

# Luku 1

## Johdanto

*It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.*

R. P. Feynman

### 1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on kuuden opintoviikon paketti elektrodynamiikkaa, joka voidaan sisällyttää joko fysiikan laudatur-oppimäärään tai teoreettisen fysiikan cum laude-oppimäärään. Muutaman viime vuoden ajan nämä aikanaan erilliset kurssit on luennoitu yhdessä. Kahden lähestymistavoiltaan erilaisen kurssin yhdistäminen ei ole ollut aivan triviaali asia osin erilaisen oppimateriaalin, mutta myös opiskelijoiden erilaisen taustan ja mielenkiinnon kohteiden vuoksi.

Kurssin tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaantulevissa tilanteissa olivatpa nämä tilanteet sitten teoreettisia tai käytännönläheisiä. Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtämisen voi edellyttää kuuluvan jokaisen fyysikon yleisivistykseen. Se on opiskelijalle ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä ratkaiseva osa. Toisaalta sähkö ja magnetismi ovat aivan keskeisessä osassa niin kaikkialla fysiikassa kuin nykyisessä arkipäivässäkin. Oikeastaan tämän parempaa motivaatiota elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Kevään 2002 kurssi seuraa pääosin Reitzin, Milfordin ja Christyn oppikirjaa *Foundations of Electromagnetic Theory* (4 ed., tästä eteenpäin viite RMC). Luennoilla materiaali käsitellään kuitenkin hieman eri järjestyksessä, sillä tavoitteena on saada koko klassisen elektrodynamiikan rakenne aaltoyhtälön Lorentzin mitassa esitettyä ratkaisua myöten valmiiksi ensimmäisen

puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää asioita, jotka menevät syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön. Joitain asioita käsitellään myös hieman syvällisemmin kuin RMC:ssä on tehty ja siltä osin oppikirjaksi suositellaan uusinta painosta Cronströmin ja Lippaan oppikirjasta *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan* (Limes 2000, tästä eteenpäin viite CL).

Kurssin **lähtötasoksi sähköopin osalta oletetaan fysiikan peruskurssien hallinta**. Viitemateriaalina ovat Kaarle ja Riitta Kurki-Suonion oppikirjat *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet* (viitataan lyhenteellä KSII) ja *Aaltoliikkeestä dualismiin* (viitataan lyhenteellä KSIII) (Limes ry., useita painoksia). Joillakin opiskelijoilla saattaa olla taustalla peruskurssin sijasta fysiikan approbatur, mikä tietenkin hyvin opiskeltuna riittää sekín.

Yksi elektrodynamiikan opiskelun vaikeuksista on varsin vaativien matemaattisten apuneuvojen tarve. Tällä kurssilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MAPU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Myös FYMM II olisi hyödyllinen, mutta koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat ottavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä, tätä ei varsinaisesti edellytetä. **FYMM II:n opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on kuitenkin erittäin suositeltavaa**. Tärkeimpiä matemaattisia apuneuvoja kerrataan kurssin laskuharjoituksissa. Laskuharjoitustehtävien omakohtainen suorittaminen on olennainen osa kurssin sisältämän materiaalin oppimista!

## 1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti formaalisesti nykyasunsa vuonna 1864, kun *James Clerk Maxwell* julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan ”*Treatise on Electricity and Magnetism*”. Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen teoreettinen rakennelmansa perustui tietenkin aiempien fyysikoiden töille, joista mainittakoon tässä 1700-luvulta vaikkapa *Cavendish*, *Coulomb*, *Franklin*, *Galvani*, *Gauss* ja *Volta* sekä aiemmalta 1800-luvulta *Ampère*, *Arago*, *Biot*, *Faraday*, *Henry*, *Savart* ja *Ørsted*.

Yksi tärkeimmistä Maxwellin teorian ennustuksista oli valon nopeudella etenevän sähkömagneettisen aallon olemassaolo, jonka *Heinrich Hertz* onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suurista murroskausista. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksiin kuuluivat esim. liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri tällaisia ongelmia selittämään

*Albert Einstein* kehitti suppeamman suhteellisuusteoriansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian alkeet voikin olla havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria ja Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korjettiksi formuloiduksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi myös kvanttifysiikan kehitys. Se aiheutti paljon enemmän elektrodynamiikkaan liittyviä ongelmia, sillä ensinnäkään ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi riittävän yleinen myös mikromaailmaan vietyä. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset formuloinnit, kuten Schrödingerin yhtälö, ovat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennenkuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan **kvanttielektrodynamiikaksi** (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat *Julian Schwinger*, *Richard Feynman*, *Sin-itiro Tomonaga* ja *Freeman Dyson*. Tänä päivänä elektrodynamiikka QED:n klassisena rajana on osa menestyksestä **standardimallia**, jonka uskotaan olevan oikea tapa yhdistää sähköinen, heikko ja vahva perusvoima keskenään. Niinpä klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on perusta paljon pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle!

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka onkin tullut osaksi kvanttimaailman ihmeellisyyttä, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä aina ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Elektrodynamiikka on keskeistä materiaalfysiikassa, hiukkassuihkujen fysiikassa, röntgenfysiikassa, elektroniikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Niinpä klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta myös menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Seuraavat tehtävät voidaan määrittellä elektrodynamiikan perusprobleemiksi:

1. Varausten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän määrittäminen.
2. Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.
3. Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.
4. Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.
5. Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

### 1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useimmat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päätyen elektrodynamiikan peruspilareihin **Maxwellin yhtälöihin** ikäänkuin olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei tietenkään ole aivan totta enää tämän kurssin tapauksessa, vaan käytännössä kaikki ovat jo tutustuneet ainakin päällisin puolin Maxwellin yhtälöihin ja tietävät yhtä ja toista elektrodynamiikan rakenteesta. Niinpä voimme jo aivan näin kurssin aluksi hieman pohtia, mistä elektrodynamiikassa on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt nk. tyhjömuodossaan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Tässä muodossaan sähkökentän  $\mathbf{E}$  ja magneettikentän (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden)  $\mathbf{B}$  lähteinä ovat sähkövaraukset  $\rho$  ja sähkövirrat  $\mathbf{J}$ . Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein kenttien  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$  ja  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  avulla, mutta palaamme tähän myöhemmin.

Yllä  $\epsilon_0$  on tyhjän sähköinen permittiivisyys ja  $\mu_0$  on tyhjän magneettinen permeabiliteetti. Näiden ja valon nopeuden  $c$  välillä on relaatio  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ . Koska valon nopeus tyhjiössä on vakio, sille annetaan nykyään **tarkka** arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Koska sekunti määritellään tietyn Ce-133 siirtymäviivan avulla, tulee metristä johdannaissuure, joka on aika tarkkaan samanmittainen kuin Pariisissa säilytettävä platinatanko. Myös  $\mu_0$  määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

joten tyhjän permittiivisyydelle jää myös tarkka arvo  $\epsilon_0 = (c^2 \mu_0)^{-1}$ , jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Voimaa kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. Se

on nopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvaan varaukseen  $q$  vaikuttava voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

Tämä on suureen määrään kokeita perustuva **empiirinen laki**, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä fundamentaalisemmasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan ”nähdä”, ne ovat fysikaalisia olioita: Niillä on energiaa, liikemäärää ja impulssimomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjiössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mentäessä mikroskooppiseen kuvailuun QED:n tasolle, sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Se, että tähän ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratoriokokeissa, käy ilmi seuraavista esimerkeistä:

**Esim. 1.** Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on  $\langle \mathbf{E} \rangle_{rms} \approx 50$  V/m. Tämä merkitsee  $10^{15}$  näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.

**Esim. 2.** Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Tällaisen fotonin liikemäärä on  $2.2 \cdot 10^{-34}$  Ns. Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.

**Esim. 3.** Varausten diskreettisuutta ei myöskään tarvitse yleensä huomioida. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan  $10^{15}$  alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljettamiseen tarvitaan  $6.2 \cdot 10^{12}$  varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin tehdä johtopäätös, että riippuvuus on ainakin lähes tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa  $1/r^{2+\varepsilon}$ , voidaan mittauksilla etsiä rajoja  $\varepsilon$ :lle. *Cavendish* päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen  $|\varepsilon| \leq 0.02$ . Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden  $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$  ja nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen  $|\varepsilon| \leq (2.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-16}$ .

Teoreettisin perustein voi argumentoida, että  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus on ekvivalenttia fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin *Cavendishin* menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa  $1.6 \cdot 10^{-50}$  kg. Geomagnetisilla mittauksilla fotonin massan yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi:  $m_\gamma < 4 \cdot 10^{-51}$  kg. Voimme siis todeta, että niin fotonin massattomuus kuin sähköisen voiman  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus ovat erittäin hyvin todennettuja **kokeellisia** tosiasioita. Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin kävi selväksi, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

## 1.4 Kirjallisuutta

- Reitz, J. R., F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundation of Electromagnetic Theory*, 4th edition, Addison-Wesley, 1993.  
Kurssin varsinainen oppikirja. Materiaali käsitellään kurssilla hieman eri järjestyksessä.
- Cronström, C., ja P. Lipas, *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan*, Limes ry., 2000.  
Uudistettu laitos TFO:n monivuotisesta luentomonisteesta. Kurssin toinen oppikirja.
- Jackson, J. D., *Classical electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.  
Klassisen elektrodynamiikan piipia. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.
- Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.  
Suositettu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.
- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, vol. II, Addison-Wesley, 1964.  
Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa sisältäen erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua.