

Luku 2

Staattinen sähkökenttä

Tässä luvussa tutustutaan sähkövarausten aiheuttamaan staattiseen sähkökenttään (RMC luvut 2 ja 3; CL luvut 2 ja 3). Materiaali on periaatteessa tuttua fysiikan peruskurssilta (KSII, luku 2).

2.1 Sähkövaraus ja Coulombin laki

Maailmankaikkeudessa on tietty määrä positiivisia ja negatiivisia sähkövarauksia. Nykytietämyksen mukaan niitä ei voida hävittää eikä luoda. Näinollen minkään suljetun systeemin varausten määrä ei voi muuttua. Käytännössä useimmat systeemit ovat neutraaleja, eli niissä on yhtä paljon positiivisia ja negatiivisia varauksia. Makroskooppisen kokonaisuuden varauksella tarkoitetaan yleensä sen nettovarausta, joka on siis poikkeama varausneutraalisuudesta. Myös tämä nettovaraus säilyy, ellei systeemi ole vuorovaiikutuksessa ympäristönsä kanssa.

1700-luvun lopulla oli opittu, että varauksia on vain kahta lajia, joita nykyisin kutsutaan positiivisiksi ja negatiivisiksi. *Charles Augustin de Coulomb* muotoili kokeisiinsa perustuen seuraavanlaisen lain

- Kaksi pistevarausta vaikuttavat toisiinsa voimilla, joiden suunta on niitä yhdistävän suoran suuntainen ja kääntäen verrannollinen varausten välisen etäisyyden neliöön.
- Voimat ovat verrannollisia varausten tuloon siten, että samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa.

Tätä kutsutaan **Coulombin laiksi**, joka nykyaikaisen formalismin avulla kertoo, että varaus q_2 vaikuttaa varaukseen q_1 **sähköstaattisella** voimalla

$$\mathbf{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (2.1)$$

missä $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ on varauksesta q_2 varaukseen q_1 osoittava vektori. Sähköstaattinen vuorovaikutus noudattaa voiman ja vastavoiman lakia. Jos varaukset q_1 ja q_2 liikkuvat, tilanne muuttuu, mutta siihen palataan myöhemmin.

Lisäksi kannattaa huomata, että Coulombin laki edellyttää vuorovaikutuksen välittymistä äärettömän nopeasti koko avaruuteen. Tämä on tietysti approksimaatio, koska mikään tieto ei leviä suuremmalla kuin valon nopeudella. Toisaalta valon nopeuden suuren arvon vuoksi staattisuus on aivan kelvollinen oletus monissa käytännön tilanteissa.

Verrannollisuuskerroin k riippuu käytetystä yksikköjärjestelmästä. Sähköopissa käytetään yhä usein cgs-yksiköitä (Gaussin yksiköitä), joissa $k = 1$. Tällöin varauksen yksikkö määritellään siten, että se aiheuttaa 1 cm etäisyydellä 1 dynen voiman ($1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$) toiseen yksikkövaraukseen. Me käytämme ”virallisempia” SI-yksiköitä eli MKSA-järjestelmää, joissa

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.2)$$

missä $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ on **tyhjän permittiivisyys**. Täten kertoimen numeroarvo on $k \approx 8.9874 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ (muistisääntö: $9 \cdot 10^9$ SI-yksikköä). Näissä yksiköissä sähkövirta on perussuure. Palaamme siihen tuonnempana, mutta todettakoon tässä, että virran SI-yksikkö on ampeeri (A) ja varauksen yksikkö coulombi ($\text{C} = \text{As}$). ϵ_0 :n yksikkö on faradi/metri ($\text{F/m} = \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-1}$).

Toistettakoon, että Coulombin laki perustuu kokeellisiin havaintoihin ja voisi siten olla esimerkiksi r^{-2} -riippuvuuden osalta vain likimääräinen tulos. Modernin fysiikan teoreettiset perusteet samoin kuin erittäin tarkat mittaukset viittaavat siihen, että r^{-2} riippuvuus todella on täsmällinen luonnonlaki. Myös painovoima riippuu etäisyydestä kuten r^{-2} , mutta on olemassa vain yhdenmerkkistä gravitaatiota. Lisäksi painovoima on paljon sähköstaattista voimaa heikompi (HT: vertaa kahden elektronin välistä sähköstaattista ja gravitaatiovuorovaikutusta.).

Jos varauksia on useita, varaukseen q_i vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (2.3)$$

mikä ilmaisee voimien kokeellisesti oikeaksi todetun superpositioperiaatteen.

Tarkastellaan sitten varausta itseään. Kokeellisesti on opittu, että mitattavissa oleva varaus on kvantittunut yhden elektronin varauksen suuruisiin kvantteihin. Makroskooppisessa mielessä tämä alkeisvaraus on erittäin pieni ($e \approx 1.6019 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Tiedämme nykyisin, että kvarkeilla on $\pm 1/3$ ja $\pm 2/3$

e :n suuruisia varauksia, mutta ne näyttävät olevan aina sidottuja toisiinsa siten, että kaikkien alkeishiukkasten varaukset ovat $\pm e$:n monikertoja ja elektronin varaus on siten pienin luonnossa vapaana oleva varaus.

Yksikkövarauksen pienuudesta johtuen makroskooppinen **varausjakautuma** muodostuu yleensä suuresta joukosta alkeisvarauksia ja varaustiheyden käsite on hyödyllinen. Kolmiulotteisen avaruuden **varaustiheys** määritellään

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (2.4)$$

ja **pintavaraustiheys** vastaavasti

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (2.5)$$

missä V on tarkasteltava tiheys ja S tarkasteltava pinta.

Olkoon tilavuudessa V varausjakautuma ρ ja V :tä rajoittavalla pinnalla S pintavarausjakautuma σ . Tällöin pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukseen q vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS' \quad (2.6)$$

2.2 Sähkökenttä

Sähköstaattinen vuorovaikutus ajatellaan kaksivaiheiseksi: Staattinen systeemi aiheuttaa kentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, joka vaikuttaa pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukselliseen hiukkaseen (varaus q) voimalla

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

joka voidaan mitata. Sähköstatiikalle tyypillinen kokeellinen ongelma on se, että kenttään tuodaan tällöin ”ylimääräinen” varattu kappale. Se voi vaikuttaa huomattavasti siihen varausjakaumaan, joka aiheuttaa kentän: kappaleet polarisoituvat. Tämän vuoksi useat oppikirjat puhuvat ”pienistä testivarausista”, jotka eivät vaikuta kentän aiheuttajaan. Sähkökentän voimakkuuden määritelmä ei kuitenkaan välttämättä edellytä testivarausten käsitettä. (HT: Kuinka painovoima eroaa tässä suhteessa sähköstaattisesta voimasta?)

Yksittäisten varausten ja varausjakautumien yhteenlaskettu sähkökenttä on tietenkin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS' \end{aligned} \quad (2.8)$$

Periaatteessa sähkökenttä voidaan siis määrittää laskemalla kaikkien varausjakautumien ja yksittäisten hiukkasten aiheuttamat kentät. Käytännössä tämä on usein täysin ylivoimainen tehtävä. Myöskään mielikuvan luominen sähkökentästä ei ole aivan triviaali asia. Michael Faraday otti käyttöön **kenttäviivan käsitteen**. Vektorikentän kenttäviiva on matemaattinen käyrä, joka on jokaisessa pisteessä kyseisen vektorin suuntainen. Se on oikein käytettynä hyödyllinen apuväline, mutta se on turvallisinta ymmärtää vain keinoksi visualisoida sähkökenttää, joka on varsinainen fysikaalinen suure.

2.3 Sähköstaattinen potentiaali

Vektorianalyysin alkeistiedoilla osaamme todistaa, että

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (2.9)$$

eli staattisen sähkökentän roottori häviää:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.10)$$

ja sähkökenttä voidaan esittää **sähköstaattisen potentiaal**in φ avulla

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Pisteessä \mathbf{r}_1 sijaitsevan hiukkasen aiheuttama potentiaali on siten

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (2.12)$$

kun sovitaan, että äärettömydessä potentiaali häviää. Vastaavasti mielivaltaiselle varausjoukolla

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \end{aligned} \quad (2.13)$$

jotka molemmat voi näyttää toteen laskemalla potentiaalin gradientin.

Sähköstaattinen kenttä on esimerkki **konservatiivisesta** voimakentästä. Se merkitsee sitä, että **potentiaalienergia** U eli voiman \mathbf{F} viivaintegraali annetusta referenssipisteestä ref tarkastelupisteeseen \mathbf{r}

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{ref}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.14)$$

on riippumaton integrointitiestä. Koska itse fysikaalinen suure sähkökenttä riippuu vain potentiaalin derivaatasta, potentiaalin nollakohdan voi valita mieleisekseen. Asettamalla $\varphi(ref) = 0$ saadaan $U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r})$.

Potentiaalin käsitteestä on suurta hyötyä erilaisissa sähkökenttään liittyvissä ongelmissa. Tämä johtuu osaksi siitä, että sähkökentän integroiminen varausjakautumista on olennaisesti monimutkaisempi tehtävä kuin yksinkertaisemman potentiaalin laskeminen. Potentiaali on toki vielä derivoitava, mutta se on aina helpompaa kuin integrointi. Käytännöllisempi syy potentiaalien käyttökelpoisuudelle on kuitenkin se, että matematiikan potentiaaliteoria tarjoaa koko joukon hyödyllisiä matemaattisia apuneuvoja.

SI-järjestelmässä voiman yksikkö on newton (N) ja varauksen yksikkö on coulombi (C), joten sähkökentän yksikkö on N/C. Energian yksikkö on puolestaan joule (J = Nm) eli sähköstaattisen potentiaalin yksikkö on siten J/C. Sähköopissa potentiaalin yksikköä kutsutaan voltiksi (siis $V = J/C$) ja sähkökentän yksikkö ilmaistaan yleensä muodossa V/m.

2.4 Gaussin laki

2.4.1 Maxwellin ensimmäinen yhtälö

Tarkastellaan origossa olevan pistevarauksen q kenttää

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.15)$$

Olkoon V jokin tilavuus varauksen ympärillä ja S sen reuna ∂V . Integroidaan sähkökentän normaalikomponentti tämän reunan yli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS \quad (2.16)$$

Nyt $(\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{n} dS$ on dS :n projektiio \mathbf{r} :ää vastaan kohtisuoralle tasolle ja tämä pinta-ala jaettuna r^2 :lla on avaruuskulma-alkio $d\Omega$, joka pallokoordinaatistossa on $\sin\theta d\theta d\phi$. Valitaan sitten V :n sisäpuolelta origokeskinen pallonmuotoinen alue, jonka reuna on S' . Nyt infinitesimaalinen pinta-alkio dS' kattaa yhtä suuren avaruuskulman $d\Omega$ kuin elementti dS , joten

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} dS' = \oint_{S'} d\Omega = 4\pi \quad (2.17)$$

mistä seuraa

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

Jos varaus on tilavuuden V ulkopuolella, se ei vaikuta pintaintegraaliin. Tämän näkee tarkastelemalla varauksen kohdalta kohti tilavuutta V avautuvaa avaruuskulmaelementin $d\Omega$ suuruista kartiota. Tämä kartio läpäisee

tilavuuden V sekä sisään että ulospäin ja näinollen pinta-alkioiden integraalit summautuvat nolnaan. (Piirrä kuva!)

Tulos yleistyy N :n varauksen parvelle

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (2.19)$$

Jos suurta varausjoukkoa tarkastellaan varausjakautumana, voidaan ρdV ajatella alkioksi, joka tuottaa pintaintegraandiin osuuden $\rho dV/\epsilon_0$ eli integroituna tilavuuden V yli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.20)$$

mikä on peruskurssilta tuttu **Gaussin laki** integraalimuodossa.

Vektorianalyysistä tunnemme **divergenssiteoreeman** eli **Gaussin lauseen** riittävän siistille vektorikentälle \mathbf{u}

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.21)$$

missä \mathbf{n} on tilavuutta V ympäröivän pinnan S ulkonormaalivektori. Sovelletaan tätä Gaussin lain vasemmalle puolelle, jolloin

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.22)$$

Tämän lauseen täytyy olla riippumaton tilavuuden V valinnasta, eli

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.23)$$

ja olemme saaneet Gaussin lain differentiaalimuodossa. Kutsumme tätä Maxwellin ensimmäiseksi yhtälöksi (laiksi).

2.4.2 Gaussin lain soveltamisesta

Pallosymmetrisen varausjakautuma

Pallosymmetrisessä tapauksessa varaustiheys on muotoa $\rho = \rho(r)$, jolloin sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan etäisyydestä origosta: $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, mikä on helppo päätellä suoraan Coulombin laista. Tarkastellaan integraalimuotoista Gaussin lakia pallokoordinaateissa. Ensinnäkin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(r)\mathbf{e}_r \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r) = 4\pi r^2 E(r) \quad (2.24)$$

Toisaalta Gaussin laki antaa

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') (r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi) = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.25)$$

joten saamme pallosymmetriselle varausjakautuman sähkökentäksi

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.26)$$

Sovelletaan tätä sitten tasaisesti varatulle R -säteiselle pallolle, jonka sisällä varaustiheys on ρ_0 ja ulkopuolella nolla. Pallon kokonaisvaraus on

$$Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \quad (2.27)$$

Yksinkertainen integrointi antaa sähkökentäksi

$$\begin{aligned} r \leq R & \quad E(r) = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ r > R & \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Varausjakautuman ulkopuolella sähkökenttä on siis sama kuin origossa olevan pistevarauksen Q kenttä.

Viivavaraus

Esimerkkinä sylinterisymmetrisestä tapauksesta tarkastellaan pitkää tasaisesti varattua ohutta lankaa, jonka varaustiheys pituusyksikköä kohti on λ . Symmetrian perusteella on selvää, että sähkökenttä on radiaalinen (joko kohti lankaa tai siitä poispäin). Tarkastellaan langan ympärillä olevaa r -säteisestä sylinteriä, jonka pituus on l . Integroitaessa sähkökentän normaalkomponenttia sylinterin pinnan yli, sylinterin päät eivät tuota mitään. Vaipan pinta-ala on $2\pi r l$ ja sylinterin sisällä oleva varaus λl , joten Gaussin laki antaa

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

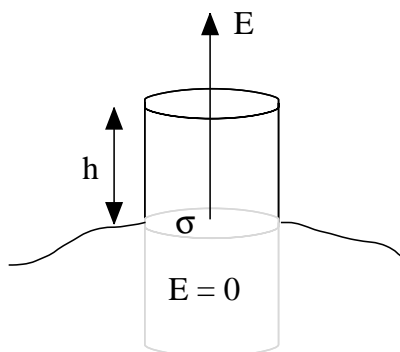
\Rightarrow

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2.30)$$

eli viivavarauksen kenttä pienenee kuten r^{-1} . Kentän potentiaali on

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r/r_0) \quad (2.31)$$

Tässä tapauksessa ei voida sopia potentiaalia nolaksi äärettömän kaukana.



Kuva 2.1: ”Pillerirasia” johdekappaleen reunalla.

Johdekappale

Kappaletta, jolla voi olla sisäistä varausta, kutsutaan **eristeeksi** (engl. dielectric). **Johteet** ovat puolestaan kappaleita, joissa on tarpeeksi liikkuvia varauksia, jotka jatkavat liikettään, kunnes sähkökenttä kappaleen sisällä on nolla. Varaukset joutuvat tällöin kappaleen pinnalle, eli sisällä varaustiheys on nolla ja kappaleen mahdollinen nettovaraus on pintavarausta. Jotta tilanne olisi staattinen, pinnalla olevan sähkökentän täytyy olla pinnan normaalin suuntainen $\mathbf{E}_n = nE_n$ (muuten varaukset liikkuisivat pitkin pintaa). Sovelletaan Gaussin lakia tässä tilanteessa tarkastelemalla ohutta (paksuus h) sylinterinmuotoista ”pillerirasiaa”, jonka ulompi pinta yhtyy tarkasteltavan kappaleen pintaan ja jonka tilavuus on $h dS$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, dS pohjan pinta-ala) (kuva 2.1).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n} dS - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\text{vaippa}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.32)$$

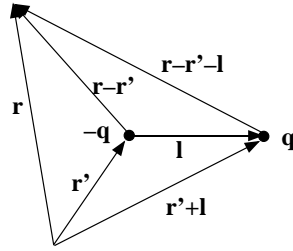
missä \mathbf{E}_i on kenttä pillerirasian sisemmällä pinnalla, siis 0. Mentäessä rajalle $h \rightarrow 0$, integraali vaipan yli menee nolaksi ja saamme

$$\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \quad (2.33)$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla pintaelementeillä, on sähkökenttä johdepallon pinnalla suoraan verrannollinen pintavaraukseen

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (2.34)$$

Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että mielivaltaisen johdekappaleen ympäröimässä tyhjässä onkalossa ei ole sähköstaattista kenttää.



Kuva 2.2: Sähködipolin muodostaminen kahdesta lähekkäisestä samansuuruisesta vastakkaismerkkisestä varauksesta.

2.5 Sähköinen dipoli

Tarkastellaan kahden erimerkkisen varauksen muodostamaa sähköistä dipolia. Olkoon varaus $-q$ pisteessä \mathbf{r}' ja varaus q pisteessä $\mathbf{r}' + \mathbf{l}$ (kuva 2.2). Tällöin sähkökenttä pisteessä \mathbf{r} on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2.35)$$

Tämä lauseke on täysin yleinen riippumatta varausten etäisyydestä. Käytännössä sähköisellä dipolilla ymmärretään raja-arvoa $l \rightarrow 0$, mikä on sama asia, kuin dipolin katselu kaukaa $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg |\mathbf{l}|$. Nyt

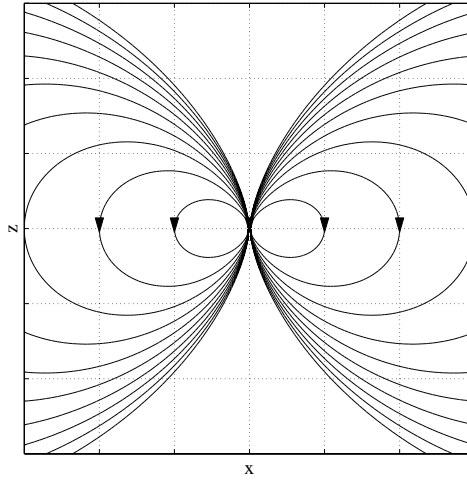
$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-3} &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^2]^{-3/2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

josta jälkimmäisen sulkulausekkeen voi kehittää binomisarjana

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-3/2} \\ &= 1 + \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right)}{2!} \left(-\frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + O[\mathbf{l}^2] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sijoittamalla tämä sähkökentän lausekkeeseen ja ottamalla mukaan \mathbf{l} :n suhteen ensimmäistä kertalukua olevat termit saadaan sähkökentän **dipoliap-proksimaatio**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right\} \quad (2.38)$$



Kuva 2.3: Dipolikentän kenttäviivat xz -tasossa. Dipoli sijaitsee origossa ja on z -akselin suuntainen.

Rajalla $l \rightarrow 0$ kenttä häviää, ellei q kasva rajatta. Pistedipoli on idealisaatio, jonka varaus on nolla, mutta jonka **dipolimomentti** $\mathbf{p} = ql$ on äärellinen ja määrää sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right\} \quad (2.39)$$

Kun dipoli sijoitetaan vielä origoon, saadaan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} \quad (2.40)$$

missä θ on dipolimomentin ja vektorin \mathbf{r} välinen kulma.

Samanlaisella laskulla saadaan dipolia vastaava potentiaali lähtien lausekkeesta

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} \quad (2.41)$$

Tulos on sähkökenttää yksinkertaisempi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2.42)$$

Myöhemmin nähdään, että magneettiselle dipolille saadaan samanmuotoiset lausekkeet. Dipolikentän kenttäviivat on hahmoteltu kuvaan 2.3.

2.6 Sähkökentän multipolikehitelmä

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista varausjakautumaa $\rho(\mathbf{r}')$ origon ympärillä. Sen aiheuttama potentiaali etäisessä pisteessä \mathbf{r} on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.43)$$

Kehitetään $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ binomisarjaksi ($r > r'$)

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[\quad \right]^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Sijoitetaan tämä potentiaalilausekkeeseen, jätetään \mathbf{r}' :n toista potenssia korkeammat termit pois ja järjestetään termit \mathbf{r}' :n kasvavien potenssien mukaan. Tämä antaa potentiaalilausekkeen multipolikehitelmän **kvadrupolimomenttia** myöten

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV' \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

missä x_i :t ovat paikkavektoreiden karteesisia komponentteja ja δ_{ij} on **Kroneckerin delta**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.46)$$

Multipolikehitelmän ensimmäinen tekijä vastaa origoon sijoitetun varausjakautuman kontribuutiota potentiaaliin. Toinen tekijä puolestaan vastaa origoon sijoitettua dipolimomenttien jakautumaa. Kolmas termi on muotoa

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \quad (2.47)$$

missä Q_{ij} on **kvadrupolimomenttitensori**. Näin ollen potentiaalilausekkeen multipolikehitelmä voidaan kirjoittaa sarjana

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right\} \quad (2.48)$$

Kaukana varausjakautumasta potentiaali on likimain ensimmäisen nolasta poikkeavan termin aiheuttama potentiaali. Atomien ytimissä dipolimomentti on nolla, mutta korkeammat multipolit ovat tärkeitä ydinfysiikassa.

2.7 Pistevarauksen jakautuma

Yksittäiset pistevaraukset voidaan käsitellä samalla formalismilla kuin varausjakautumat ottamalla käyttöön **Diracin deltafunktio** $\delta(\mathbf{r})$, jolloin

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \quad (2.49)$$

Deltafunktion ominaisuudet oletetaan tutuiksi (HT), todettakoon tässä kuitenkin seuraavat ominaisuudet

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \text{ jos } \mathbf{r} \neq 0 \quad (2.50)$$

$$\int \delta(\mathbf{r}') dV' = 1 \quad (2.51)$$

$$\int F(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) dV' = F(\mathbf{r}_0) \quad (2.52)$$

Lasketaan triviaalina esimerkkinä pisteessä \mathbf{r}_i olevan varauksen sähkökenttä tällä formalismilla

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q_i\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.53)$$

2.8 Poissonin ja Laplacen yhtälöt

Sähköstatiikka olisi aika suoraviivaista touhua, jos tietäisimme aina etukäteen kaikkien varausten paikat ja varausjakautumien paikkariippuvuudet. Näin ei kuitenkaan ole laita monissa käytännön ongelmissa. Koska $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ja $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, Gaussin laki differentiaalimuodossa vastaa matematiikan **Poissonin yhtälöä**

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.54)$$

Poissonin yhtälö voidaan integroida, jos varausjakautuman funktiomuoto ja oikeat reunaehdot tunnetaan. Usein tarkasteltavan tilanteen geometriasta on hyötyä ja silloin Laplacen operaattori ∇^2 on tarpeen kirjoittaa sopivissa koordinaateissa, esimerkiksi:

- karteesisissa koordinaateissa

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (2.55)$$

- pallokoordinaateissa

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \quad (2.56)$$

- sylinterikoordinaateissa

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (2.57)$$

Tapauksissa, joissa varaustiheys on nolla, Poissonin yhtälö yksinkertaistuu **Laplacen yhtälöksi**

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (2.58)$$

Laplacen yhtälön toteuttavaa funktiota kutsutaan **harmoniseksi**.

Tarkastellaan sitten sähköstaattista systeemiä, joka koostuu N johdekapaleesta. Kunkin johteen pinnalla potentiaali on φ_I , $I = 1, \dots, N$. Sähköstaatiikan potentiaaliongelmissa tehtävänä on etsiä $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ annetuilla reunaehdoilla. Reunaehdoja on olemassa kahta tyyppiä:

1. Tunnetaan potentiaali φ alueen reunalla. Tällaisia reunaehdoja kutsutaan **Dirichlet'n reunaehdoiksi**.
2. Tunnetaan potentiaalिन derivaatan normaalikomponentti $\partial\varphi/\partial n$ alueen reunalla. Tällaisia reunaehdoja kutsutaan **von Neumannin reunaehdoiksi**.

Selvitetään ensin, missä määrin mahdollisesti löydettävät ratkaisut ovat yksikäsitteisiä.

Ensinnäkin on selvää, että

- Jos $\varphi_1(\mathbf{r}), \dots, \varphi_n(\mathbf{r})$ ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja, niin

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum C_i \varphi_i(\mathbf{r})$$

missä C_i :t ovat mielivaltaisia vakioita, on Laplacen yhtälön ratkaisu.

Yksikäsitteisyyslause

- Kaksi annetut reunaehdot täyttävää Laplacen yhtälön ratkaisua ovat additiivista vakiota vaille samat.

Tarkastellaan tämän todistamiseksi johteiden pinnat S_1, \dots, S_N sisäänsä sulkevaa tilavuutta V_0 , joka on pinnan S sisällä (pinta voi olla äärettömyydessä). Olkoot φ_1 ja φ_2 kaksi Laplacen yhtälön toteuttavaa ratkaisua, jotka täyttävät samat reunaehdot johteiden pinnalla S_I , siis joko $\varphi_1 = \varphi_2$ tai

$\partial\varphi_1/\partial n = \partial\varphi_2/\partial n$ näillä pinnoilla sekä pinnalla S . Tarkastellaan funktiota $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Tilavuudessa V_0 on tietenkin $\nabla^2\Phi = 0$. Reunaehdoista puolestaan seuraa, että kaikilla reunoilla

$$\text{joko } \Phi = 0 \text{ tai } \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

Sovelletaan sitten divergenssiteoremaa vektoriin $\Phi\nabla\Phi$:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dV = \oint_{S+S_1+\dots+S_N} (\Phi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

koska joko Φ tai $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$ on pinnoilla 0. Toisaalta

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

eli

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2 dV = 0$$

Koska toisaalta $(\nabla\Phi)^2 \geq 0$ koko alueessa V_0 , sen on oltava nolla kaikkialla. Tästä seuraa, että Φ on vakio koko alueessa V_0 ja yksikäsitteisyyslause on siten todistettu.

Huom. Tämä ei ole todistus ratkaisun olemassaololle vaan sille, että jos ratkaisuja on, ne ovat yksikäsitteisiä! Tarkastelun merkitys on siinä, että jos löydämme millä keinolla tahansa annetut reunaehdot täyttävän Laplacen yhtälön ratkaisun, ratkaisu on Dirichlet'n reunaehdolla yksikäsitteinen ja von Neumannin reunaehdolla vakiota (eli potentiaalin nollatasoa) vaille yksikäsitteinen.

Todistuksessa käytettiin Greenin ensimmäistä kaavaa (GI)

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi) dV = \oint_S \varphi\nabla\psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.59)$$

sovellettuna tapaukseen $\Phi = \varphi = \psi$. Greenin toinen kaava (GII)

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi) dV = \oint_S (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.60)$$

tunnetaan myös nimellä **Greenin teoreema**. Nämä ovat divergenssiteoreman suoria seurauksia (HT).

2.9 Laplacen yhtälön ratkaiseminen

Laplacen yhtälö on yksi fysiikan keskeisimmistä yhtälöistä. Sähköopin lisäksi se esiintyy mm. lämmönsiirtymisilmiöissä, virtausmekaniikassa, jne. Kovin monimutkaisissa tilanteissa yhtälöä ei voi ratkaista analyyttisesti, mutta tutustutaan tässä muutamiin tapauksiin, joissa ongelman symmetriasta on hyötyä.

2.9.1 Muuttujien erottelu

Tutustutaan tässä lyhyesti menetelmään, jolla Laplacen yhtälö, joka on osittaisdifferentiaaliyhtälö, saadaan muunnetuksi ryhmäksi tavallisia yhden muuttujan differentiaaliyhtälöitä. Aiheesta enemmän kurssilla FYMM II ja fysiikan matemaattisten menetelmien oppikirjoissa. Kirjoitetaan Laplacen yhtälö ensin karteesisissa koordinaateissa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.61)$$

ja etsitään sille ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.62)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.61) ja jaetaan tulolla XYZ , jolloin saadaan

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (2.63)$$

Nyt jokainen termi riippuu vain yhdestä muuttujasta, jotka ovat keskenään riippumattomia. Niinpä kunkin termin on oltava erikseen vakioita

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (2.64)$$

missä $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Nyt kukin yhtälöistä (2.64) on helppo ratkaista

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{\beta y} + B_2 e^{-\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (2.65)$$

missä yleisesti kompleksiarvoiset vakiot A_i , B_i , C_i ja α , β , γ määräytyvät ongelman reunaehdoista.

Laplacen yhtälö voidaan separoida kaikkiaan 11 erilaisessa koordinaatistossa. Koska pistevarauksen kenttä on pallosymmetrinen, pallokoordinaatisto on usein erittäin käyttökelpoinen. Laplacen yhtälö on tällöin

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.66)$$

Etsitään tälle ratkaisua muodossa

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (2.67)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.66), kerrotaan suurella $r^2 \sin^2 \theta$ ja jaetaan $R\Theta\Phi$:llä:

$$r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 \quad (2.68)$$

Nyt ainoastaan viimeinen termi riippuu ϕ :stä, joten sen on oltava vakio, jota merkitään $-m^2$:llä:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (2.69)$$

Tämän ratkaisut ovat tietenkin muotoa

$$\Phi(\phi) = \text{vakio} \cdot e^{\pm im\phi} \quad (2.70)$$

Yleisesti m on kompleksinen, mutta fysikaalinen ehto rajaa sen mahdolliset arvot: jotta ratkaisu olisi jatkuva, kun $\phi \rightarrow 0$ ja $\phi \rightarrow 2\pi$, on oltava $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, joten $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Yhtälön (2.68) ensimmäisen termin on oltava puolestaan m^2 , joten

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) = 0 \quad (2.71)$$

Nyt tämän yhtälön ensimmäinen ja toinen termi riippuvat kumpikin ainoastaan omasta muuttujastaan ja ovat siten yhtä suuria vastakkaismerkkisiä vakioita, jota merkitään $l(l+1)$:llä

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2R}{dr^2} = (l+1)l \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -(l+1)l \quad (2.73)$$

Yhtälön (2.72) yleinen ratkaisu on muotoa

$$R(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad (2.74)$$

missä A ja B ovat vakioita. Kirjoittamalla $\xi = \cos\theta$ saadaan Θ :n yhtälöksi

$$\frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right) \Theta = 0 \quad (2.75)$$

Jotta tämän ratkaisut olisivat äärellisiä pisteissä $\xi \pm 1$ eli $\theta = 0, \pi$, on oltava $l = |m|, |m|+1, \dots$. Tietyllä tavalla normitettuja ratkaisuja ovat **Legendren liittofunktiot** $P_l^m(\xi)$. Niille on voimassa ehto $|m| \leq l$, joten

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (2.76)$$

Erikoistapauksessa $m = 0$, jolloin Laplacen yhtälön ratkaisu ei riipu lainkaan ϕ :sta, Legendren liittofunktiot redusoituvat **Legendren polynomeiksi** P_l , jotka voidaan laskea kaavasta

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \quad (2.77)$$

Legendren liittofunktiot saadaan Legendren polynomeista puolestaan kaavalla

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \quad (2.78)$$

Yleisesti Laplacen yhtälöllä on siis pallokoordinaatistossa jokaista l kohti $2l + 1$ kulmista θ ja ϕ riippuvaa ratkaisua. Ne voidaan sopivasti normittaen lausua **palloharmonisten funktioiden**

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.79)$$

avulla. Normitus on valittu siten, että pallofunktiot Y_{lm} muodostavat ortonormitetun täydellisen funktiojärjestelmän pallon pinnalla:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{np}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ln} \delta_{mp} \quad (2.80)$$

Palloharmonisten yhteenlaskuteoreema antaa kahden vektorin välisen etäisyyden käänteisluvun summana

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (2.81)$$

missä vektorin \mathbf{r} suuntakulmat ovat θ, ϕ ja vektorin \mathbf{r}' suuntakulmat θ', ϕ' sekä $r_{<} = \min(r, r')$ ja $r_{>} = \max(r, r')$.

Mikä hyvänsä riittävän säännöllinen pallon pinnalla määritelty funktio voidaan kehittää palloharmonisten sarjaksi. Esimerkkinä käy maapallon magneettikenttä, jonka sarjakehitelmän johtava termi vastaa magneettista dipolia ja korkeammat termit johtuvat kentän lähteen poikkeamisesta dipolista, magneettisen maa-aineksen epätasaisesta jakautumasta ja maapallon yläpuolisissa ionosfäärissä ja magnetosfäärissä kulkevista sähkövirroista. Palloharmonisia funktioita tarvitaan myös paljon atomifysiikassa ja kvantttimekaniikassa mm. tarkasteltaessa impulssimomenttioperaattoreita. Tekijä $(-1)^m$ kaavassa (2.79) on vaihetekijä, joka voidaan periaatteessa jättää pois tai ottaa mukaan jo P_l^m :n määritelmässä (2.78). Sen ottaminen mukaan on hyödyllistä eritoten kvantttimekaniikan laskuissa (katso esim. *Arfken*).

Kootaan lopuksi löydetty Laplacen yhtälön muotoa

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi)$$

oleva ratkaisu, kun $0 < r < \infty$

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi) + \sum_{lm} B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.82)$$

missä summaus on

$$\sum_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l$$

ja kertoimet A_{lm}, B_{lm} määräytyvät ongelman reunaehdoista.

2.9.2 Ratkaisu pallokoordinaateissa

Ratkaistaan Laplaceen yhtälö pallokoordinaatistossa rajoittuen atsimutaalisymmetriseen tapaukseen, missä siis $\partial\varphi/\partial\phi = 0$ eli $\varphi = \varphi(r, \theta)$. Tällaisia ovat pistevarauksen tai dipolin kaltaiset tilanteet, mukaanlukien myöhemmin eteentuleva magneettisen dipolin kenttä. Laplaceen yhtälö on nyt

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.83)$$

Toistetaan harjoituksen vuoksi edellä ollut muuttujien separointi etsimällä ratkaisua yrittäen

$$\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta) \quad (2.84)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (2.85)$$

Yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin jokin vakio k kaikilla r :n ja θ :n arvoilla. Näin osittaisdifferentiaaliyhtälö on hajotettu kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Kulman θ yhtälöä kirjoitettuna muodossa

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \quad (2.86)$$

kutsutaan **Legendren yhtälöksi**. Kuten edellä todettiin, fysikaalisesti kelvolliset ratkaisut kaikilla $\theta \in [0, \pi]$ edellyttävät, että $k = n(n+1)$, missä n on positiivinen kokonaisluku ja ratkaisut ovat Legendren polynomeja $P_n(\cos \theta)$. (Huom. RMC merkitsee samaa asiaa $P(\theta)$:lla!)

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [\cos^2 \theta - 1]^n \quad (2.87)$$

joten muutama ensimmäinen P_n on

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos \theta \\ P_2 &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten radiaalista yhtälöä

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z \quad (2.88)$$

Yrite $Z_n(r) = C_n r^s$ antaa kaksi riippumatonta ratkaisua r^n ja $r^{-(n+1)}$. Radiaalisen yhtälön täydellinen ratkaisu on näiden lineaarikombinaatio

$$Z_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \quad (2.89)$$

ja koko Laplacen yhtälön ratkaisu atsimutaalisessa symmetriassa on muotoa

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (2.90)$$

Integroimisvakiot A_n ja B_n on määritettävä reunaehdoista.

Esimerkki. Johdepallo vakiosähkökentässä

Tarkastellaan tasaista sähkökenttää \mathbf{E}_0 , johon tuodaan varautumaton johdepallo. Johdepallo pakottaa alunperin suorat kenttäviivat taipumaan siten, että ne leikkaavat pallon pintaa kohtisuoraan. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä ja sähkökenttä on z -akselin suuntainen. Tällöin on selvää, että ongelma on atsimutaalisymmetrinen. Johteen pinta on kaikkialla samassa potentiaalissa φ_0 .

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \quad (2.91)$$

missä a on pallon säde. Kaukana pallosta sähkökenttä lähestyy alkuperäistä kenttää

$$\mathbf{E}(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} = E_0 \mathbf{e}_z \quad (2.92)$$

mistä voidaan laskea potentiaali

$$\varphi(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_0 r \cos \theta + C = -E_0 z + C \quad (2.93)$$

Valitsemalla origon potentiaaliksi nolla, saadaan $C = 0$.

Tarkastellaan sitten yhtälön 2.90 kertoimia. Kirjoitetaan auki potentiaalain muutama ensimmäinen termi

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta + A_2 r^2 \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \\ & + \frac{B_2}{r^3} \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.94)$$

Kun $r \rightarrow \infty$, $\varphi = -E_0 r \cos \theta \Rightarrow A_n = 0$, kaikille $n \geq 2$ ja $A_1 = -E_0$. Koska pallon kokonaisvaraus on nolla, potentiaalissa ei ole $(1/r)$ -riippuvuutta, eli $B_0 = 0$. Jäljellä ovat $\cos^n \theta$ -termit, joissa $n \geq 2$, ovat kaikki lineaarisesti riippumattomissa polynomeissa P_n , joten ne eivät voi kumota toisiaan pallon pinnalla, missä ei ole θ -riippuvuutta (potentiaali on vakio johteen pinnalla), eli $B_n = 0$ kaikille $n \geq 2$. Näin ollen jäljellä on

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \quad (2.95)$$

$$\varphi(r, \theta) = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad (2.96)$$

Kun $r = a$, $\cos \theta$ -termien on kumottava toisensa, joten saamme määrättyksi $A_0 = \varphi_0$ ja $B_1 = E_0 a^3$. Niinpä reunaehdot täyttävä Laplacen yhtälön ratkaisu on

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 + \left(\frac{a^3 E_0}{r^2} - E_0 r \right) \cos \theta \quad (2.97)$$

Sähkökentän $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ komponentit saadaan laskemalla

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (2.98)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (2.99)$$

Pallon pintavaraustiheys on

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r = a) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2.100)$$

Pinnalle indusoituva varausjakautuma on θ :n funktio. Sen dipolimomentti on

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{\text{pallo}} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \int_{r=a} (r \mathbf{e}_r) (3\epsilon_0 E_0 \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 6\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \int_0^\pi \mathbf{k} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.101)$$

Kaukaa katsottuna johdepallon osuus kentästä on sama kuin origoon sijoitetun dipolin, jonka dipolimomentti on $\mathbf{p} = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z$.

2.9.3 Ratkaisu sylinterikoordinaateissa

Useat fysiikan ongelmat ovat sylinterisymmetrisiä. Tarkastellaan esimerkkinä Laplacen yhtälöä pitkän suoran virtajohteen tapauksessa. Mikäli tarkasteltava sylinteri on riittävän pitkä, voidaan olettaa $\partial \varphi / \partial z = 0$ ja Laplacen yhtälöstä tulee

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.102)$$

Huom. Sylinterikoordinaatistossa r :llä ja θ :lla on eri merkitys kuin pallokoordinaatistossa!

Laplacen yhtälö separoituu yritteellä $\varphi = Y(r)S(\theta)$

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = k \quad (2.103)$$

missä separointivakiolle k tulee jälleen tiettyjä rajoituksia kulmayhtälöstä

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + kS = 0 \quad (2.104)$$

Tämän ratkaisut ovat $\sin \sqrt{k} \theta$ ja $\cos \sqrt{k} \theta$. Näiden on oltava yksikäsitteisiä ja jatkuvia välillä $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eli $\cos \sqrt{k} (\theta + 2\pi) = \cos \sqrt{k} \theta$. Tästä seuraa, että $k = n^2$, missä n on kokonaisluku, joka voidaan rajoittaa positiiviseksi eli ratkaisufunktiot ovat $\sin n\theta$ ja $\cos n\theta$. Lisäksi tapauksessa $k = 0$, saadaan ratkaisu $S = A_0\theta + C_0$. Radiaalisesta yhtälöstä tulee nyt

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) - n^2 Y &= \\ r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} + r \frac{dY}{dr} - n^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.105)$$

joka ratkeaa yritteellä $Y = a_s r^s$

$$a_s s(s-1)r^s + a_s s r^s - a_s n^2 r^s = 0 \quad (2.106)$$

Tästä saadaan ehto s :lle $s^2 - s + s - n^2 = 0$ eli $s = \pm n$. Ratkaisufunktiot ovat siis muotoa $Y = r^n$ ja $Y = r^{-n}$. Tapaus $n = 0$ antaa lisäksi ratkaisun $Y = \ln(r/r_0)$. Kokonaisuudessaan ratkaisu on

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta) \\ &+ (A_0 \ln(r/r_0)) (C_0 \theta + D_0) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Vakiot on jälleen selvitettävä tarkasteltavan tilanteen ominaisuuksista ja reunaehdoista.

2.10 Peilivarausmenetelmä

Laplaceen yhtälön yksikäsitteisyys antaa ratkaisijalle vapauden käyttää mieleisään kikkoja ratkaisun löytämiseen. Tietyissä geometrisesti yksinkertaisissa tapauksissa peilivarausmenetelmä on näppärä keino välttää itse differentiaaliyhtälön ratkaiseminen. Tarkastellaan tilannetta, jossa meillä on joko annettu tai varausjakautumasta helposti laskettavissa oleva potentiaali $\varphi_1(\mathbf{r})$ ja johteita, joiden pintavarausjakautuma olkoon $\sigma(\mathbf{r})$. Tällöin kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.108)$$

Nyt ratkaisuun johdesysteemin ulkopuolella ei vaikuta lainkaan, kuinka varaus on jakautunut johteen pinnan takana, kunhan johteen pinnalla on voimassa samat reunaehdot. Voimme siis ajatella, ettei kyseessä olekaan johdekappale vaan pinta, jonka takana on varausjakautuma, joka antaa samat reunaehdot kuin oikea johdekappaleen pintavaraus. Tarkastellaan seuraavassa muutamaa esimerkkiä.

Esim. 1. Pistevaraus johdetason lähellä

Valitaan johdetasoksi (y, z) -taso ja olkoon varaus q x -akselilla pisteessä $x = d$. Johteen pinta on tasapotentiaalipinta, jonka potentiaali voidaan valita nolllaksi. Toisaalta (y, z) -taso saadaan nolllapotentiaaliin asettamalla varaus $-q$ pisteseen $(-d, 0, 0)$. Ratkaisujen yksikäsitteisyyden vuoksi tämä järjestely antaa oikean ratkaisun alueessa $x \geq 0$. Puoliavaruuteen $x < 0$ tätä menetelmää ei saa soveltaa, koska siellä ei ole oikeasti varausta! Nyt kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right) \quad (2.109)$$

missä \mathbf{d} on vektori origosta pisteeseen $(d, 0, 0)$. Tästä saa suoraan sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{d}}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^3} \right) \quad (2.110)$$

ja johteen pintavaraustiheydeksi tulee

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.111)$$

Varaus vetää pintaa puoleensa arvatenkin samalla voimalla kuin se vetäisi etäisyydellä $2d$ olevaa vastakkaismerkkistä varausta.

Esim. 2. Pistevaraus maadoitetun johdepallon lähellä

Maadoitus merkitsee tässä pallon pinnan valitsemista nolllapotentiaaliksi. Valitaan origoksi nyt pallon keskipiste, olkoon a pallon säde ja olkoon d etäisyys origosta varaukseen q . Etsitään siis potentiaali $\varphi(\mathbf{r})$, kun $r \geq a$ reunaehdolla $\varphi(a) = 0$.

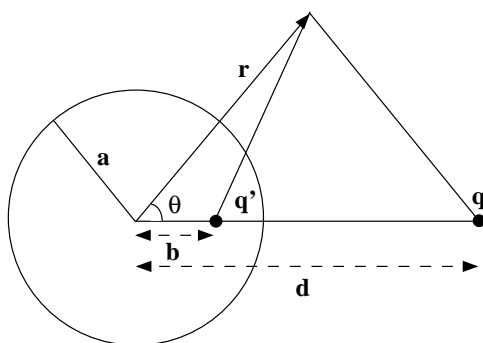
Tällä kertaa peilivarauksen paikan ja suuruuden määrittäminen on hieinan monimutkaisempi ongelma. Symmetrian perusteella peilivarauksen q' täytyy olla suoralla, joka kulkee varauksen q ja origon kautta. Tarkastellaan tilannetta kuvan 2.4 mukaisesti käyttäen pallokoordinaatteja.

Varauksen ja peilivarauksen yhteenlaskettu potentiaali pisteessä \mathbf{r} on

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (2.112)$$

Pallon pinnalla potentiaali on nolla kaikilla θ, ϕ . Sijoittamalla $r = a$ ja asettamalla $\theta = 0$ saadaan peilivarauksen paikka

$$b = \frac{a^2}{d} \quad (2.113)$$



Kuva 2.4: Pistevaraus johdepallon lähellä.

ja asettamalla puolestaan $\theta = \pi$ löytyy peilivarauksen suuruus

$$q' = -\frac{a}{d} q \quad (2.114)$$

ja ongelma on ratkaistu.

Mikäli palloa ei olisi maadoitettu, sen keskipisteeseen voitaisiin asettaa toinen peilivaraus q'' , joka puolestaan sovitettaisiin antamaan pinnalla oikea reunaehto. Pallon kokonaisvaraus olisi tällöin

$$Q = q' + q'' \quad (2.115)$$

2.11 Poissonin yhtälön ratkaisemisesta

Edellisissä jaksossa tarkasteltiin tilanteita, joissa oli joko pelkästään johdekappaleita tai johdekappaleita ja yksittäisiä varauksia. Yleisessä tilanteessa meillä voi olla annettu varausjakautuma ρ sekä johdekappaleita, joiden pintavarausjakautuma on tuntematon. Tällöin on ratkaistava Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.116)$$

Tämä voidaan tehdä integroimalla varausjakautuman yli

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.117)$$

ja lisäämällä tähän Laplacen yhtälön sellainen ratkaisu φ_2 , että yhteenlaskettu potentiaali toteuttaa reunaehdot johdekappaleiden pinnalla.

Kaikki ylläolevat esimerkit ovat perustuneet hyvin yksinkertaiseen geometriaan. Yleisemmin voidaan osoittaa, että Laplacen ja Poissonin yhtälöt,

jotka toteuttavat joko Dirichlet'n tai von Neumannin reunaehdot, voidaan ratkaista käyttäen Greenin teoreemaa (2.60) ja Greenin funktioita. Tarvitsemme tätä varten vielä kolmannenkin Greenin kaavan (GIII). Se saadaan soveltamalla GII:ta tapaukseen

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.118)$$

missä \mathbf{r} on jokin kiinteä piste alueessa V . Muodollisesti voidaan kirjoittaa

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.119)$$

Sijoittamalla nämä GII:een (2.60) saadaan GIII

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \varphi(\mathbf{r}') \right] \end{aligned} \quad (2.120)$$

(todistus, esim. CL 2.6.1, tai Jacksonin oppikirja)

GIII:a ei voi käyttää suoraan, koska siinä esiintyvät sekä Dirichlet'n että von Neumannin reunaehdot. Oletetaan, että $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ on jokin alueessa määritelty harmoninen funktio eli funktio, joka toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$, missä derivaatta on otettu pilkuttoman koordinaatin suhteen. Nyt GII antaa tuloksen

$$\begin{aligned} 0 = & -\int_V dV' F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ & + \oint_S dS' \left(F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') \right) \end{aligned} \quad (2.121)$$

Muodostetaan sitten **Greenin funktio**

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.122)$$

Summaamalla (2.120) ja (2.121) saadaan tulos

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & -\int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ & + \oint_S dS' \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') \right) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Valitsemalla sellainen $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ joka täyttää joko Dirichlet'n reunaehdot F_D tai von Neumannin reunaehdot F_N saadaan tästä Poissonin yhtälön ratkaisu annetuilla reunaehdoilla.

Greenin funktiolla on selvästikin ominaisuus

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.124)$$

Greenin funktioiden käyttö ei rajoitu suinkaan Poissonin yhtälön ratkomiin, vaan niillä on keskeinen osa ratkottaessa erilaisia **integraaliyhtälöitä**. Poissonin lauseke potentiaalille varausjakautuman funktiona on sinällään poikkeuksellisen yksinkertainen integraaliyhtälö.

Esimerkki. Pallon Greenin funktio

Tarkastellaan esimerkkinä pallon Greenin funktiota Dirichlet'n reunehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on tunnettu. Tällöin valitaan

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.125)$$

reunaehdolla

$$\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in S} = 0 \quad (2.126)$$

missä S on pallon pinta. Olemme jo aiemmin ratkaisseet identtisen ongelman yhdelle pistevaraukselle pallon ulkopuolella ehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on nolla yhtälössä (2.112). Siellä saatu ratkaisu on vakiota $q/4\pi\epsilon_0$ vaille yhtälön (2.126) ratkaisu, joten

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' |\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \quad (2.127)$$

missä a on origossa sijaitsevan pallon säde. Potentiaali saadaan integroimalla

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') dS' \quad (2.128)$$

missä on V viittaa pallon tilavuuteen ja S pallon pintaan. Normaalivektori \mathbf{n} suuntautuu ulospäin siitä alueesta, jossa potentiaali halutaan laskea. Tarkasteltaessa aluetta pallon sisällä $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ja ulkopuolista aluetta tutkittaessa $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. Ulospäin suuntautuva normaaliderivaatta on

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}'}{a} \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}' \in S} &= - \frac{1}{a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_{\mathbf{r}' \in S} \\ &= \frac{r^2 - a^2}{a} (a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.129)$$

missä γ on \mathbf{r} :n ja \mathbf{r}' :n välinen kulma.

Sovelletaan Greenin funktiota tapaukseen, jossa pallon sisällä ei ole varausta eli ratkaistaan Laplace'n yhtälö reunaehdolla $\varphi(a) = f(\mathbf{r})$, kun \mathbf{r} on pallon pinnalla. Tämä antaa Poissonin kaavana tunnetun tuloksen

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS' \\ &= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\Omega' \end{aligned} \quad (2.130)$$

joka ilmaisee siis potentiaalin alueen *sisällä* olettaen annetun potentiaalin pallon pinnalla. Jos puolestaan halutaan tarkastella potentiaalia pallon ulkopuolella, pintaintegraalissa normaalin suunta määritellään ulospäin ja ainoa muutos on korvata $(a^2 - r^2) \rightarrow (r^2 - a^2)$.