoputkissa taajuus ω voi saada minkä tahansa katkaisutaajuutta suuremman arvon. Kaviteetissa taajuus saa vain diskreettejä arvoja.

TM- ja TE-moodit voidaan käsitellä käyttämällä suoraan aaltoputkille saatuja tuloksia laskemalla sopivasti yhteen e^{+ikz} - ja e^{-ikz} -aaltoja. Esimerkiksi TM-moodilla sähkökentän tangentialikomponentin häviäminen pinoilla $z = 0$ ja $z = d$ vaatii, että

$$E_z = \psi(x, y) \cos \frac{\pi p z}{d} \quad (13.42)$$

koska silloin

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\pi p}{\gamma^2 d} \sin \frac{\pi p z}{d} \nabla_t \psi(x, y) \quad (13.43)$$

Funktio ψ toteuttaa Helmholtzin yhtälön

$$(\nabla^2 + \gamma^2)\psi(x, y) = 0 \quad (13.44)$$

Magneettikenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{B}_t = \frac{i\omega}{\gamma^2 c^2} \cos \frac{\pi pz}{d} \mathbf{e}_z \times \nabla_t \psi(x, y) \quad (13.45)$$

Hyödyllinen HT on osoittaa, että annetut lausekkeet toteuttavat kaikki Maxwellin yhtälöt. Reunaehdoista seuraa puolestaan lisäehtoja funktiolle ψ .

Esimerkkinä tarkastellaan ympyräsyylinteriä (säde R). TM-moodissa E_z :n on hävittävä sylinterin pystyreunoilla eli sylinterikoordinaateissa $\psi(R, \phi) = 0$. Separointimenetelmällä saadaan fysikaalisesti kelvolliseksi ratkaisuksi

$$\psi(r, \phi) = \psi_{mn}(r, \phi) = A J_m(\gamma_{mn} r) e^{\pm im\phi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13.46)$$

missä J_m on Besselin funktio ja $\gamma_{mn} = x_{mn}/R$ ja x_{mn} on yhtälön $J_m(x) = 0$ n :s juuri. Ominaistajuudet ovat nyt

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left(\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \right) \quad (13.47)$$

Alin TM-moodi on TM_{010} , jossa $\omega_{010} \approx 2.405c/R$. Tämä on riippumaton sylinterin korkeudesta. Vastaavalla tavalla käsitellään TE-moodit (yksityiskohdat sivuutetaan). Niiden ominaistajuuksissa on aina myös d -riippuvuus, joten taajuuksien säätäminen on helpompaa kuin TM-moodilla.

Mikroaaltouuneista

Mikroaallot ovat sähkömagneettista säteilyä, jonka aallonpituus on 1 mm-0.3 m (taajuus $10^9 - 3 \cdot 10^{11}$ Hz). Mikroaaltouunin käyttö ruuanvalmistuksessa perustuu siihen, että mikroaallot saavat ruoka-aineiden polaariset molekyylit pyörrähtelemään. Kitkan takia osa pyörrähdysenergiasta muuttuu lämmöksi. Mikroaaltouuneissa käytetään tyypillisesti aallonpituutta 12.2 cm (taajuus 2450 MHz), jolloin saavutetaan hyvä absorptio erityisesti vesimolekyylille. Oleellista on, että ruoka-aineiden pitää sisältää polaarisia molekyylejä. Polaarittomat aineet läpäisevät mikroaaltoja, ja metallit taas heijastavat niitä. Tyypillinen tunkeutumissyvyys ruoka-aineissa on muutaman senttimetrin luokkaa. Kypsennys tapahtuu siis suoraan ruuan sisällä, ellei annos ole kovin paksu, jolloin sisäosissa kuumennus tapahtuu johtumalla. Mikroaaltouunin tärkein osa on luonnollisesti uunitila, jossa ruoka kuumennetaan ja joka siis on resonanssikaviteetti. Mikroaaltokenttä synnytetään magnetronissa, josta kenttä johdetaan aaltoputkea pitkin uuniin. Magnetroni koostuu useasta resonanssiontelosta (sähköisestä värähtelypiiristä). Erillinen uunitila on tarpeen, koska näihin onteloihin ei saada mahtumaan ruokaa.

Luku 14

Liikkuvan varauksen kenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvan varauksen aiheuttamaan kenttään. Asiaa on käsitelty RMC:n luvussa 21 ja CL:n luvussa 13. Jokaisen sähködynaamikon on laskettava ainakin kerran elämässään Liénardin ja Wiechertin potentiaalit ja kentät.

14.1 Liénardin ja Wiechertin potentiaalit

Tarkastellaan siis yksittäistä varauksellista hiukkasta, jonka rata on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$. Varaus- ja virrantiheys ovat tällöin

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \quad (14.1)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\dot{\mathbf{r}}_q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \quad (14.2)$$

Käyttökelpoisten potentiaalien laskeminen ei ole aivan helppo tehtävä. RMC esittelee jaksossa 21–1 yhden tavan (tosin hypäten varsinaisen laskun yli). Toinen menetelmä on käyttää hyväksi Greenin funktiota, mikä sekin on teknisesti kohtuullisen vaativaa. Kyseessä on siis mitä mainioin harjoitustehtävä. Esitetään tässä menetelmän idea.

Tehtävänä on ratkaista epähomogeeniset aaltoyhtälöt

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (14.3)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (14.4)$$

Kuten luvussa 9 todettiin, näiden ratkaisut ovat Greenin funktion avulla lausuttuina

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (14.5)$$

missä $\psi^\pm(\mathbf{r}, t)$ ovat viivästyneet (+) ja edistyneet (-) skalaaripotentialit tai vektoripotentialin karteesiset komponentit ja $f(\mathbf{r}', t')$:t vastaavat lähdetermejä (ρ, \mathbf{J}) . Nyt riittää käyttää viivästyneen potentialin Greenin funktiota

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14.6)$$

Tekijä 4π on otettu Greenin funktion määritelmään, kun se luvussa 9 oli G :n aaltoyhtälössä.

Ensin integroidaan paikkaintegraalit Greenin funktion avulla. Sen jälkeen aikaintegraalia laskettaessa käytetään hyväksi δ -funktiolle voimassa olevaa identiteettiä

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (14.7)$$

missä $g(x_i) = 0$. Lopputuloksena saadaan **Liénardin ja Wiechertin potentiaalit**:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret} \quad (14.8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret} \quad (14.9)$$

missä $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ja $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Alaindeksi *ret* viittaa lausekkeen laskemiseen viivästyneellä ajalla t' , joka on ratkaistava ehdosta

$$t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|/c = t \quad (14.10)$$

Havaittaja siis mittaa kentän pisteessä \mathbf{r} hetkellä t .

Kaikkein eleganteinta, joskaan ei sen helpompaa, on tehdä ylläoleva lasku relativistisessa formalismissa, missä φ ja \mathbf{A} ovat nelipotentialin A^α komponentit ja

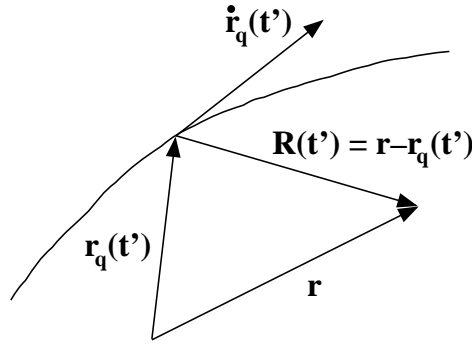
$$A^\alpha(x) = \int G(x - x')J^\alpha(x')d^4x' \quad (14.11)$$

(katso Jackson tai CL luku 13.3).

14.2 Kenttien laskeminen

Kun potentiaalit tunnetaan, kentät saadaan derivoimalla, joka yleensä on helppoa, mutta vaatii nyt kärsivällisyyttä. Hankaluuden aiheuttaa viivästyneen ajan implisiittisesti määrittelevä yhtälö 14.10. Aluksi kannattaa tehdä itselleen selväksi koordinaatisto (kuva 14.1). Sähkökenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\nabla(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right] \quad (14.12)$$



Kuva 14.1: Varauksellisen hiukkasen liiketila hetkellä t' määrää kentän myöhempänä hetkenä t . Kenttä etenee pisteestä $\mathbf{r}_q(t')$ havaintopisteeseen \mathbf{r} ajassa $R(t')/c$, jolloin hiukkanen on ehtinyt radallaan pisteeseen $\mathbf{r}_q(t)$.

Hakasulku viittaa lausekkeen laskemiseen viivästetyllä ajalla (jätetään sulut pois välivaiheissa).

Aloitetaan $R(t')$:n derivoinnista: koska t' riippuu paikkavektorista \mathbf{r} , niin $\nabla R(t') = -c\nabla t'$. Derivoidaan viivästyneen ajan lauseketta 14.10 puolittain, jolloin esimerkiksi gradientin x -komponentti on

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x_q - c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)(\partial t'/\partial x)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} \quad (14.13)$$

Tässä on käytetty derivoinnin ketjusääntöä $\partial/\partial x = (\partial t'/\partial x)(\partial/\partial t')$. Nyt voidaan ratkaista

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{x - x_q}{c(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})} \quad (14.14)$$

joten

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})} \quad (14.15)$$

ja

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.16)$$

Tarvitaan myös $\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})$. Lasketaan taas x -komponentti:

$$(\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}))_x = \beta_x + \frac{\partial t'}{\partial x}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q) \quad (14.17)$$

Täten

$$\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) = \boldsymbol{\beta} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q)\nabla t' = \frac{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} + (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.18)$$

Kokoamalla tulokset saadaan skalaaripotentialin gradientiksi

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R} - (R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} - (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right] \quad (14.19)$$

Vektoripotentialia varten täytyy laskea $\partial R/\partial t = c(1 - \partial t'/\partial t)$. Nyt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (14.20)$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.21)$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{cR\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.22)$$

Vektoripotentialin lausekkeessa esiintyvä aikaderivaatta on siis

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right] = \left[\frac{R(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (R\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} + c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R} - cR\beta^2)\boldsymbol{\beta}}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right] \quad (14.23)$$

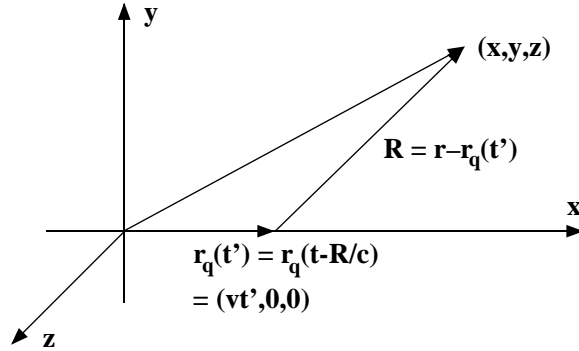
Sähkökentäksi saadaan lopulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R} \times ((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})/c}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right]_{ret} \quad (14.24)$$

Samanlaisten veivausten (luonnollisesti HT) jälkeen saadaan magneettikenttä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right]_{ret} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (14.25)$$

Välittömästi todetaan, että staattisen varauksen ($\boldsymbol{\beta} = 0$) sähkökenttä on Coulombin kenttä. Silloin sähkökenttä on yhdensuuntainen vektorin \mathbf{R} kanssa, joten staattinen varaus ei odotetusti aiheuta magneettikenttää. Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä on selvästi tekemisissä Lorentzin muunnoksen kanssa. Säteilykentäksi kutsutaan kiihtyvyyteen $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ verrannollista termiä, joka pienenee kaukana varauksesta kuten $1/R$ eli kertalukua hitaammin kuin Coulombin kenttä. Tarkastellaan näitä tilanteita seuraavassa yksityiskohtaisemmin.



Kuva 14.2: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen kentän laskeminen

14.2.1 Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä

Liénardin ja Wiechertin potentiaalien myötä olemme tulleet hyvin lähelle suhteellisuusteoriasta tuttuja Lorentzin muunnoksia. Tarkastellaan tätä varren kuvan 14.2 mukaisesti x -akselia pitkin vakionopeudella \mathbf{v} liikkuvan varauksen kenttää. Kenttä pisteessä (x, y, z) lasketaan hetkellä t , jolloin varaus on ehtinyt pisteeseen $(vt, 0, 0)$ (varaus on ohittanut origon hetkellä $t = 0$).

Koska $R = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} = c(t - t')$, niin viivästynyt aika t' saadaan lausekkeesta

$$(1 - \beta^2)t' = t - \beta x/c - (1/c)\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (14.26)$$

jolloin

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]_{ret} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (14.27)$$

Skalaaripotentialiaali voidaan nyt esittää muodossa

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} \quad (14.28)$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Vektoripotentialilla on vain x -komponentti

$$A_x(x, y, z, t) = \beta\varphi(x, y, z, t)/c \quad (14.29)$$

Näin on päädytty Maxwellin yhtälöistä lähtien hyvin lähelle Lorentzmuunnosta. Varauksen lepokoordinaatistossa potentiaalilla on tuttu lauseke

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (14.30)$$

Liikkuvan varauksen potentiaali saadaan (melkein) koordinaattimuunnoksella, jossa y ja z pysyvät ennallaan ja x :stä tulee $\gamma(x - vt)$. Vielä jää mietittäväksi, mistä tekijä γ ilmestyy kertomaan potentiaalia. Lisäksi täytyisi selvittää, mistä vektoripotentiaali saadaan, kun se on nolla lepokoordinaatissa. Tähän palataan suhteellisuusteoriassa, jossa \mathbf{A} :n ja φ :n osoitetaan yhdessä muodostavan nelivektorin.

Kentät saadaan derivoimalla (tällä kertaa helposti):

$$E_x(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - vt)}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.31)$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.32)$$

$$E_z(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.33)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}(x, y, z, t) \quad (14.34)$$

Nämä lausekkeet pätevät kaikilla nopeuksilla. Kaukana varauksesta kenttä heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön. Suurellakaan nopeudella liikkuva hiukkanen ei siis säteile.

Kenttää on mukavinta tarkastella varauksen kulloisenkin paikan suhteen. Kohtisuorassa suunnassa ($x - vt = 0$) sähkökentän voimakkuus on

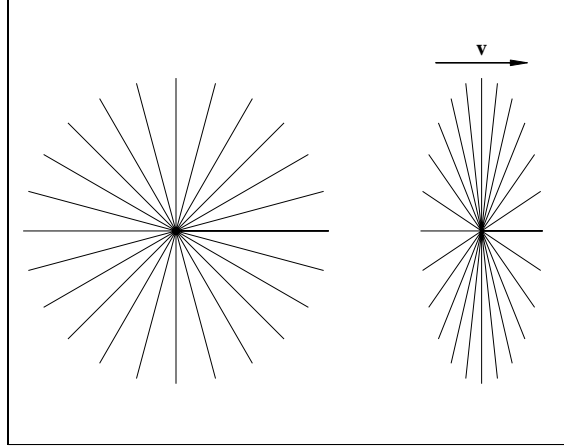
$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{y^2 + z^2} \quad (14.35)$$

Tämä on Coulombin kenttä tekijällä γ suurennettuna (aina $\gamma \geq 1$). Varauksen edessä ja takana $y = z = 0$ ja

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2(x - vt)^2} \quad (14.36)$$

Tämä on puolestaan Coulombin kenttä tekijällä $1/\gamma^2$ pienennettynä.

Kenttäviivat saadaan piirtämällä ensin staattisen varauksen kenttäviivat ja sitten liikuttamalla kuviota suurella nopeudella silmien ohi, jolloin havaitaan Lorentz-kontraktio (ei onnistu kotioloissa kovin helposti). Vaihtoehtoisesti puristetaan x -akselia kasaan tekijän γ verran (kuva 14.3). Kannattaa kuitenkin muistaa, että kenttäviivat eivät ole todellisia fysikaalisia olioita. Magneettikentän hahmottaminen jää lukijan mietittäväksi kuten hitaasti liikkuvan varauksen magneettikentän osoittaminen samaksi kuin luvussa 5.



Kuva 14.3: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen sähkökentän kenttäviivat. Vasemmalla staattinen varaus, oikealla liikkuva varaus.

14.2.2 Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä

Vakionopeudella liikkuva varaus ei siis säteile ympäristöönsä. Mikäli varauksen nopeus muuttuu, Liénardin ja Wiechertin potentiaaleja ei voi enää ilmaista varauksen tarkasteluhetken paikan funktioina vaan viivästymisen on otettava huomioon eksplisiittisesti eli laskettaessa kenttiä on huomioitava derivaattamuuttujien riippuvuus viivästymisestä.

Tarkastellaan aluksi epärelativistista rajaa ($\beta \ll 1$), jolloin $1/R$ -säteilykentiksi tulee

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})/R \quad (14.37)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}/R \quad (14.38)$$

missä $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Näistä saadaan Poyntingin vektoriksi

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}|^2}{R^5} \mathbf{R} \quad (14.39)$$

missä Z_0 on tyhjän impedanssi $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$.

Säteilyteho avaruuskulmaan $d\Omega$ on nyt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \quad (14.40)$$

missä θ on $\dot{\mathbf{v}}$:n ja \mathbf{n} :n välinen kulma. Suorittamalla kulmaintegroinnit saadaan Larmorin kaava

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (14.41)$$

Relativistisille hiukkasille t :n ja t' :n välinen ero on tärkeä. Aikavälillä $t_1 = t'_1 + R(t'_1)/c \dots t_2 = t'_2 + R(t'_2)/c$ säteily energia on

$$W = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{ret} dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'} dt' \quad (14.42)$$

On siis mielekästä määrittellä hiukkasen säteilyn intensiteetti $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dt/dt' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ sen omassa ajassa ja omassa paikassa:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \quad (14.43)$$

Kun $\beta \rightarrow 1$, niin $dP/d\Omega$:n nimittäjän merkitys kasvaa ja säteilykeila alkaa venyä hiukkasen liikkeen suuntaan. Maksimi-intensiteetti saavutetaan, kun $\theta_{max} \rightarrow 1/(2\gamma)$ ja keilan leveys on $\approx 1/\gamma$. Koska laskuissa ei ole tehty oletuksia kiihtyvyyden suunnasta, saadut kaavat kuvaavat sekä jarrutussäteilyä että syklotroni- ja synkrotronisäteilyä. Säteilyn kokonaisteho saadaan integroimalla kulmien yli (siis ei helposti) tai tekemällä Larmorin kaavalle Lorentzin muunnos (jos osataan suhteellisuusteoriaa). Lopputulos on

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 (\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2) \quad (14.44)$$

Luku 15

Säteilevät systeemit

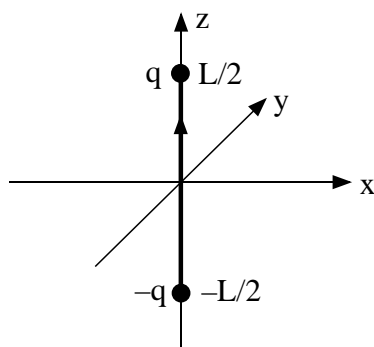
Edellisessä luvussa käsiteltiin vain yhden varauksellisen hiukkasen säteilykenttiä. Nyt tutustutaan esimerkinomaisesti yksinkertaisiin antenneihin ja varausjoukon aiheuttamaan säteilyyn (RMC luku 20).

15.1 Värähtelevän dipolin kenttä

Tarkastellaan tyhjässä olevaa sähköistä dipolia, joka muodostuu kahdesta z -akselilla pisteissä $z = \pm L/2$ sijaitsevasta pallosta (kuva 15.1). Pallot on yhdistetty johdolla, jonka kapasitanssi voidaan jättää huomiotta. Ylemmän pallon varaus olkoon $q(t)$, alemman $-q(t)$.

Varauksen säilyminen antaa virrantiheydeksi

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = I(t)\delta(x)\delta(y)\theta(L/2 - z)\theta(z + L/2) \quad (15.1)$$



Kuva 15.1: Yksinkertainen dipoliantenni.

missä $I = +\dot{q}$. Lasketaan viivästynyt vektoripotentiali

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (15.2)$$

jolla on nyt ainoastaan z -komponentti

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I(z', t - |\mathbf{r} - z'\mathbf{e}_z|/c)}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{e}_z|} dz' \quad (15.3)$$

Lausekkeen yksinkertaistamiseksi oletetaan, että dipolia katsotaan kaukaa $L \ll r$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{e}_z| = (r^2 - 2z'\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r} + z'^2)^{1/2} \approx r - z' \cos \theta \quad (15.4)$$

missä θ on katselupisteen paikkavektorin \mathbf{r} ja z -akselin välinen kulma. Vektoripotentialin nimittäjässä $z' \cos \theta$ voidaan jättää huomiotta, kun dipolia katsotaan kaukaa. Viivästystermessä se voidaan jättää huomiotta, jos $z' \cos \theta/c$ on pieni verrattuna virran muutoksen aikaskaalaan, esimerkiksi harmonisesti oskilloivan virran periodiin T . Koska $z' \cos \theta \leq L/2$, voidaan $z' \cos \theta/c$ jättää huomiotta vain, jos

$$L/2 \ll cT = \lambda \quad (15.5)$$

Oletetaan, että näin on eli, että syntyvän aallon aallonpituus λ on paljon dipolin pituutta suurempi ja tarkastellaan dipolia kaukaa. Tällöin

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 L}{4\pi r} I(t - r/c) \quad (15.6)$$

Skalaaripotentialin laskeminen on yksinkertaisinta käyttäen Lorentzin mittahtoa

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (15.7)$$

mistä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{L}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} I(t - r/c) \right] \\ &= \frac{L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^3} I(t - r/c) + \frac{z}{r^2 c} I'(t - r/c) \right] \end{aligned} \quad (15.8)$$

missä I' on I :n $(t - r/c)$:n suhteen laskettu derivaatta. Koska toisaalta $I = +q'$, missä q' on saman argumentin suhteen otettu derivaatta, saadaan φ integroiduksi

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{L}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[\frac{q(t - r/c)}{r} + \frac{I(t - r/c)}{c} \right] \quad (15.9)$$

Rajataan tarkastelu harmonisesti oskilloivaan dipoliin

$$\begin{aligned} q(t - r/c) &= q_0 \cos \omega(t - r/c) \\ I(t - r/c) &= I_0 \sin \omega(t - r/c) = -\omega q_0 \sin \omega(t - r/c) \end{aligned} \quad (15.10)$$

Kirjoitetaan \mathbf{A} pallokoordinaatistossa

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \cos \theta \sin \omega(t - r/c) \\ A_\theta &= -\frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \sin \theta \sin \omega(t - r/c) \\ A_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (15.11)$$

Nyt $\nabla \times \mathbf{A}$:lla on vain ϕ -komponentti, joten

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{c} \cos \omega(t - r/c) + \frac{1}{r} \sin \omega(t - r/c) \right] \end{aligned} \quad (15.12)$$

Sähkökenttä on $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \varphi$:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2lI_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sin \omega(t - r/c)}{r^2 c} - \frac{\cos \omega(t - r/c)}{\omega r^3} \right] \\ E_\theta &= -\frac{lI_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega(t - r/c) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega(t - r/c) \right] \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (15.13)$$

Koska \mathbf{B} on kaikkialla tangentiaalinen dipoli keskipisteenä piirretylle pallon pinnalle, kyseessä on TM-moodi (HT: totea, että suurilla r :n arvoilla $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r$).

Lasketaan sitten dipolin säteilemä energia integroimalla Poyntingin vektorin normaalikomponentti R -säteisen pallon pinnan yli.

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\mu_0} R^2 \int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi \sin \theta d\theta \quad (15.14)$$

Kun $R \rightarrow \infty$ ainoastaan $1/r$:ään verrannolliset termit antavat nollasta poikkeavan kontribuution. Rajoittumalla näihin tulee energiavuoksi

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{(I_0 l)^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega(t - r/c) \quad (15.15)$$

Tämä on siis dipolin hetkellisesti säteilemä teho. Integroimalla periodin yli saadaan keskimääräinen säteilyteho

$$\langle P \rangle = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{I_0^2}{2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{I_0^2}{2} \quad (15.16)$$

Tämän tuloksen voi tulkita siten, että vastus R , jossa kulkee sinimuotoinen virta $I_0 \cos \omega t$, kuluttaa energiaa keskimääräisellä teholla $\langle P \rangle = RI_0^2/2$. Suuretta

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (15.17)$$

kutsutaan **säteilyvastukseksi**. Mikäli dipoli ei ole tyhjässä, on permittivisyys ja permeabiliteetti korvattava väliaineen vastaavilla suureilla.

Magneettinen dipoli käsitellään aivan samaan tapaan. Se voidaan esittää ympyränmuotoisena silmukkana, jossa kulkee sinimuotoinen sähkövirta. Magneettinen dipoli on puolestaan kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan. Koska virralla on vain ϕ -komponentti on myös vektoripotentiaalin ainoa nollasta poikkeava komponentti

$$A_\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cos \phi d\phi \quad (15.18)$$

missä a on virtasilmukan säde. Nyt dipoliapproksimaatio edellyttää, että $r \gg a$ ja $\omega a \ll c$. Tästä eteenpäin lasku etenee samalla reseptillä kuin edellä. Erona oskilloivaan sähködipoliin on, että tällä kertaa syntyvän aallon sähkökenttä on dipolikeskisen pallon tangentti eli kyseessä on TE-moodi. Yksityiskohdat jääkööt harjoitustehtäväksi.

Huom. Oletettaessa harmoninen aikariippuvuus ($e^{-i\omega t}$) skalaaripotentiaalia ei välttämättä tarvitse laskea. Magneettikenttä määräytyy pelkästään virrasta vektoripotentiaalin kautta. Toisaalta lähdealueen ulkopuolella

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\epsilon_0\mathbf{E} \quad (15.19)$$

josta saadaan

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} \quad (15.20)$$

15.2 Puoliaaltoantenni

Edellä saatu tulos ei anna oikeaa säteilytehoa oikealle radioantennille, koska yleensä antenni ei ole lyhyt verrattuna aallonpituuteen eikä sitä yleensä syötetä päistä vaan keskeltä.

Tarkastellaan tasan puolikkaan aallonpituuden mittaista antennia. Tämä on realistinen esimerkki, koska esimerkiksi 100 MHz aallon aallonpituus on 3 m. Antennin voi ajatella koostuvan infinitesimaalisista osista, joihin kuhunkin sopii edellä ollut tarkastelu. Olkoon antenni z -akselilla välillä $(-\lambda/4, +\lambda/4)$ ja kulkekoon siinä virta

$$I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cos \left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) \quad (15.21)$$

Tämä virta on nolla antennin molemmissa päissä. Nyt pisteen z' ympärillä oleva elementti dz' tuottaa tyhjöissä sähkökentän θ -komponenttiin

$$dE_\theta = I_0 \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R c^2} \omega \cos \omega(t - R/c) \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) dz' \quad (15.22)$$

Tässä R on etäisyys dz' :sta katselupisteeseen ja kertalukua $1/R^2$ olevat termit on jätetty huomiotta. Magneettikenttään tulee puolestaan osuus

$$dB_\phi = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{4\pi R c} \sin \theta \cos \omega(t - R/c) \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) dz' \quad (15.23)$$

E_θ :n ja B_ϕ :n laskemiseksi on integroitava lauseke

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{R} \cos \omega(t - R/c) \cos u \, du \quad (15.24)$$

missä $u = 2\pi z'/\lambda$. Nyt jälleen $R = r - z' \cos \theta$ ja riittävän suurella r nimittäjässä voidaan korvata $R \rightarrow r$. Kosinitermissä täytyy kuitenkin olla varovainen ja kirjoittaa

$$K = \frac{1}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[\omega(t - r/c) + u \cos \theta] \cos u \, du \quad (15.25)$$

Tämän saa muotoon

$$K = \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left(e^{i\omega(t-r/c)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du e^{iu \cos \theta} \cos u \right)$$

jolloin lopputulos on

$$K = \frac{2}{r} \cos \omega(t - r/c) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \quad (15.26)$$

Sijoittamalla tämä tulos sähkö- ja magneettikenttien lausekkeisiin saadaan

$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r c} \cos \omega(t - r/c) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (15.27)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega(t - r/c) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (15.28)$$

Keskimääräiseksi säteilytehoksi tulee nyt

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta \, d\theta \quad (15.29)$$

Integraalin numeerinen arvo on 1.219 joten puoliaaltoantennin säteilyteho on

$$\langle P \rangle = 73.1 \Omega \frac{I_0^2}{2} \quad (15.30)$$

Tästä eteenpäin antennilaskut käyvät pian hankaliksi. Jo se korjaus, että antennia syötetään usein keskeltä sinimuotoisella virralla tai jännitteellä aiheuttaa teknisiä monimutkaisuuksia. Toisaalta pitkän ohuen antennin rajalla ylläoleva tulos on muutaman prosentin päässä oikeasta.

15.3 Liikkuvan varausjoukon aiheuttama kenttä

Tarkastellaan sitten mielivaltaisen varausjoukon säteilyä. Oletetaan, että tarkasteltava varausjoukko on etäällä tarkastelupisteestä siinä mielessä, että varausjoukko pysyy tilavuudessa V_1 sen ajan, mikä SM-aallolta kuluu saavuttaa tarkastelupiste ja V_1 :n dimensiot ovat pienet verrattuna etäisyyteen tarkastelupisteestä (eli $v \ll c$). Oletetaan lisäksi, että tilavuuden pituusskaalat ovat pieniä hallitseviin säteilyn aallonpituuksiin verrattuina ja että varaukset ovat tyhjiössä.

Valitaan origo tilavuuden V_1 sisälle, merkitään varauksien koordinaatteja \mathbf{r}' :llä, tarkastelupiste olkoon \mathbf{r} ja $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Nyt

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \quad (15.31)$$

Viivästynyt skalaaripotentiali tarkastelupisteessä on

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr)}{r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/r} dV' \end{aligned} \quad (15.32)$$

Käyttäen binomisarjaa

$$(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)^{-1} = r^{-1} + r^{-2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r) + \dots \quad (15.33)$$

ja Taylorin kehitelmää

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}', t-r/c} + \dots \quad (15.34)$$

saadaan potentiaali muotoon

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V_1} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (15.35)$$

Ensimmäinen integraali antaa jakautuman kokonaisvarauksen, toinen dipolimomentin ja kolmas dipolimomentin aikaderivaatan ja loput ovat korkeampia multipolimomenteja, jotka häviävät etäällä nopeammin. Siispä

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2} \right] \quad (15.36)$$

Viivästynyt vektoripotentialiaali on puolestaan

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr)}{r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/r} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_1} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' + \dots\end{aligned}\quad (15.37)$$

Äärelliselle tilavuudelle V pätee $\int_V \mathbf{J} dV = d\mathbf{p}/dt$ (HT), jolloin

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \quad (15.38)$$

Olisimme yhtä hyvin voineet johtaa tämän ensin ja laskea sitten φ :n käyttäen Lorentzin mittaehto.

Rajoitutaan jatkossa säteilykenttiin, jotka siis pienenevät etäisyyden funktiona kaikkein hitaimmin (r^{-1}). Laskettaessa $\nabla\varphi$:ta todetaan, että koska $\dot{\mathbf{p}}$ on $(t - r/c)$:n funktio, $\partial\dot{\mathbf{p}}/\partial r = -(1/c)\ddot{\mathbf{p}}$, joten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{c^2 r^3} \mathbf{r} \quad (15.39)$$

Samoin laskettaessa vektoripotentialin roottoria täytyy huomioida se, että \mathbf{A} on $(t - r/c)$:n funktio. Pieni vektoriakrobatia (HT) antaa tuloksen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad (15.40)$$

Edellä saatu sähkökenttä on (HT)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (15.41)$$

Kaikissa laskuissa dipolimomentin aikaderivaatta on laskettava viivästetyllä ajanhetkellä $t - r/c$, joka on sama koko varausjakaumalle pieniksi oletettujen nopeuksien vuoksi.

Säteilykenttä on poikittainen SM-aalto, jonka Poyntingin vektori on

$$\mathbf{S} = \frac{cB^2}{\mu_0 r} \mathbf{r} \quad (15.42)$$

mikä lausuttuna dipolimomentin avulla on

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})^2 \quad (15.43)$$

Jos z -akseli valitaan $\ddot{\mathbf{p}}$:n suuntaiseksi, tämä on

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (15.44)$$

Säteilyn maksimi on kohtisuoraan $\ddot{\mathbf{p}}$:tä vastaan. Säteilytehon (P_R) laskemiseksi tarkastellaan pallonkuorta, joka on kokonaan säteilyalueessa

$$\begin{aligned} P_R &= \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \\ &= \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^3} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{c^3} \end{aligned} \quad (15.45)$$

Varausjoukko siis säteilee, mikäli siihen liittyvällä dipolimomentilla on ”kiihtyvyyttä”. Edellä käsitelty dipoliantenni on esimerkki tällaisesta tilanteesta. Niinkin voi käydä, että vaikka varausjoukossa olisi kiihtyvässä liikkeessä olevia varauksia, niiden muodostama dipolimomentti voisi olla ajasta riippumaton, mutta varaukset säteilisivät siitä huolimatta. Tällöin edellä olevissa sarjakehitelmissä on mentävä korkeampiin kertalukuihin. Seuraavana tulee kvadrupolitermi ja itseasiassa kvadrupoliantenni on aivan käyttökelpoinen vehje. Sen etuna on se, että säteilykenttä pienenee kuten r^{-2} , joten säteily ei häiritse kaukana lähteestä olevia vastaanottimia.

Tässä esitetty tarkastelu soveltuu myös yksittäiseen kiihtyvään varaukseen, jolloin $\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}}$ ja saadaan tuttu Larmorin kaava

$$P_R = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^3} \quad (15.46)$$

Se on voimassa hitaasti liikkuvalla (ei-relativistiselle) kiihtyvälle varaukselle.

15.4 Aallon vaimeneminen ja Thomsonin sironta

Säteily vie mukanaan energiaa, joten säteilytehon ylläpitäminen edellyttää työtä, josta vastaa jonkinlainen lähetin. Jos väliaineessa, jonka läpi aalto etenee, on elektroneja, ne vuorovaikuttavat säteilykentän kanssa ja saavat siltä energiaa. Aalto siis vaimenee.

Yhden nopeudella v liikkuvan elektronin säteilyteho on Larmorin kaavan mukaisesti

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{v}^2}{c^3} \quad (15.47)$$

Tehonhävikkiä kuvaavan voiman ja tehon välinen suhde on

$$F = -\frac{P}{v} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{v}^2}{v} \quad (15.48)$$

Kuvataan tämän suuruista tehon hävikkiä nopeuteen verrannollisella vaimentavalla voimalla $F = -Gv$, missä G antaa oskillaation vaimennuskertoimen $\gamma = G/m$ (vrt. dispersiivisen väliaineen malli luvussa 12), jolloin

$$\gamma = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \dot{v}^2 \quad (15.49)$$

Oletetaan varauksen värähtelevän, $v = v_0 \sin \omega t$, jolloin

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} \quad (15.50)$$

Tämä lauseke on jonkin verran hankala, sillä sen nimittäjä menee nollassi jokaisella jaksolla. Ongelman käsittelemiseksi on tarkasteltava säteilyn reaktiovoimaa, mikä ei ole triviaali asia. Lopputulos on, että tarkasteltaessa keskimääräistä tehoa voidaan osoittajasta ja nimittäjästä ottaa keskiarvo erikseen. Koska

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle \quad (15.51)$$

efektiivinen vaimennuskerroin on

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (15.52)$$

Ottamalla käyttöön **elektronin klassinen säde** $R_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2) = 2.81 \cdot 10^{-15}$ m, saadaan vaimennuskertoimen suhde taajuuteen ilmaistua R_e :n ja aallonpituuden ($\lambda = 2\pi c/\omega$) suhteena

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_e}{\lambda} \quad (15.53)$$

Tästä saadaan arvioiduksi alaraja SM-aallon vaimenemisesta aiheutuvalle spektriviivan leveydelle. Nyt $\gamma = \Delta\omega$ ja $\Delta\omega/\omega = \Delta\lambda/\lambda$, joten

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi}{3} R_e = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ nm} \quad (15.54)$$

Käytännössä absorptioviivat ovat yleensä selvästi leveämpiä, sillä väliaineessa on usein muitakin säteilyä vaimentavia mekanismeja kuin vuorovaikutus yksittäisten elektronien kanssa. Lisäksi Dopplerin efektistä aiheutuva spektriviivojen leveneminen tulee merkittäväksi esimerkiksi astrofysikaalisia spektrejä katseltaessa.

SM-aallon siroamista yksittäisestä vapaasta elektronista kutsutaan **Thomsonin sironnaksi**. Aallon sähkökenttä aiheuttaa kiihtyvyyden

$$m\dot{v} = eE \quad (15.55)$$

joten Larmorin kaava antaa elektronin säteilemän tehon

$$P = \frac{e^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \quad (15.56)$$

Thomsonin sironnan vaikutusala σ_T on P jaettuna elektroniin kohdistuvalla Poyntingin vektorilla. Koska Poyntingin vektori antaa tehon pinta-alaa kohti, vaikutusalan yksikkö on todellakin m^2 .

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad (15.57)$$

joten

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \quad (15.58)$$

Thomsonin sironta on tärkeä ilmiö mm. röntgenfysiikassa. Röntgensäteiden taajuus on paljon suurempi kuin useiden väliaineen elektronien resonanssitaajuus (luku 12). Tämän voi myös ilmaista sanomalla, että röntgensäteilyn fotonien energia on paljon suurempi kuin elektronien sidosenergia. Tällaiset elektronit ovat röntgensäteiden kannalta vapaita. Koska Thomsonin sironnan vaikutusala on hyvin pieni atomin kokoon nähden, pääsee röntgensäteily tunkeutumaan syvälle aineeseen ennen vaimenemistaan.

Vapaita elektroneja on myös plasmassa. Esimerkkinä Thomsonin sironnan hyväksikäytöstä on epäkoherentti ionosfääritutka, joka lähettää esimerkiksi noin 1 GHz:n radioaaltoa avaruuteen. Suurin osa signaalista menee ionosfäärin läpi, mutta yksittäiset elektronit kuitenkin sirottavat riittävästi tehoa takaisin, joka voidaan havaita tehokkailla vastaanottimilla. Sironneen signaalin spektri riippuu ionosfäärin fysikaalisista parametreista ja antaa tietoa lähiavaruuden ilmiöistä.

Luku 16

Elektrodynamiikka ja suhteellisuusteoria

Tämä luku seuraa CL:n lukuja 11 ja 12, joissa asiaa on käsitelty laajemmin sekä osittain RMC:n lukua 22. Esitietoina oletetaan modernin fysiikan alkeista tai muualta tutut perustiedot Lorentzin muunnoksista jne. Koska tensoriformalismin käyttö ei ole useimmille ennestään tuttua, tässä luvussa esitellään joitain käytännön laskuissa tarvittavia perusasioita. Johdatus tensoreihin löytyy CL:n lisäksi kirjoista *Honkosen, Pitkänen, Perko: Fysiikan matemaattiset apuneuvot* (Limes, 1994) tai *Arfken, Weber: Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1995) sekä useista suhteellisuusteorian oppikirjoista.

16.1 Lorentzin muunnos

Suhteellisuusteoria ja elektrodynamiikka liittyvät läheisesti toisiinsa, mikä tullut esiin useampaan kertaan. Koordinaatistomuunnosten merkitys elektrodynamiikassa ilmenee esimerkiksi tilanteessa, jossa on varauksia levossa tarkastelijan suhteen. Hän näkee niistä aiheutuvan sähkökentän, mutta ne eivät aiheuta hänen koordinaatistossaan magneettikenttää. Jos tarkastelija kuitenkin liikkuu varauksiin nähden, varaukset kuljettavat tarkastelijan näkökulmasta sähkövirtaa ja aiheuttavat magneettikentän. Niinpä sähkö- ja magneettikentät muuntuvat jollain tavoin toisikseen liikkeen seurauksena.

Ehkä vieläkin tärkeämpi esimerkki liittyy lukuun 7, jossa kuljetettiin johdetankoa magneettikentässä ja saatiin aikaan sähkökenttä. Siellä olennaista oli, että siirrettiinpä sitten tankoa magneettikentässä, kestopagneettia tangon suhteen tai muutettiin magneettikenttää ajan suhteen, kaikissa tapauksissa pätee **sama** Faradayn laki $\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$. Siis vaikka kentät

itsessään riippuvat liiketilasta, niitä toisiinsa sitova fysikaalinen laki on liikkeestä riippumatta sama.

1800-luvun lopulla sähkömagneettisen aallon olemassaolo oli kokeellisesti varmistettu tosiasiassa, mutta kysymys, missä koordinaatistossa sen nopeus oli tasan c , oli ongelmallinen. Tähän liittyi kysymys eetteristä, johon mm. Maxwell oli itse uskonut ja joka oli hänelle ilmeisestikin tärkein syy kentänmuutosvirran käyttöönottoon. Tämä pelasti myös jatkuvuusyhtälön, mikä oli tietenkin hyvä asia sinänsä. Vuosisadan loppupuolella tehdyt havainnot kuten tähden näennäisen paikan pieni siirtyminen Maan rata liikkeen suuntaan sekä kuuluisa Michelsonin ja Morleyn koe, jolla pyrittiin määrittämään Maan liikenopeus eetterin koordinaatistossa, kuitenkin viittasivat siihen, että valo etenee tyhjiössä vakionopeudella havaitsijan koordinaatistosta riippumatta.

Klassisessa Galilei-muunnoksessa koordinaatisto K' liikkuu koordinaatiston K suhteen x -suuntaan vakionopeudella u siten, että koordinaatistojen akselit ovat samansuuntaisia ja origot yhtyvät nolлахetkellä. Tällöin muunnos $K \rightarrow K'$ on $x' = x - ut, y' = y, z' = z, t' = t$. Newtonin lait ovat samat molemmissa systeemeissä. Aaltoyhtälö ei ole kuitenkaan ole sama, minkä näkee suoralla laskulla.

Vuonna 1904 Lorentz huomasi, että varsin erikoinen koordinaatistomuunnos jätti Maxwellin yhtälöt samoiksi. Asian yksinkertaistamiseksi tarkastellaan homogeenista skalaarimuotoista aaltoyhtälöä, joka kuvaa valon nopeudella (x, y, z) -koordinaatistossa K etenevää aaltoa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (16.1)$$

Olkoon K' toinen koordinaatisto, joka liikkuu tasaisella nopeudella u x -akselin suuntaan. **Lorentzin muunnos** on

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \end{aligned} \quad (16.2)$$

Osittaisderivaatat muuntuvat muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} \quad (16.3)$$

Sijoitetaan nämä aaltoyhtälöön, jolloin saadaan koordinaatistossa K'

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} \quad (16.4)$$

eli aalto etenee samalla nopeudella c myös koordinaatistossa K' .

Lorentz ei ilmeisesti ymmärtänyt muunnoksen merkitystä. Ehkäpä se soti vastoin hänenkin käsitystään eetterin olemassaolosta. Suhteellisuusteorian merkityksen oivalsivat ensimmäisinä *Poincaré* ja *Einstein*. Poincaré oli jo vuonna 1899 esittänyt **suhteellisuusperiaatteen**, jonka mukaan **fysiikan lakien pitää olla samat tasaisessa liikkeessä toistensa suhteen olevissa koordinaatistoissa**. Vuonna 1905 Einstein lisäsi tähän postulaatin, että **valon nopeus tyhjiössä on sama kaikissa koordinaatistoissa ja riippumaton valoa lähettävän kappaleen liikkeestä**. Suppeampi suhteellisuusteoria oli syntynyt.

Tarkastellaan Lorentzin muunnosta neliulotteisessa avaruudessa, jonka paikkavektori on $X = (ct, x, y, z)$. Sen koordinaatteja merkitään x^α , missä $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Jatkossa käytetään kreikkalaisia indeksejä osoittamaan neliavaruuden komponentteja ja latinalaisia indeksejä tavallisen kolmiulotteisen kotiavaruuden komponenteille (1,2,3 tai x, y, z). Otetaan lisäksi käyttöön merkinnät $\beta = u/c$ sekä $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - (u/c)^2}$. Kaikilla vektoreilla (nelinopeus, nelivoima, neliliikemäärä, jne.) on nyt neljä komponenttia. Esimerkiksi nelinopeus u on

$$u = \frac{dX}{d\tau} \quad (16.5)$$

missä $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ on liikkeessä olevan olion **itseisaika** eli aika mitattuna sen omassa lepokoordinaatistossa.

Sellaiset muunnokset, jotka jättävät **neliömuodon**

$$I = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (16.6)$$

invariantiksi ($I = I'$) koordinaatistonmuunnoksessa $K \rightarrow K'$, ovat Lorentzin muunnoksia. Tämän voi todeta esimerkiksi SM-aallolle tilanteessa, jossa koordinaatistojen origot ovat samat hetkellä $t = 0$ ja $t' = 0$. Jos origosta lähtee tuolla hetkellä SM-aalto, $I = 0$ aaltorintaman mukana kummassakin koordinaatistossa.

16.2 Tensoriformalismia

Edellä ollut x -akselin suuntainen Lorentzin muunnos voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (16.7)$$

Merkitseillä kerroinmatriisia Λ :lla tämä voidaan kirjoittaa tensorimuodossa

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad (16.8)$$

missä on käytetty Einsteinin summaussääntöä eli toistetun indeksin yli summataan:

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad (16.9)$$

Tässä luvussa käytettävissä tensoriformalismissa indeksien paikka ja järjestys ovat tärkeitä. Toisen kertaluvun tensoreilla indeksien järjestys kertoo, onko kyseessä tensorin matriisiesityksen vaakarivi vai pystyrivi. Vektoria, jolla on yläindeksi, kutsutaan **kontravariantiksi** vektoriksi ja alaindeksillä varustettua vektoria puolestaan **kovariantiksi** vektoriksi. Summaus tapahtuu **aina** ylä- ja alaindeksin välillä. Tensoriformalismi voidaan muotoilla myös ilman ylä- ja alaindeksijä (esim. RMC luku 22), mutta silloin siitä tulee laskuteknisesti jonkin verran hankalampaa.

Kahdesta kontravariantista vektorista u^{μ} ja v^{ν} muodostetaan toisen kertaluvun tensori $T^{\mu\nu}$ suorana tulona, jonka komponentit muodostavat matriisin $u^{\mu}v^{\nu}$. Tensori $T^{\mu\nu}$ muuntuu siis seuraavasti:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta} \quad (16.10)$$

Kahden kontravariantin nelivektorin pistetulo määritellään puolestaan

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta} \quad (16.11)$$

missä

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16.12)$$

on **metrinen perustensori**. Se on symmetrinen ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$) ja sillä on käänteismatriisi $g^{\alpha\beta}$ eli $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, missä δ^{α}_{γ} on yksikkötensori eli Kroneckerin deltan neliulotteinen vastine, jolle $\delta^{\alpha}_{\gamma} = 1$, kun $\alpha = \gamma$ ja muulloin $\delta^{\alpha}_{\gamma} = 0$.

Metrisellä perustensorilla on tärkeä laskutekninen rooli. Koska summaus tapahtuu aina yläindeksin ja alaindeksin välillä, täytyy esimerkiksi kahden kontravariantin vektorin pistetuloa laskettaessa toinen muuntaa kovariantiksi eli laskea sen indeksi alas, mikä tapahtuu seuraavasti:

$$v^\beta = g^{\alpha\beta} v_\alpha; \quad v_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha \quad (16.13)$$

Edellä oleva pistetulo (16.11) on siis

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A_\beta B^\beta = A^\alpha B_\alpha \quad (16.14)$$

Samalla tavoin nostetaan ja lasketaan toisen tai korkeamman kertaluvun tensoreiden indeksejä

$$T_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\omega} T^{\omega\beta} \quad (16.15)$$

Huom. Metrisen perustensorin komponenttien \pm -merkit määritellään joko näin tai päinvastoin. Valinnalla ei ole fysikaalista merkitystä, mutta laskettaessa on pidettävä kiinni tehdystä valinnasta. Lisäksi indeksit on syytä kirjoittaa selvästi peräkkäin, etteivät vaaka- ja pystyriivit mene sekaisin.

Invariantti neliömuoto I ennen Lorentzin muunnosta on

$$I = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (16.16)$$

ja Lorentzin muunnoksen jälkeen ($x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$)

$$I' = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta \quad (16.17)$$

Vaatimus $I = I'$ antaa ehdon

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (16.18)$$

tai

$$g^{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta} \quad (16.19)$$

Vain sellaiset muunnokset, jotka toteuttavat tämän yhtälön, ovat Lorentzin muunnoksia. Yleisessä lineaarisessa muunnoksessa on 16 vapaata parametria ja ehdossa (16.19) on 10 eri yhtälöä, joten Lorentzin muunnoksessa on kuusi vapaata parametria: pusku jokaisen (kolmiavaruuden) koordinaattiakselin suuntaan ja kierto jokaisen akselin ympäri.

Määritetään vielä $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\gamma$. Merkitään $M^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma}$ ja kerrotaan puolittain $\Lambda^\mu{}_\alpha$:lla:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha M^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma} = g^{\mu\nu} g_{\nu\gamma} = \delta^\mu{}_\gamma$$

joten

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma} = \Lambda_\gamma{}^\alpha \quad (16.20)$$

HT: laske Λ^{-1} x -akselin suuntaisen Lorentz-muunnoksen tapauksessa.

16.3 Lorentzin muunnokset ja dynamiikka

Vaikka suhteellisuusteorian fysikaalinen perusta onkin elektrodynamiikassa – valon nopeushan on nimenomaan sähkömagneettisen aallon nopeus, Lorentzin muunnokset, ajan venyminen jne. ovat useille tutumpia mekaanisen liikkeen avulla annetuissa esimerkeissä.

Valon nopeus on rajanopeus, jolla vain massaton hiukkanen voi edetä. Näin ollen sitä ei voi saavuttaa laskemalla yhteen nopeuksia, jotka ovat alle valon nopeuden, eli esimerkiksi tekemällä kaksi Lorentz-muunnosta peräkkäin. Yhtälöt (16.2) kuvaavat muunnosta koordinaatistoon K' , joka liikkuu nopeudella u koordinaatiston K suhteen. Liikkukoon sitten koordinaatisto K'' nopeudella v koordinaatiston K' suhteen, jolloin

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x' - vt') \\y'' &= y' \\z'' &= z' \\t'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t' - \frac{v}{c^2} x' \right)\end{aligned}\tag{16.21}$$

Sijoittamalla tähän systeemin K' (yhdeällä pilkulla merkityt) koordinaatit muunnoksen (16.2) mukaisesti saadaan yhdistetty muunnos

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} (x - wt) \\y'' &= y \\z'' &= z \\t'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \left(t - \frac{w}{c^2} x \right)\end{aligned}\tag{16.22}$$

missä

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}\tag{16.23}$$

Tämä on **nopeuksien yhteenlaskukaava**. Olivatpa u ja v kuinka lähellä valon nopeutta tahansa, niiden summa jää kuitenkin alle valon nopeuden. Tämä on itse asiassa seuraus siitä, että Lorentzin muunnokset muodostavat matemaattisesti ryhmän. Yhdistämällä kaksi muunnosta saadaan uusi Lorentzin muunnos, tässä tapauksessa koordinaatistosta K koordinaatistoon K'' , joiden suhteellinen nopeus on w .

Suppea suhteellisuuseriaate voidaan ilmaista sanomalla, että *kaikki Lorentzin muunnosten yhdistämät inertiaalijärjestelmät ovat samanaivoisia kaikkien fysikaalisten tapahtumien kuvailussa*. Tämä jättää kiihtyvät koordinaatistot tarkastelun ulkopuolelle. Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti tavallista massapistemekaniikkaa suhteellisuuseriaatteen valossa.

Kutsutaan massapisteen (hiukkasen) liikerataa neliavaruudessa sen **maailmanviivaksi** ja merkitään sen koordinaatteja x^μ . Differentiaalit dx^μ määrittävät hiukkasen differentiaalisen siirtymän pitkin maailmanviivaa. Muodostetaan sitten Lorentz-invariantti skalaarisuure

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (16.24)$$

joka on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Tarkastellaan nyt hiukkas-ta koordinaatistossa, jossa se on hetkellisesti levossa. Tällöin

$$dx' = (dx'^0, 0, 0, 0) \quad (16.25)$$

eli tässä koordinaatistossa vain aika kuluu. Nyt

$$ds^2 = g_{00}(dx'^0)^2 = c^2(dt')^2 \quad (16.26)$$

Ajanlaatuinen suure ds/c on invariantti aikaväli hiukkasen hetkellisessä lepo-koordinaatistossa eli se on hiukkasen mukana liikkuvan kellon mittaama aikaväli. Määritellään kiinteästä maailmanpisteestä s_A laskettu hiukkasen **ominaisaika** integraalina

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{s_A}^s ds = \int_{t_A}^t dt \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (16.27)$$

Tässä kaavassa esiintyy kolminopeus \mathbf{v} koordinaatistossa K

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \quad (16.28)$$

ja ominaisajan differentiaalinen muoto on sama kuin luvussa 16.1 mainittu

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = dt \quad (16.29)$$

joka kuvaa ajan venymistä liikkeessä olevassa koordinaatistossa.

Hiukkasen nelinopeus u määritellään sen nelipaikan derivaattana ominaisajan suhteen (älä sekoita edellä esiintyneeseen tavalliseen nopeuteen u !). Sen komponentit ovat

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (16.30)$$

Kolminopeuden avulla ilmaistuna tämä on $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$. Suoralla laskulla nähdään, että nelinopeuden neliö on invariantti

$$u^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \quad (16.31)$$

Vastaavasti lasketaan nelikiihtyvyys

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad (16.32)$$

Tarkastellaan sitten Newtonin liikeyhtälöä

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (16.33)$$

missä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ on liikemäärä. Tämä on kuitenkin Galilei-invariantti yhtälö, missä mikään ei rajoita nopeutta alle valon nopeuden. Muodostetaan nelivektoriyhtälö

$$m_0 \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu \quad (16.34)$$

missä m_0 on massanlaatuinen vakiosuure ja K^μ **nelivoima**. Jotta tämä olisi kelvollinen liikeyhtälö, pienen nopeuden rajalla (sama asia kuin raja $c \rightarrow \infty$), tämän avaruusosasta on saatava Newtonin liikeyhtälö. Käyttäen koordinaattiaikaa t kirjoitetaan yhtälön avaruuskomponentit muodossa

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = K^i \sqrt{1-\beta^2} \quad (16.35)$$

Jos ulkoinen voima on nolla, liikemäärä on vakio, joten liikemäärän määritelmäksi tulee

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (16.36)$$

joka rajalla $\beta \rightarrow 0$ vastaa Newtonin mekaniikan liikemäärää. Näin kolmivoiman ja nelivoiman välinen yhteys on

$$F^i = K^i \sqrt{1-\beta^2} \quad (16.37)$$

Liikeyhtälön (16.34) nollannen komponentin määrittämiseksi kirjoitetaan se nelikiihtyvyyden a^μ avulla

$$m_0 a^\mu = K^\mu \quad (16.38)$$

Laskemalla nelikiihtyvyyden ja nelinopeuden pistetulo saadaan

$$g_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \quad (16.39)$$

eli nelikiihtyvyys ja nelinopeus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten myös

$$g_{\mu\nu} K^\mu u^\nu = 0 \quad (16.40)$$

Sijoittamalla tähän nelinopeuden komponentit ($u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$) ja nelivoiman avaruusosa jää jäljelle

$$\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} K^0 = \sum_{i=1}^3 \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{F^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (16.41)$$

eli

$$K^0 = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16.42)$$

Liiketytälön nollas komponentti on siis

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (16.43)$$

Hiukkasen liike-energia määritellään Newtonin mekaniikassa siten, että sen aikaderivaatta (teho) on $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Tarkastellaan sitten energianlaatuista suuretta

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16.44)$$

Kirjoittamalla γ sarjaksi saadaan

$$W = m_0 c^2 \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right] \quad (16.45)$$

Epärelativistisella rajalla ($\beta \rightarrow 0$) tästä tulee

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (16.46)$$

eli Newtonin mekaniikan mukainen m_0 -massaisen hiukkasen liike-energia ja suure $m_0 c^2$, jota kutsutaan m_0 -massaisen hiukkasen **lepoenergiaksi**.

Nyt neliliikemäärä voidaan kirjoittaa muodossa

$$p = \left(\frac{W}{c}, \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (16.47)$$

tai

$$p^\mu = m_0 u^\mu \quad (16.48)$$

Tämän invariantiksi neliöksi saadaan

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (m_0 c)^2 = W^2/c^2 - \mathbf{p}^2 \quad (16.49)$$

Relativistiset liiketytälöt voi tiivistää muotoon

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = K^\mu \quad (16.50)$$

Huom. Hiukkasen **massa** on m_0 . Sitä kutsutaan joskus lepomassaksi, mutta siihen ei ole mitään syytä, sillä massa m_0 on itseasiassa Lorentz-invariantti suure, joka määrittelee *lepoenergian* kaavalla

$$W_0 = \lim_{v \rightarrow 0} W = m_0 c^2 \quad (16.51)$$

16.4 Elektrodynamiikan kovariantti formulointi

Tarkastellaan seuraavaksi Lorentzin voiman lauseketta muodossa

$$F^i = q(E^i + \epsilon^i_{jk} v^j B^k) \quad (16.52)$$

missä ϵ_{ijk} on permutaatiotensori ja oletetaan summaus toistettujen indeksien yli (HT: kertaa ϵ_{ijk} :n ominaisuudet). Varaus q oletetaan invariantiksi säilymlain perusteella.

Edellä saatiin hiukkasen liikeyhtälö muotoon

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad (16.53)$$

missä nelivoiman komponentit ovat

$$K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}; \quad K^i = \gamma F^i \quad (16.54)$$

Oletetaan nyt, että kyseisen voiman avaruusosa on juuri Lorentzin voima. Kirjoitetaan liikeyhtälö komponenteittain. Aikakomponentista tulee

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma}{c} q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (16.55)$$

eli kentän tekemä työ. Paikkakomponenteille saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dp^1}{d\tau} &= \gamma q (E^1 + (v^2 B^3 - v^3 B^2)) = q \left(\frac{E^1}{c} u^0 + u^2 B^3 - u^3 B^2 \right) \\ \frac{dp^2}{d\tau} &= \gamma q (E^2 + (v^3 B^1 - v^1 B^3)) = q \left(\frac{E^2}{c} u^0 + u^3 B^1 - u^1 B^3 \right) \\ \frac{dp^3}{d\tau} &= \gamma q (E^3 + (v^1 B^2 - v^2 B^1)) = q \left(\frac{E^3}{c} u^0 + u^1 B^2 - u^2 B^1 \right) \end{aligned} \quad (16.56)$$

Aika- ja paikkakomponentit voidaan koota yhtälöiksi

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q u_\beta F^{\beta\mu} \quad (16.57)$$

missä $(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = (1/c)(E^1, E^2, E^3)$, $(F^{23}, F^{31}, F^{12}) = (B^1, B^2, B^3)$ ja $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Tästä saa suoralla laskulla liikeyhtälön komponentit.

Osoitetaan sitten, että $(F^{\mu\nu})$ on kelvollinen toisen kertaluvun tensori eli että se muuntuu oikein Lorentzin muunnoksissa. Muunnettu liikeyhtälö on

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = q u'_\beta F'^{\beta\mu}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dp^\nu}{d\tau} &= q\Lambda_\beta{}^\alpha u_\alpha F'^{\beta\mu} = q\Lambda^\mu{}_\nu u_\alpha F^{\alpha\nu} \\
&\Rightarrow \Lambda_\beta{}^\alpha F'^{\beta\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \\
&\Leftrightarrow (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta F'^{\beta\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \\
&\Leftrightarrow \Lambda^\gamma{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta F'^{\beta\mu} = \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \\
&\Leftrightarrow F'^{\gamma\mu} = \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \tag{16.58}
\end{aligned}$$

Tensoria ($F^{\mu\nu}$) kutsutaan **sähkömagneettiseksi kenttätensoriksi** ja sen komponentit ovat

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16.59}$$

Kirjoitetaan sitten Maxwellin yhtälöt kenttätensorin komponenttien avulla. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \equiv \mu_0 c^2 \rho$ tulee muotoon

$$\partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = \mu_0 c \rho \tag{16.60}$$

Ampèren ja Maxwellin lain kolme komponenttia ovat puolestaan

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{10} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} &= \mu_0 j^1 \\
\partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_3 F^{23} &= \mu_0 j^2 \\
\partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} &= \mu_0 j^3
\end{aligned} \tag{16.61}$$

Ottamalla käyttöön **nelivirta** $J = (j^\mu) = (c\rho, \mathbf{J})$ voidaan nämä yhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu \tag{16.62}$$

Vastaavasti homogeeniset yhtälöt ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$) saadaan muotoon (HT)

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{16.63}$$

Koska Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa tensoriyhtälöinä, ne säilyttävät muotonsa Lorentzin muunnoksissa. Näin siis Maxwellin 1860-luvulla kehittämä teoria on osoittautunut ensimmäiseksi suppeamman suhteellisuusteorian kanssa sopusoinnussa olevaksi fysiikan kuvailuksi.

16.5 Kenttien muunnokset

Elektrodynamiikan Lorentz-kovarianssi tarkoittaa siis sitä, että Maxwellin yhtälöt ovat samat koordinaatistosta riippumatta. Sitä vastoin sähkö- ja magneettikentät riippuvat havaitsijan liiketilasta. Muunnosten täytyy siis olla sellaiset, että sijoitettaessa muunnetut kentät Maxwellin yhtälöihin, tuloksena ovat alkuperäiset yhtälöt. Kaikki tämä on tietenkin jo edellisen jakson formalismin sisällä, mutta katsotaan tässä vielä kenttien \mathbf{E} ja \mathbf{B} muunnoskaavat.

Valitaan koordinaattiakselit siten, että koordinaatistojen välinen suhteellinen nopeus \mathbf{v} on x -akselin suuntainen. Muunnosmatriisi on tällöin

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.64)$$

Muuntumaton sähkökentän 1-komponentti on $F^{01} = E^1/c$. Lasketaan F'^{01} :

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_0 F^{00} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_1 F^{11} \\ &= \gamma^2 \frac{1}{c} E^1 + \beta^2 \gamma^2 \left(-\frac{1}{c} E^1\right) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$E'^1 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E^1 = E^1 \quad (16.65)$$

Siis puskun suuntainen sähkökenttä säilyy ennallaan. Lasketaan seuraavaksi $F'^{02} = E^2/c$:n muunnos

$$\begin{aligned} F'^{02} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^2{}_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_0 F^{02} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12} \\ &= \gamma \frac{1}{c} E^2 - \beta \gamma B^3 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$E'^2 = \gamma E^2 - \gamma u B^3 \quad (16.66)$$

Vastaavat laskut komponentille E^3 ja magneettikentän komponenteille antavat muunnoskaavat

$$\mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') = \gamma(\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (16.67)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{B}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') = \gamma(\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$$

missä \parallel ja \perp viittaavat \mathbf{v} :n suuntaisiin ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin.

Liikkuvan varauksen kenttä

Lasketaan esimerkkinä Lorentzin muunnoksesta tasaisesti liikkuvan varauksen kentät. Oletetaan, että pistevaraus liikkuu nopeudella v x -akselia pitkin pilkuttomassa tarkkailijan koordinaatistossa, jossa haluamme määrittää kentät. Olkoon pilkullinen koordinaatisto sellainen, että se liikkuu varauksen mukana ja sen origo olkoon varauksen kohdalla. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' &= 0 \\ \mathbf{E}' &= \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}\end{aligned}\quad (16.68)$$

Käytetään edellä johdettuja muunnoskaavoja

$$\begin{aligned}E_x = E_{\parallel} = E'_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0(r')^3} \\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\gamma q\mathbf{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0(r')^3}\end{aligned}\quad (16.69)$$

Vektorin \mathbf{r}' komponentit ovat

$$\mathbf{r}' = (\gamma(x - vt), y, z) \quad (16.70)$$

Määritellään suure

$$\gamma\mathbf{R}^* = (\gamma(x - vt), y, z) \quad (16.71)$$

jolloin sähkökentän komponentit ovat

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - vt)}{\gamma^3(R^*)^3} \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{\gamma^3(R^*)^3} \\ E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{\gamma^3(R^*)^3}\end{aligned}\quad (16.72)$$

eli koottuna vektoriksi

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3} (1 - \beta^2) \quad (16.73)$$

missä $\mathbf{R} = (x - vt, y, z)$. Tämä on luvusta 14 tuttu tulos. Kenttä on yhä radiaalinen, mutta vahvempi varauksen liikettä vastaan kohtisuoraan suuntaan. Jos varaus liikkuu hyvin suurella nopeudella, kenttä on pakkautunut hyvin vahvasti kohtisuoraan suuntaan. Kyseessä on siis samantapainen Lorentzin kontraktio kuin mekaniikasta tutuissa litistymisesimerkeissä.

Magneettikentäksi tulee puolestaan

$$\begin{aligned}B_x &= B_{\parallel} = 0 \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' = \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}_{\perp}\end{aligned}\quad (16.74)$$

eli

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (16.75)$$

Magneettikentän kenttäviivat ovat renkaita varauksen kulkureitin ympärillä ja niitä on tiheimmässä siellä, missä on eniten sähkökenttää eli hiukkasen kohdalla olevalla kohtisuoralla tasolla.

Huom. Muistutetaan taas, että tasaisella nopeudella liikkuvan varauksen kenttiä ei pidä sekoittaa kiihtyvän hiukkasen säteilykenttään! Suurelakaan vakionopeudella liikkuva hiukkanen ei säteile, vaan säteily edellyttää aina nopeuden muutosta.

16.6 Potentiaalien muunnokset

Homogeeniset Maxwellin yhtälöt voidaan luvussa 16.4 opitun mukaan esittää muodossa

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (16.76)$$

Nämä yhtälöt ovat välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että on olemassa nelipotentiaali A_μ , jolle

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \quad (16.77)$$

Suoralla laskulla nähdään, että näin esitetty $F_{\mu\nu}$ toteuttaa homogeeniset Maxwellin yhtälöt eli välttämättömyysehto on voimassa. Riittävyys ehdon todistaminen sivuutetaan (ks. CL).

Nostamalla indeksit saadaan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (16.78)$$

Muistamalla kenttätensorin määritelmä ja kenttien esitys potentiaalien avulla saadaan nelipotentiaali

$$(A^\mu) = (\varphi/c, \mathbf{A}) \quad (16.79)$$

joka toteuttaa aaltoyhtälön

$$\partial_\gamma \partial^\gamma A^\nu - \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = \mu_0 j^\nu \quad (16.80)$$

Valitsemalla Lorenzin mittaehto ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$) tämä palautuu tutuksi aaltoyhtälöksi.

Todetaan lopuksi, että nelipotentiaali yleensä ajatellaan nelivektoriksi. Tämä on oikeutettua, vaikkakaan ei välttämätöntä. Voidaan osoittaa, että nelipotentiaali muuntuu mittamuunnosta vaille nelivektorina (ks. CL).

16.7 Säilymislait

Luvussa 9 esitettiin energian, liikemäärän ja impulssimomentin säilymislait kolmiavaruuden Maxwellin jännitystensorin avulla. Esitetään nämä säilymis-
lait kovariantissa muodossa.

Lorentzin voimatiheys on

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (16.81)$$

Olkoon $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f^1 &= \rho E^1 + j^2 B^3 - j^3 B^2 \\ &= c\rho F^{01} + j^2 F^{12} - j^3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} - j_2 F^{12} + j_3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} + j_2 F^{21} + j_3 F^{31} \end{aligned} \quad (16.82)$$

sillä $(j^0, j^1, j^2, j^3) = (j_0, -j_1, -j_2, -j_3)$. Olemme saaneet siis yhtälön

$$f^i = j_\alpha F^{\alpha i}; \quad (F^{\alpha\alpha} = 0) \quad (16.83)$$

Lorentzin voimatiheys on siten nelivektorin $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$ avaruusosa. 0-komponentti on puolestaan

$$f^0 = j_\alpha F^{\alpha 0} = -F^{0\alpha} j_\alpha = \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (16.84)$$

eli tehohäviö tilavuusyksikössä. Koska

$$j_\alpha = g_{\alpha\beta} j^\beta = \frac{1}{\mu_0} g_{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\beta\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F_\alpha^\nu \quad (16.85)$$

voidaan nelivoima kirjoittaa muodossa

$$f^\mu = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha^\nu) F^{\alpha\mu} \quad (16.86)$$

Määritellään (jälkiviisaasti) symmetrinen tensori $(T^{\nu\mu})$

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} [F_\alpha^\nu F^{\alpha\mu} - \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] = T^{\mu\nu} \quad (16.87)$$

Nyt pieni indeksijumppa antaa tuloksen

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha^\nu) F^{\alpha\mu} = f^\mu \quad (16.88)$$

$(T^{\mu\nu})$ on siis sellainen tensori, jonka divergenssi antaa Lorentzin nelivoimatiheyden. Tensori on arvatenkin Maxwellin jännitystensorin yleistys neliavaruudessa. Tämän toteamiseksi lasketaan tensorin komponentit.

Tensorin määritelmässä on mukana invariantti $-(1/4)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = (1/2)((E/c)^2 - B^2)$, joka tulee mukaan diagonaalisiiin termeihin. Nyt

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0} \left[F_{\alpha}{}^0 F^{\alpha 0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} E^2 - B^2 \right) \right] = - \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (16.89)$$

eli kentän energiatiheys $w_{em} = -T^{00}$.

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0} F_{\alpha}{}^0 F^{\alpha i} = \dots = -\frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i = -\frac{1}{c} S^i \quad (16.90)$$

ovat puolestaan Poyntingin vektorin komponentit. Pelkästään avaruusosia sisältävät komponentit ovat

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \frac{1}{\mu_0} \left[F_{\alpha}{}^k F^{\alpha l} + g^{kl} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} E^2 - B^2 \right) \right] \\ &= \epsilon_0 E^k E^l + g^{kl} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} B^k B^l + g^{kl} \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= T_e^{kl} + T_m^{kl} \end{aligned} \quad (16.91)$$

eli jaksossa 9.3.2 johdetun Maxwellin jännitystensorin \mathcal{T} sähköiset ja magneettiset komponentit. Tensori $T^{\alpha\beta}$ on kuitenkin Maxwellin jännitystensorin laajennus koska sen 0α -komponentit antavat suoraan sekä sähkömagneettisen energiatiheyden että Poyntingin vektorin.

Tuloksista $f^{\mu} = j_{\alpha} F^{\alpha\mu}$ ja $f^{\mu} = \partial_{\beta} T^{\beta\mu}$ saadaan yhtälö

$$\partial_{\beta} T^{\beta\mu} = j_{\alpha} F^{\alpha\mu} \quad (16.92)$$

Tämän nollass komponentti $\partial_{\beta} T^{\beta 0} = j_{\alpha} F^{\alpha 0}$ antaa

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (16.93)$$

eli differentiaalisen energian säilymlain (Poyntingin teoreeman). Avaruuskomponentit $\partial_{\beta} T^{\beta i} = j_{\alpha} F^{\alpha i}$ puolestaan antavat liikemäärän säilymlain

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})^l + \partial_k (T_e^{kl} + T_m^{kl}) = \rho E^l + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})^l \quad (16.94)$$

Olemme siis onnistuneet kirjoittamaan olennaisesti koko klassisen mikrokooppisen elektrodynamiikan kovariantissa muodossa, kun väliaineeksi oletetaan tyhjä.

Luvussa 14 käsitelty liikkuvan varauksen säteily voidaan esittää hieman elegantimmin tässä luvussa käsitellyssä formalismissa. Asiasta kiinnostuneita kehoitetaan tutustumaan CL:n lukuun 13 tai Jacksonin säteilyteoriaa käsitteleviin lukuihin.

Luku 17

Varatun hiukkasen liike SM-kentässä

Tarkastellaan tässä luvussa varatun hiukkasen liikettä sähkömagneettisessa kentässä. Asiaa on käsitelty RMC:n luvussa 14 ja CL käsittelee Hamiltonin formalismia luvussa 8.4. Liikkeyhtälö on tullut esiin useaan otteeseen kurssin aikana aiemminkin.

Yleisesti asetettuna tehtävänä on ratkaista relativistinen liikkeyhtälö

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.1)$$

missä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Lisäksi muistetaan, että kenttä tekee työtä teholla $dW/dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. Liikkeyhtälö on hankala integroitava yleisille ajasta ja paikasta riippuville kentille ja se on usein ratkaistava numeerisesti. Jos aika- ja paikkariippuvuuksien voi olettaa olevan riittävän hitaita ja laakeita, on mahdollista käyttää häiriöteoriaa lähtien vakiokentistä ja tehdä niihin pieniä korjauksia.

17.1 Säteilyhäviöiden vaikutus

Liikkeyhtälön käsittelyyn sisältyy hyvin vaikea ongelma. Jos hiukkasella on kiihtyvyyttä, sen säteilee ja säteily kuljettaa mukanaan energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Varatun hiukkasen säteilyä kuitenkin tarkastellaan tyypillisesti kaksivaiheisesti. Ensin ratkaistaan liikkeyhtälöstä hiukkasen rata annetussa ulkoisessa kentässä. Sen jälkeen lasketaan säteilyhäviöt olettaen, että hiukkanen pysyy ratkaistulla radallaan. Käytännössä monessa tilanteessa säteilyn vaikutus voidaan jättää huomiotta.

Säteilyn merkitystä voidaan arvioida tutkimalla tilannetta, jossa hiukkasella (varaus q) kiihtyvyyden suuruusluokkaa a ajan T verran. Jos nopeus on

paljon valon nopeutta pienempi, niin Larmorin kaavan perusteella hiukkasen säteilemä energia on

$$W_{rad} \sim \frac{q^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (17.2)$$

Jos kyseessä on levosta lähtenyt hiukkanen, niin silloin sen liike-energia on luokkaa $W_{kin} \sim m(aT)^2$. Siten

$$\frac{W_{rad}}{W_{kin}} \sim \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3 T} = \frac{\tau}{T} \quad (17.3)$$

missä $\tau = q^2/(6\pi\epsilon_0 m c^3 T)$ on karakteristinen aika. Varauksellisista hiukkasista se on suurin elektroneille ($\sim 10^{-23}$ s), missä ajassa valo etenee matkan $c\tau \sim 10^{-15}$ m. Jos taas kyseessä on jaksollinen liike amplitudilla d ja kulmataajuudella ω , niin $W_{kin} \sim m\omega^2 d^2$, $a \sim \omega^2 d$ ja $T \sim 1/\omega$. Silloin

$$\frac{W_{rad}}{W_{kin}} \sim \omega\tau \quad (17.4)$$

Yhteenvedona voi todeta, että säteilyhäviöt ovat lyhytkestoisessa liikkeessä merkittäviä vain, jos hiukkasen liike muuttuu ulkoisten voimien takia merkittävästi aikaskaalassa τ tai pituusskaalassa $c\tau$. Pitkäkestoisessa liikkeessä kumuloituvat säteilyhäviöt on puolestaan aina otettava huomioon.

17.2 Homogeeninen ja staattinen B

Oletetaan aluksi, että $\mathbf{E} = 0$ ja $\mathbf{B} = \text{vakio}$. Rajoitutaan lisäksi epärelativistiseen tapaukseen $v \ll c$, jolloin

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.5)$$

Ottamalla tästä pistetulo \mathbf{v} :n kanssa saadaan

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0 \quad (17.6)$$

Hiukkasen liike-energia ja nopeuden itseisarvo ovat siis vakioita. Valitaan koordinaatisto siten, että $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Tällöin

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \quad (17.7)$$

Magneettikentän suuntainen nopeus on siis vakio (v_{\parallel}). Ratkaistaan liikeyhtälö alkuehdoilla $\mathbf{r}(t=0) = 0$ ja $\mathbf{v}(t=0) = (v_0, 0, v_{\parallel})$. Derivoimalla poikittaisia komponentteja toisen kerran ajan suhteen saadaan yhtälöt

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x ; \quad \ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y \quad (17.8)$$

missä ω_c on **pyörähdystaajuus**, **syklotronitaajuus** tai **Larmorin taajuus**

$$\omega_c = qB/m \quad (17.9)$$

Koska $\ddot{y} = -\omega_c \dot{x}$, niin integroimalla ja alkuehdot huomioimalla saadaan $v_y = -\omega_c x$. Tällöin yhtälöstä $\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$ seuraa

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \quad (17.10)$$

ja sama yhtälö y -koordinaatille. Saadut yhtälöt kuvaavat harmonisia värähtelijöitä, joiden kulmataajuus on ω_c . Ratkaisemalla hiukkasen rata nähdään, että ratakäyrän projektio xy -tasossa on ympyrä, jonka säde on

$$r_L = \frac{v_\perp}{|\omega_c|} = \frac{mv_\perp}{|q|B} \quad (17.11)$$

Tässä $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ on hiukkasen nopeus kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä kutsutaan **pyörähdyssäteeksi** (Larmorin säteeksi). Pyörimisliikkeen keskipistettä kutsutaan **johtokeskukseksi** (guiding center, GC). Yhteen kierrokseen kuluva aika, **pyörähdysperiodi** (Larmorin aika), on

$$\tau_L = \frac{2\pi}{|\omega_c|} \quad (17.12)$$

Katsottaessa magneettikentän suuntaan myötäpäivään pyörivän hiukkasen varaus on negatiivinen (HT).

Näin hiukkasen liike on jaettu kahteen komponenttiin: vakionopeus v_\parallel kentän suuntaan ja pyörimisliike v_\perp kenttää vastaan kohtisuoraan. Näiden summa on ruuviviiva. Ruuviviivan **nousukulma** määritellään kaavalla

$$\tan \alpha = v_\perp/v_\parallel \quad (17.13)$$

joten

$$\alpha = \arcsin(v_\perp/v) = \arccos(v_\parallel/v) \quad (17.14)$$

Koordinaatistoa, jossa $v_\parallel = 0$ kutsutaan **johtokeskuskoordinaatistoksi** (GCS) ja hiukkasen liikkeen jakamista GC:n liikkeeseen ja pyörimisliikkeeseen GC:n ympäri kutsutaan **johtokeskusapproksimaatioksi**.

GCS:ssä varaus aiheuttaa sähkövirran $I = q/\tau_L$, johon liittyvä **magneettinen momentti** on

$$\mu = I\pi r_L^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 r_L^2 B}{m} = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B} \quad (17.15)$$

Vektorimuodossa magneettinen momentti on

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} q \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_\perp \quad (17.16)$$

Koska pyörähdyssädevektorissa on mukana varauksen merkki, $\boldsymbol{\mu}$:n suunta on varauksesta riippumatta vastakkainen taustan magneettikentälle eli vapaat varatut hiukkaset muodostavat tässä mielessä diamagneettisen systeemin.

Myös relativistinen liikeyhtälö on tässä tapauksessa helppo ratkaista. Koska liike-energia on vakio, niin γ on vakio. Liikeyhtälön komponentit ovat siis

$$\begin{aligned}\gamma m \dot{v}_x &= qBv_y \\ \gamma m \dot{v}_y &= -qBv_x \\ \gamma m \dot{v}_z &= 0\end{aligned}\tag{17.17}$$

eli vakiotekijää γ lukuunottamatta samat kuin edellä. Pyörähdystaajuus on nyt $\omega_c = qB/(\gamma m)$.

17.3 Homogeeniset ja staattiset \mathbf{B} ja \mathbf{E}

Oletetaan nyt, että vakiomagneettikentän lisäksi hiukkasiin vaikuttaa myös sähkökenttä $\mathbf{E} = \text{vakio}$. Magneettikentän suuntaiseksi epärelativistiseksi liikeyhtälöksi tulee

$$m\dot{v}_{\parallel} = qE_{\parallel}\tag{17.18}$$

Tämä kuvaa kiihdytystä magneettikentän suuntaan. Tarkastellaan sitten poikittaista sähkökenttää ja valitaan se x -akselin suuntaiseksi, jolloin

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x\end{aligned}\tag{17.19}$$

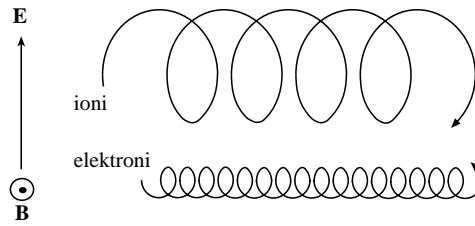
Ottamalla jälleen toinen aikaderivaatta saadaan

$$\begin{aligned}\ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right)\end{aligned}\tag{17.20}$$

Sijoittamalla $v'_y = v_y + E_x/B$ saadaan yhtälöryhmä (17.8). Tässäkin tapauksessa hiukkanen kieppuu GC:n ympäri, mutta nyt GC kulkeutuu y -akselin suuntaan nopeudella E_x/B . Vektorimuodossa kulkeutumisenopeus on

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}\tag{17.21}$$

Tätä kutsutaan **sähköiseksi kulkeutumiseksi** tai $E \times B$ -kulkeutumiseksi (kuva 17.1). Kulkeutumisenopeus ei riipu varauksesta eikä hiukkasen massasta!



Kuva 17.1: Sähköinen kulkeutuminen.

Edelläolevassa laskussa tehtiin itseasiassa Lorentzin muunnos sähkökentälle hiukkasen mukana liikkuvaan koordinaatistoon

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (17.22)$$

Koska tässä koordinaatistossa $\mathbf{E}' = 0$, $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ja ratkaisemalla tästä \mathbf{v} saadaan (17.21). Tämä koordinaatiston muunnos voidaan tehdä kaikille riittävän heikoille ei-magneettisille voimille \mathbf{F}_\perp . Vektorimuodossa

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{F}_\perp}{m} \quad (17.23)$$

Olettamalla, että \mathbf{F}_\perp aiheuttaa kulkeutumisen \mathbf{v}_D , tehdään muunnos $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}'_\perp + \mathbf{v}_D$:

$$\frac{d\mathbf{v}'_\perp}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}'_\perp \times \mathbf{B}) + \frac{q}{m}(\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{F}_\perp}{m} \quad (17.24)$$

GCS:ssä kahden viimeisen termin on kumottava toisensa, joten

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (17.25)$$

Tämä tempu edellyttää, että $F/qB \ll c$. Jos $F > qcB$, ei johtokeskus-approksimaatiota yksinkertaisesti voi tehdä.

Sijoittamalla ylläolevaan $\mathbf{F}_\perp = q\mathbf{E}$ saadaan tietenkin $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -kulkeutumisen. Gravitaatiokenttä puolestaan johtaa kulkeutumiseen

$$\mathbf{v}_g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{qB^2} \propto \frac{m}{q} \quad (17.26)$$

Gravitaatiokenttä separoi siis hiukkaset niiden m/q :n mukaan, muttei gravitaation suuntaan vaan kohtisuoraan sitä ja magneettikenttää vastaan!

17.4 Liikkeyhtälö kanonisessa formalismissa

Hiukkasliikkeen käsittely voidaan tehdä elegantisti käyttäen mekaniikan kursilta (toivottavasti) tuttua kanonista formalismia. Koska elektrodynamiikan

esitietoina ei oleteta mekaniikan kurssia, tämä luku jää yleissivistäväksi (tärkeäksi) tiedoksi.

Sijoitetaan sähkö- ja magneettikentät Lorentzin voiman lausekkeeseen skalaari- ja vektoripotentialien avulla:

$$\mathbf{F} = q(-\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \quad (17.27)$$

Muunnetaan tämä kanoniseen muotoon ilmaisemalla se riippumattomien muuttujien \mathbf{r} ja $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ avulla. Käytetään seuraavassa merkintöjä $\partial/\partial r_i = \partial_i = \nabla_i$ ja oletetaan summaus toistetun indeksin yli. Suorilla laskuilla nähdään

$$[\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \dot{r}_j \partial_i A_j - \dot{r}_j \partial_j A_i = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

Yhtälöiden $d\mathbf{A}/dt = \partial_t\mathbf{A} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ ja $\dot{r}_j \partial_i A_j = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$ avulla voiman lausekkeesta saadaan

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \nabla(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt}\mathbf{A} \right] \quad (17.28)$$

Koska φ ei riipu nopeudesta, voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}A_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(-\varphi + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right)$$

minkä avulla voiman i :s komponentti saadaan muotoon

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial r_i}(q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(-q\varphi + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right) \quad (17.29)$$

Lorentzin voima on nyt ilmaistu Lagrangen mekaniikassa *yleistetyn* potentiaalin

$$U = q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (17.30)$$

avulla

$$m\ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}_i} \quad (17.31)$$

Lagrangen funktion $L = m\dot{\mathbf{r}}^2/2 - U$ avulla liikeyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0 \quad (17.32)$$

Nämä **Lagrangen liikeyhtälöt** ovat toista kertalukua. Niistä voidaan muodostaa ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä siirtymällä **kanonisiin muuttujiin** r_i (kanoninen koordinaatti) ja $\pi_i = \partial L/\partial \dot{r}_i = m\dot{r}_i + qA_i$ (kanoninen liikemäärä). Muodostetaan näiden muuttujien **Hamiltonin funktio**

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{r}, t) &= \dot{r}_i \pi_i - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \dot{r}_i \pi_i - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\pi} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \end{aligned} \quad (17.33)$$

Kanoniset liikeyhtälöt ovat nyt

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \frac{1}{m}(\pi_i - qA_i) \quad (17.34)$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -q\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} + \frac{q}{m}\boldsymbol{\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} - \frac{q^2}{m}\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} \quad (17.35)$$

joista alkuperäisen liikeyhtälön johtaminen on suoraviivainen HT.

Kvanttimekaniikan Schrödingerin yhtälö voidaan ilmaista Hamiltonin funktion avulla yleistämällä se kvanttimekaaniseksi operaattoriksi. Kun elektrodynamikkaa viedään kvanttitasolle, se tehdään nimenomaan tässä formalismissa, missä olennaista on kappaleen mekaanisen liikemäärän $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ korvaaminen sen sähkömagneettisella liikemäärällä $m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$.

Luku 18

Lisäaineistoa

Tähän on kerätty joitain luennoilla esitettyjä asioita, jotka eivät ehtineet mukaan alkuperäiseen luentomonisteseen.

18.1 Laplacen yhtälön ratkaisu laatikossa

(Löytyy myös Jacksonin kirjasta.)

Perusesimerkki Laplacen yhtälön yhtälön ratkaisemisesta on laatikko, jossa yhtä sivua lukuunottamatta potentiaali reunoilla on nolla. Olkoon nyt laatikkona alue $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$ ja potentiaali nolla muilla reunoilla paitsi yläkannella ($z = c$), jossa se on tunnetuksi oletettu funktio $V(x, y)$. Tehtävänä on laskea potentiaali φ laatikon sisällä.

Laplacen yhtälölle karteesisissa koordinaateissa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (18.1)$$

etsitään ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (18.2)$$

Yleinen ratkaisu on tällaisten ratkaisujen summa. Valitsemalla sopivasti separointivakiot α, β, γ saadaan

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \\ Y(y) &= B_1 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \\ Z(z) &= C_1 \sinh(\gamma z) + C_2 \cosh(\gamma z) \end{aligned} \quad (18.3)$$

missä yleisesti kompleksiarvoiset vakiot A_i, B_i, C_i ja α, β, γ määräytyvät ongelman reunaehdoista ja $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

Tässä on tietoisesti valittu trigonometriset funktiot x - ja y -suunnissa ja hyperboliset funktiot z -suunnassa. Reunaehtoja soveltamalla nähdään heti, että voidaan valita $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, kun separointivakiot α ja β toteuttavat seuraavat ehdot (reunaehdoista sivuilla $x = a$ ja $y = b$):

$$\begin{aligned}\alpha &= m\pi/a \\ \beta &= n\pi/b\end{aligned}\tag{18.4}$$

missä m, n ovat kokonaislukuja, ja ne voidaan rajoittaa lisäksi positiivisiksi. Myös kolmas separointivakio saa silloin vain diskreettejä arvoja:

$$\gamma = \gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}\tag{18.5}$$

Tähän mennessä on siis saatu ratkaisuksi

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn}z)\tag{18.6}$$

On helppo tarkastaa, että tämä toteuttaa Laplacen yhtälön ja antaa potentiaaliksi nollan vaadituilla reunoilla. Tuntemattomat kertoimet A_{mn} saadaan asettamalla $z = c$:

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn}c)\tag{18.7}$$

Loppu onkin Fourier-kertoimien määrittämistä. Olettamalla, että funktio $V(x, y)$ on riittävän siisti, kertoimet saadaan laskettua ortogonaalisuusintegraalien avulla. Tämä lienee tuttua FYMM I:ltä.

Edellä ei mietitty sitä mahdollisuutta, että jokin tai jotkin separointivakioista olisivat voineet olla nollia. Huolellinen lukija tutkikoon erikseen tämän tilanteen. Lyhyemmin voidaan kuitenkin todeta, että löydetty ratkaisu on selvästi kelvollinen ja yksikäsitteisyyslauseen mukaan ongelma on sillä selvä.

18.2 Pistevaraus eristepinnan lähellä

(Löytyy myös Jacksonin kirjasta.)

Tarkastellaan tilannetta, jossa xy -taso jakaa avaruuden kahteen homogeeniseen eristealueeseen: ($z > 0, \epsilon_1$) ja ($z < 0, \epsilon_2$). Asetetaan varaus q pisteeseen $(0, 0, d)$ alueeseen 1. Tehtävänä on laskea potentiaali koko avaruudessa. Oletetaan, ettei aineiden rajapinnalla ole varauksia.

Tehtävän voisi ratkaista suoraan Poissonin yhtälöä käyttäen, mutta helpommalla päästään kuvälähdemenetelmän avulla. Otetaan mallia tilanteesta,

jossa varaus on maadoitetun johdetason yläpuolella. Silloin ongelma ratkeaa peilikuvavarauksella $-q$ pisteessä $(0, 0, -d)$. Eristeenkin tapauksessa potentiaali alueessa 1 voidaan yrittää esittää varauksen q ja jonkin *alueessa 2* sijaitsevan kuvavarauksen q' avulla. Yksinkertaisin arvaus on sijoittaa kuvavarauksen pisteeseen $z = -d$, jolloin potentiaali *alueessa 1* on sylinterikoordinaateissa lausuttuna Poissonin yhtälön toteuttava

$$\varphi_1(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) \quad (18.8)$$

(Kiertosymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, mutta tehtävä ratkeaa sujuvasti myös karteesisessa koordinaatistossa.)

Alue 2 on eriste, joten johdetilanteesta poiketen sielläkin on kenttä. Koska alueessa 2 ei ole varauksia, potentiaali toteuttaa siellä Laplacen yhtälön. Ainakin laskennallisesti kelvollinen ratkaisu alueessa 2 saadaan *alueessa 1* sijaitsevan kuvavarauksen q'' avulla, joka viisaasti sijoitetaan pisteeseen $z = d$. Tällöin potentiaali *alueessa 2* on

$$\varphi_2(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \quad (18.9)$$

Mikäli kuvavarausten suuruudet saadaan sovitettua siten, että reunaehdot toteutuvat, niin ongelma on ratkaistu. Reunaehtojen mukaan sähkövuon tiheyden z -komponentti on jatkuva rajapinnalla (ei pintavarausta) samoin kuin sähkökentän r -komponentti. Jälkimmäinen on yhtäpitävää sen kanssa, että potentiaali on jatkuva. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2}q'' \end{aligned} \quad (18.10)$$

Kuvavaraukset ovat siten

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \end{aligned} \quad (18.11)$$

Lukijalle jää harjoitustehtäväksi laskea polarisoitumaan liittyvä varaustiheys aineiden rajapinnalla. Jos väliaine 2 onkin johde, niin ratkaisu saadaan muodollisesti asettamalla ϵ_2 äärettömäksi, jolloin potentiaali alueessa 2 häviää ja $q' = -q$.

Viimeistään reunaehtoja sovellettaessa tuli selväksi, että kuvalähteet kannatti sijoittaa nimenomaan pisteisiin $z = -d$ ja $z = d$. Paikkariippuvuudet supistuvat silloin reunaehtoyhtälöistä kokonaan.

Lopuksi kannattaa muistuttaa, että kuvalähteet ovat vain kuvitteellisia apuvälineitä, jotka eivät oikeasti sijaitse missään. Kun ratkaisu on löydetty, kuvalähteet voidaan vaikka unohtaa ja todeta suoraan saaduista lausekkeista, että kaikki vaadittavat yhtälöt reunaehtoineen toteutuvat.

18.3 Vektoripotentialin multipolikehitelmä

Esitetään tässä vaihtoehtoinen menetelmä vektoripotentialin multipolikehitelmän laskemiseksi (Jackson). Luennoissa tutkitaan virtasilmuksia, mutta tässä oletetaan yleinen divergenssitön virrantiheys \mathbf{J} , joka poikkeaa nolasta vain äärellisessä tilavuudessa V .

Koska vektoripotentialin integraaliesitys on samaa muotoa kuin sähköisen skalaaripotentialin, voidaan suoraan kirjoittaa vektoripotentialin komponentille A_l

$$A_l(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int J_l(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' J_l(\mathbf{r}') dV' + \dots \right) \quad (18.12)$$

Integraalien laskemiseksi käytetään seuraavaa aputulosta:

$$\nabla \cdot (fg\mathbf{J}) = f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f \quad (18.13)$$

missä f ja g ovat vapaasti valittavia funktioita. Tässä myös käytettiin oletusta $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Integroimalla tilavuuden V yli saadaan

$$\int (f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f) = 0 \quad (18.14)$$

($\nabla \cdot (fg\mathbf{J})$:n sisältävä integraali voidaan ulottaa yli koko avaruuden, koska alueen V ulkopuolella virrantiheys on nolla. Muunnos pintaintegraaliksi antaa silloin nollan.)

Integroitaessa multipolikehitelmän ensimmäistä termiä valitaan yksinkertaisesti $f = 1$ ja $g = x_l$, jolloin $\int \mathbf{J} dV = 0$ eli monopolitermiä ei magneettikentän tapauksessa ole.

Seuraava eli dipolitermi käsitellään valitsemalla $f = x_l, g = x_n$, jolloin

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l dV' = x_n \int x'_n J_l dV' = -\frac{1}{2} x_n \int (x'_l J_n - x'_n J_l) dV' \quad (18.15)$$

missä summataan kahdesti esiintyvän indeksin n yli ja käytettiin kaavaa 18.14. Integrandi muistuttaa vektoritulon komponenttia, ja pienen tarkastelun jälkeen huomataan, että

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l dV' = -\frac{1}{2} \epsilon_{lnp} x_n \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))_p dV' \quad (18.16)$$

missä ϵ_{lmp} on permutaatio-symboli ja summaus on nyt myös yli indeksin p . Lauseke sieventyy muotoon

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l dV' = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV')_l = (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_l \quad (18.17)$$

missä \mathbf{m} on virtajärjestelmän magneettimomentti.

18.4 RLC-piiri

Kerrataan RLC-piirien perusasioita induktion ja sähkömagneettisen energian havainnollistamiseksi. Asia lienee sinänsä tuttua peruskurssilta. Tarkastellaan yksinkertaista virtapiiriä, jossa on sarjaan kytkettynä vastus (resistanssi R), käämi (induktanssi L) ja kondensaattori (kapasitanssi C) (kuva 18.1). Lisäksi piirissä on jännitelähde $V(t)$.

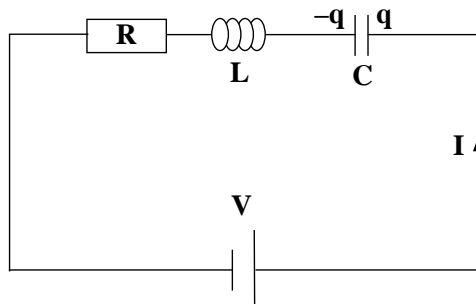
Valitaan kondensaattorin varauksen merkki ja virran positiivinen suunta kuvan mukaisesti, jolloin Kirchhoffin säännöstä saadaan

$$V - L \frac{d^2 I}{dt^2} = RI + q/C \quad (18.18)$$

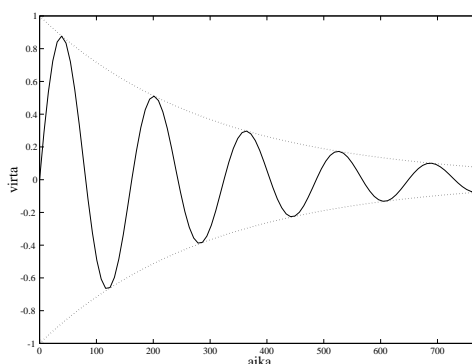
Derivoimalla ajan suhteen ja käyttämällä yhteyttä $dq/dt = I$ saadaan virralle toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{V}{L} \quad (18.19)$$

Tarkastellaan ensin ideaalista tapausta, jossa piirin resistanssi on häviävän pieni (LC-piiri). Oletetaan, ettei piirissä myöskään ole jännitelähdettä V . Kyseessä on siis varatun kondensaattorin purkamisen käämin kautta.



Kuva 18.1: Yksinkertainen RLC-piiri. Kondensaattorin sen levyn varaus on $+q$, johon positiivinen virta tuo varausta, jolloin $I = dq/dt$.



Kuva 18.2: Vaimeneva värähtely RLC-piirissä. Katkoviivoilla on piirretty vaimennusfunktion $\pm \exp(-Rt/2L)$ kuvaaja.

Tällöin yhtälö 18.1 on mekaniikasta tuttu harmonisen värähtelijän liikeyhtälö, ja värähtelyn kulmataajuus on $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Jos kondensaattorin varaus on aluksi Q , niin ajan funktiona se muuttuu sinimuotoisesti: $q(t) = Q \cos \omega t$ ja virta on $I(t) = -\omega Q \sin \omega t$. Systemin sähkömagneettinen energia on $U(t) = LI^2/2 + q^2/(2C) = Q^2/(2C)$ eli koko ajan sama kuin kondensaattorin sähköstaattinen energia aluksi. Kokonaisenergia siis säilyy, se vain jakautuu sähkö- ja magneettikentän energiaksi (säteilyhäviöitä ei tässä oteta huomioon).

Kondensaattorin varaus alkaa aluksi purkautua käämin kautta. Itseinduktion takia tämä ei tapahdu silmänräpäyksessä. Induktiovirta kulkee myös sen hetken jälkeen, jolloin kondensaattorin varaus on nolla. Virta kulkee niin kauan samaan suuntaan, että levyjen varaukset ovat alkutilaan nähden vastakkaismerkkiset. Sen jälkeen kondensaattorin varaus alkaa taas purkautua jne.

Todellisessa piirissä on aina jonkin verran resistanssia. Tilanteen laskennallinen tarkastelu on suoraviivaista differentiaaliyhtälöiden käsittelyä eikä sitä käydy tässä läpi. Mainitaan vain esimerkiksi tilanne, jossa piiriin kytketään tasajännite V hetkellä $t = 0$, ja kondensaattori on alkuhetkellä varaukseton. Piirin virta on silloin

$$I(t) = (V_0/\omega L)e^{-Rt/(2L)} \sin \omega t \quad (18.20)$$

missä $\omega = \sqrt{1/LC - (R/(2L))^2}$. Kulmataajuus ω voi tässä tapauksessa olla imaginaarinen, mutta joka tapauksessa piirin virta vaimenee eksponentiaalisesti. Kuvassa 18.2 on esitetty tilanne, jossa ω on reaalinen.

18.5 Lorentz-muunnos

(Lähde: K. ja R. Kurki-Suonio, Vuorovaikuttavat Kappaleet)

Liikkukoon koordinaatisto K' koordinaatiston K suhteen vakionopeudella \mathbf{v} . Havaittajat O ja O' havaitsevat saman tapahtuman ja määrittävät sen paikan ja hetken: (x, y, z, t) ja (x', y', z', t') . Lisäksi oletetaan, että heillä yhteinen fysikaalisiin ilmiöihin perustuva standardi, jonka perusteella he käyttävät samoja mittayksiköitä.

Etsitään havaintojen välinen yhteys käyttäen neljää yleistä ehtoa.

Ehto 1. Aika ja avaruus ovat homogeenisia. Kahden infinitesimaalisen lähekkäisen tapahtuman siirtymien ja aikavälien välinen muunnos $(d\mathbf{r}, dt) \leftrightarrow (d\mathbf{r}', dt')$ on silloin sama aina ja kaikkialla eli niiden välillä on lineaarinen yhteys. Tästä seuraa, että myös koordinaattien välinen yhteys on lineaarinen:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1 \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t + e_2 \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t + e_3 \\t' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t + e_4\end{aligned}$$

missä kertoimet a_i, b_i, c_i, d_i ovat vakioita.

Yleisyyttä rajoittamatta voidaan sopia, että koordinaatistojen origot yhtyvät kummankin nolлахetkellä. Voidaan myös sopia, että koordinaattiakselit ovat samansuuntaisia ja että K' liikkuu K :n x -akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Tällöin yhtälöryhmä yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned}x' &= ax + bt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= hx + kt\end{aligned}$$

Ehto 2. Koordinaatistojen suhteellinen nopeus on kummankin havaittajan mielestä sama. Tällöin K' :n origossa hetkellä t' sattuva tapahtuma havaitaan K :ssa hetkellä t pisteessä $x = vt$ tapahtuvaksi: $(vt, t) \leftrightarrow (0, t')$. Vaaditun symmetrian mukaan pätee vastaavasti $(0, t) \leftrightarrow (-vt', t')$. Sijoittamalla muunnoskaavoihin saadaan

$$\begin{aligned}0 &= avt + bt \\t' &= hvt + kt \\-vt' &= bt \\t' &= kt\end{aligned}$$

Muunnos siis pelkistyy muotoon

$$\begin{aligned}x' &= k(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= k(t - \alpha x)\end{aligned}$$

missä $\alpha = h/k$.

Ehto 3. Valon nopeus c on absoluuttinen. Tämä on ratkaiseva ero klassiseen Galilei-muunnokseen verrattuna. Ajatellaan, että yhteisellä nolлахetkellä yhteisessä origossa tapahtuu valonvälähdys. Valon saapuminen mielivaltaisessa pisteessä olevaan ilmaisimeen havaitaan hetkillä t ja t' . Tapahtumien vastaavuus on $(x = ct, t) \leftrightarrow (x' = ct', t')$, koska c on sama kummankin havaitsijan mielestä. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}ct' &= k(ct - vt) \\t' &= k(t - \alpha ct)\end{aligned}$$

ja voidaan ratkaista $\alpha = v/c^2$.

Ehto 4. Käänteismuunnos saadaan symmetrisesti vaihtamalla nopeuden etumerkki eli molempien inertiaalikoordinaatistojen on oltava samassa asemassa (vrt. ehto 2). Tällöin

$$\begin{aligned}x &= k(x' + vt') \\t &= k(t' + vx'/c^2)\end{aligned}$$

Näin voidaan ratkaista $k = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Lorentz-muunnoskaavat ovat siis

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\end{aligned}$$

ja kääntäen

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\end{aligned}$$

Sisältö

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Johdanto | 3 |
| 1.1 | Mikä tämä kurssi on | 3 |
| 1.2 | Hieman taustaa | 4 |
| 1.3 | Elektrodynamiikan perusrakenne | 6 |
| 1.4 | Kirjallisuutta | 8 |
| 2 | Staattinen sähkökenttä | 9 |
| 2.1 | Sähkövaraus ja Coulombin laki | 9 |
| 2.2 | Sähkökenttä | 11 |
| 2.3 | Sähköstaattinen potentiaali | 12 |
| 2.4 | Gaussin laki | 13 |
| 2.4.1 | Maxwellin ensimmäinen yhtälö | 13 |
| 2.4.2 | Gaussin lain soveltamisesta | 14 |
| 2.5 | Sähköinen dipoli | 17 |
| 2.6 | Sähkökentän multipolikehitelmä | 19 |
| 2.7 | Pistevarauksen jakautuma | 20 |
| 2.8 | Poissonin ja Laplacen yhtälöt | 20 |
| 2.9 | Laplacen yhtälön ratkaiseminen | 22 |
| 2.9.1 | Muuttujien erottelu | 23 |
| 2.9.2 | Ratkaisu pallokoordinaateissa | 26 |
| 2.9.3 | Ratkaisu sylinterikoordinaateissa | 28 |
| 2.10 | Peilivarausmenetelmä | 29 |
| 2.11 | Poissonin yhtälön ratkaisemisesta | 31 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Sähkökenttä väliaineessa | 35 |
| 3.1 | Sähköinen polarisoituma | 35 |
| 3.2 | Polarisoituman aiheuttaman sähkökentän määrittäminen | 36 |
| 3.3 | Sähkövuon tiheys | 38 |
| 3.4 | Dielektrisyys ja susceptiivisuus | 39 |
| 3.5 | Sähkökenttä rajapinnalla | 40 |
| 4 | Sähköstaattinen energia | 47 |
| 4.1 | Varausjoukon potentiaalienergia | 47 |
| 4.2 | Varausjakautuman sähköstaattinen energia | 48 |
| 4.3 | Sähköstaattisen kentän energia | 49 |
| 4.4 | Sähkökentän voimavaikutukset | 51 |
| 5 | Staattinen magneettikenttä | 55 |
| 5.1 | Sähkövirta | 55 |
| 5.1.1 | Jatkuvuusyhtälö | 56 |
| 5.1.2 | Ohmin laki | 56 |
| 5.1.3 | Stationaariset virtaukset | 58 |
| 5.2 | Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki | 60 |
| 5.3 | Ampèren laki | 63 |
| 5.4 | Lorentzin voima | 64 |
| 5.5 | Virtasilmukan magneettimomentti | 65 |
| 5.6 | Magneettikentän potentiaaliesitys | 67 |
| 5.6.1 | Vektoripotentiali | 67 |
| 5.6.2 | Magneettikenttä kaukana virtasilmukasta | 68 |
| 5.6.3 | Magneettikentän skalaaripotentiali | 69 |
| 5.7 | Magneettivuo | 71 |
| 6 | Magneettikenttä väliaineessa | 73 |
| 6.1 | Magnetoituma | 73 |
| 6.2 | Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä | 75 |

| | |
|----------------|---|
| <i>SISÄLTÖ</i> | 219 |
| 6.3 | Magneettikentän voimakkuus 76 |
| 6.4 | Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti 77 |
| 6.5 | Magneettikenttävektoreiden reunaehdot rajapinnalla 78 |
| 6.6 | Reuna-arvo-ongelmia magneettikentässä 79 |
| 7 | Sähkömagneettinen induktio 83 |
| 7.1 | Faradayn laki 83 |
| 7.2 | Itseinduktanssi 86 |
| 7.3 | Keskinäisinduktanssi 88 |
| 7.4 | Pähkinä purtavaksi 90 |
| 8 | Magneettinen energia 91 |
| 8.1 | Kytettyjen virtapiirien energia 91 |
| 8.2 | Magneettikentän energiatiheys 92 |
| 8.3 | Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin 95 |
| 9 | Maxwellin yhtälöt 99 |
| 9.1 | Siirrosvirta 99 |
| 9.2 | Maxwellin yhtälöt 101 |
| 9.3 | Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä 102 |
| 9.3.1 | Poyntingin teoreema 102 |
| 9.3.2 | Maxwellin jännitystensori 104 |
| 9.3.3 | Liikemäärän säilyminen 106 |
| 9.4 | Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla 107 |
| 9.5 | Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet 110 |
| 9.5.1 | Aaltoyhtälö tyhjössä 110 |
| 9.5.2 | Potentiaaliesitys 110 |
| 9.5.3 | Viivästyneet potentiaalit 111 |
| 9.5.4 | Aaltoyhtälön Greenin funktio 113 |
| 9.6 | Mittainvarianssi 115 |

| | |
|---|------------|
| 10 Sähköiset ja magneettiset materiaalit | 119 |
| 10.1 Molekulaarinen polarisoituvuus | 120 |
| 10.2 Ionikiteen sähköstaattinen energia | 122 |
| 10.3 Sähkönjohtavuus mikroskooppisesti | 123 |
| 10.4 Molekulaarinen magneettikenttä | 125 |
| 10.5 Para- ja diamagnetismista | 125 |
| 10.6 Ferromagnetismi | 128 |
| 10.7 Epälineaariset energiahäviöt | 129 |
| 11 Sähkömagneettiset aallot | 133 |
| 11.1 Tasoaallot eristeessä | 133 |
| 11.2 Aaltojen polarisaatio | 137 |
| 11.3 Sähkömagneettisen aallon energia | 138 |
| 11.4 Tasoaallot johteessa | 140 |
| 11.5 Palloaallot | 142 |
| 12 Aaltojen heijastuminen ja taittuminen | 147 |
| 12.1 Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle | 147 |
| 12.2 Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa | 149 |
| 12.3 Druden ja Lorentzin oskillaattorimalli | 154 |
| 13 Aaltoputket ja resonanssikaviteetit | 159 |
| 13.1 Sylinteriputki | 159 |
| 13.2 Suorakulmainen aaltoputki | 162 |
| 13.3 Resonanssikaviteetit | 164 |
| 14 Liikkuvan varauksen kenttä | 167 |
| 14.1 Liénardin ja Wiechertin potentiaalit | 167 |
| 14.2 Kenttien laskeminen | 168 |
| 14.2.1 Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä | 171 |
| 14.2.2 Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä | 173 |

| | |
|--|------------|
| <i>SISÄLTÖ</i> | 221 |
| 15 Säteilevät systeemit | 175 |
| 15.1 Värähtelevän dipolin kenttä | 175 |
| 15.2 Puoliaaltoantenni | 178 |
| 15.3 Liikkuvan varausjoukon aiheuttama kenttä | 180 |
| 15.4 Aallon vaimeneminen ja Thomsonin sironta | 182 |
| 16 Elektrodynamiikka ja suhteellisuusteoria | 185 |
| 16.1 Lorentzin muunnos | 185 |
| 16.2 Tensoriformalismia | 188 |
| 16.3 Lorentzin muunnokset ja dynamiikka | 190 |
| 16.4 Elektrodynamiikan kovariantti formulointi | 194 |
| 16.5 Kenttien muunnokset | 196 |
| 16.6 Potentiaalien muunnokset | 198 |
| 16.7 Säilymislait | 199 |
| 17 Varatun hiukkasen liike SM-kentässä | 201 |
| 17.1 Säteilyhäviöiden vaikutus | 201 |
| 17.2 Homogeeninen ja staattinen B | 202 |
| 17.3 Homogeeniset ja staattiset B ja E | 204 |
| 17.4 Liikkeyhtälö kanonisessa formalismissa | 205 |
| 18 Lisäaineistoa | 209 |
| 18.1 Laplacen yhtälön ratkaisu laatikossa | 209 |
| 18.2 Pistevaraus eristepinnan lähellä | 210 |
| 18.3 Vektoripotentiaalin multipolikehitelmä | 212 |
| 18.4 RLC-piiri | 213 |
| 18.5 Lorentz-muunnos | 214 |