

## Luku 3

# Sähkökenttä väliaineessa

Tässä luvussa tutustutaan sähkökenttään väliaineessa (RMC luku 4, CL luku 4; esitiedot KSII luku 2, osa 2.9). Väliaineiden sähköisiin ja magneettisiin ominaisuuksiin tutustutaan lisää luvussa 10.

Edellisessä luvussa tarkasteltiin sähköstaattista kenttää tilanteissa, joissa oli annettuja varausjakautumia tai vapaita varauksia johdekappaleiden pinnalla. Läheskään kaikki materiaalit eivät kuitenkaan ole johteita. Hyvän johdeen vastakohta on ideaalinen eriste, jossa ei ole lainkaan vapaita varauksia. Aine on kuitenkin koostunut positiivisesti varatuista atomiytimistä ja elektroneista. Jos eriste asetetaan sähkökenttään, kenttä aiheuttaa voimavaikutuksen eristeen rakenneosasiin. Vaikutuksen suuruus riippuu materiaalin mikrokooppisista ominaisuuksista. Eristeeseen syntyvää makroskooppista vaikutusta kuvataan eristeen positiivisten varausten siirtymänä negatiivisiin varauksiin nähden. Aineen sanotaan tällöin polarisoituneen. Sisäisen polarisoituman ja ulkoisen kentän yhteisvaikutus on usein hyvin monimutkainen vuorovaikutusketju, sillä polarisoituma muuttaa puolestaan ulkoista kenttää ja mikäli eristeen lähellä on johdekappaleita, niiden pinnalle indusoituva varausjakautuma muuttuu, mikä puolestaan muuttaa eristeeseen vaikuttavaa ulkoista kenttää.

### 3.1 Sähköinen polarisoituma

Ennen kuin jatketaan, palautetaan mieleen, että sähköstatiikka hallitaan yhtälöillä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.2)$$

Erityisesti on huomattava, että  $\rho$  sisältää *kaikki* varaukset eikä mitään jakoa ”vapaisiin” ja ”muihin” varauksiin tarvitse tehdä. Periaatteessa polarisoitua aine voidaan siis käsitellä varausjakaumien avulla. Käytännössä aineen mikroskooppinen kuvaaminen ei ole helppoa. Tähän palaamme vielä luvussa 10.

Tarkastellaan polarisoituneen aineen pientä tilavuusalkiota  $\Delta V$ , jonka dipolimomentti on

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta V} \mathbf{r} dq \quad (3.3)$$

**Sähköinen polarisoituma** määritellään dipolimomenttina yksikkötilavuudessa

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (3.4)$$

Tämä määritelmä edellyttää, että  $\Delta V$  on makroskooppisessa mielessä pieni. Varsinaisesta raja-arvosta  $\Delta V \rightarrow 0$  ei tarkkaan ottaen ole kysymys, koska tilavuusalkiossa täytyy kuitenkin olla monta molekyyliä, jotta polarisaatio ylipäänsä syntyisi. Makroskooppiselta kannalta polarisoitumaa voi kuitenkin tarkastella jatkuvana paikan funktiona.

Polarisoituman SI-yksikkö on C/m<sup>2</sup>, joten  $[\mathbf{P}] = [\epsilon_0][\mathbf{E}]$ . Cgs-yksiköissä, missä tyhjän permittiivisyys on  $1/4\pi$ , polarisoitumalla on sama yksikkö kuin sähkökentällä.

### 3.2 Polarisoituman aiheuttaman sähkökentän määrittäminen

Tarkastellaan pisteessä  $\mathbf{r}'$  sijaitsevan pienen eristealkion  $\Delta V'$  dipolimomenttia  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P} dV'$ . Oletetaan, että korkeampien multipolien vaikutus voidaan jättää huomiotta. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että havaintopiste  $\mathbf{r}$  on niin etäällä, että tämän alkion aiheuttama sähköinen potentiaali saadaan laskemalla pelkän dipolimomentin potentiaali

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta V'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.5)$$

Kokonaispotentiaali pisteessä  $\mathbf{r}$  on tietenkin tämän integraali

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.6)$$

Mikäli polarisoituma tunnetaan, potentiaali voidaan laskea tästä suoraan. Käytännössä sama asia on hyödyllistä ilmaista hieman eri tavalla. Koska

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.7)$$

### 3.2. POLARISOITUMAN AIHEUTTAMAN SÄHKÖKENTÄNMÄÄRITTÄMINEN 37

voidaan potentiaalin integrandi kirjoittaa

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (3.8)$$

Käyttämällä kaavaa

$$\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f \quad (3.9)$$

saadaan

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (3.10)$$

Tämän avulla ja soveltamalla divergenssiteoreemaa potentiaali voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \oint_{S_0} \frac{\sigma_P dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (3.11)$$

missä  $S_0$  on eristeen pinta. Potentiaali voidaan siis laskea lausekkeista, jotka muistuttavat edellisessä luvussa olleita avaruus- ja pintavaraustiheyden integraaleja. Tämä on käytännön ongelmassa usein näppärämpi tapa laskea potentiaali kuin suora sähköisen polarisoituman integraali. Suureita

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (3.12)$$

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.13)$$

kutsutaan **polarisaatiovaraustiheyksiksi**. Niiden fysikaalinen dimensio on varaus/pinta-ala ( $\sigma_P$ ) ja varaus/tilavuus ( $\rho_P$ ) ja ne aiheuttavat eristeen ulkopuolella todellisen potentiaalin  $\varphi$ , josta saadaan sähkökenttä  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Kyse ei ole kuitenkaan oikeista ”vapaista” varauksista vaan tavasta kuvata eristeen ominaisuuksia varausjakautuman  $dq'_P$  avulla. Tämän vuoksi polarisaatiovarauksia kutsutaan usein näennäisiksi varauksiksi, mikä ei kuitenkaan tee niille täyttä oikeutta. Eriste on kokonaisuudessaan neutraali, joten kokonaisvaraus

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dV' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS' = 0 \quad (3.14)$$

mikä on suora seuraus divergenssiteoreemasta.

RMC:ssä edellä oleva tarkastelu on aluksi rajoitettu eristekappaleen ulkopuoliseen alueeseen. Sen jälkeen todetaan, että sama potentiaalin lauseke kelpaa myös eristeen sisällä. Tällainen jako ei kuitenkaan ole tarpeen, koska polarisaatiovaraus on yhtä todellista varausta kuin ”vapaa” varaus.

### 3.3 Sähkövuon tiheys

Edellä oletettiin eristeen polarisoituma  $\mathbf{P}$  tunnetuksi. Todellisuudessa näin ei yleensä ole, vaan polarisoituma syntyy vasteena ulkoiseen sähkökenttään. Tarkastellaan yleistä tilannetta, jossa on eriste ja sen sisällä mahdollisesti vapaita varauksia. Sovelletaan Gaussin lakia eristeen sisällä olevalla pinnalla  $S$ , joka sulkee sisäänsä niin vapaat varaukset kuin polarisaatiovarauksenkin

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P) \quad (3.15)$$

missä  $Q = \sum_{i=1, \dots, N} q_i$  on vapaiden varausten summa ja

$$Q_P = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.16)$$

on polarisaatiovaraus. Tässä on implisiittisesti oletettu, että vapaat varaukset ovat pistemäisiä. Jos eristeen sisällä olisi makroskooppisia johdekappaleita, niiden pinnoilta tulisi osuus polarisaatiovaraukseen  $Q_P$ . Nämä pintatermit kuitenkin kumoutuisivat muutettaessa tilavuusintegraalit pintaintegraaleiksi (ks. RMC).

Saadaan siis

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.17)$$

Siis vektorin  $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  vuo suljetun pinnan läpi on sama kuin pinnan sulkemaan tilavuuteen sijoitettu nettovaraus. Tätä vektoria kutsutaan **sähkövuon tiheydeksi** tai sähköiseksi siirtymäksi englanninkielisen termin "electric displacement" mukaan. Sähkövuon tiheydellä on sama SI-yksikkö kuin polarisoitumalla.

Käyttämällä jälleen divergenssiteoreemaa ja toteamalla, että  $Q = \int_V \rho dV$ , saadaan Gaussin laki eristeessä kirjoitetuksi differentiaalimuotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.18)$$

missä  $\rho$  on nyt ulkoisten varausten tiheys. Kokonaisvaraustiheys on  $\rho + \rho_P$ . Ulkoisia varauksia kutsutaan usein vapaiksi, mutta tämä saattaa aiheuttaa sekaannusta, sillä eristeessä oleva ulkoinen varaus ei ole vapaa samassa mielessä kuin johteen pinnalla oleva varaus. Myös ajasta riippuvissa tilanteissa vapaiden ja ulkoisten varausten sekoittaminen toisiinsa voi johtaa virheisiin.

Sähköstaatiikan peruslait on nyt siis puettu muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

missä

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.21)$$

Etuna tässä on se, että ”vapaa” varaus on helpommin hallittavissa kuin polarisaatiovaraus. Kuitenkin sähkökenttä  $\mathbf{E}$  on suure, joka loppujen lopuksi halutaan määrittää. Siksi on vielä tunnettava rakenneyhtälö  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ , koska muuten yhteydestä  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  ei ole iloa. Tätä ongelmaa käsitellään seuraavaksi.

### 3.4 Dielektrisyys ja susceptiivisuus

Sähköinen polarisoituma aiheutuu sähkökentästä. Näiden välinen riippuvuus ilmaistaan **sähköisen susceptiivisuuden**  $\chi(\mathbf{E})$  avulla

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad (3.22)$$

$\chi(\mathbf{E})$  määräytyy väliaineen mikroskooppisesta rakenteesta, johon tutustutaan lähemmin luvussa 10.

Yleisesti ottaen  $\chi(\mathbf{E})$  on tensori, jolloin polarisoituma ei välttämättä ole samansuuntainen kuin sähkökenttä eli eriste voi olla **epäisotrooppista**. Tällaisia väliaineita ovat esimerkiksi kiderakenteet, joissa epäisotropia aiheuttaa sähkömagneettisen aallon etenemisessä kahtaistaittavuudeksi kutsuttavan ilmiön. Tällöin eri tavoin polarisoituneet aallot taittuvat eri tavoin. Kahtaistaittavuutta tapahtuu myös vapaista varauksista koostuvassa magnetoituneessa plasmassa.

Toinen ongelmakenttä ovat epälineaariset väliaineet, joissa  $\chi(\mathbf{E})$  on sähkökentän funktio, jolloin  $\mathbf{P}$  riippuu sähkökentästä epälineaarisesti. Tämä ilmiö tulee yleensä vastaan vasta hyvin voimakkailla sähkökentillä. Kaikissa aineissa ei myöskään ole suoraa relaatiota  $\mathbf{P}$ :n ja  $\mathbf{E}$ :n välillä. Ferrosähköisissä aineissa on polarisoitumaa myös ilman ulkoista sähkökenttää. Tarkastellaan tässä kuitenkin vain isotrooppisia eristeitä, joille  $\chi(\mathbf{E})$  on skalaari ja rajoitutaan vielä lineaarisiin väliaineisiin, joille  $\chi$  on sähkökentästä riippumaton vakio. Tällaista väliainetta kutsutaan myös **yksinkertaiseksi** väliaineeksi. Tällöin polarisoituman, sähkökentän ja sähkövuon tiheyden välillä vallitsevat **rakenneyhtälöt**

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.24)$$

missä  $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ . Laadutonta suuretta

$$K = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (3.25)$$

kutsutaan väliaineen **eristevakioksi**, dielektrisyysvakioksi tai suhteelliseksi permittiivisyydeksi. Aineen eristeominaisuudet eivät kuitenkaan salli kuinka suuria sähkökenttiä hyvänsä, sillä riittävän suuri sähkökenttä ajaa elek-

Taulukko 3.1: Eristeiden ominaisuuksia. Tässä annettu ilman läpilyöntikestävyys koskee kuivaa ilmaa, muissa oloissa arvo on pienempi. Lasin suhteellinen permittiivisyys vaihtelee kemiallisesta koostumuksesta riippuen.

aine	suhteellinen permittiivisyys	läpilyöntikestävyys [MV/m]
akryyli	3.3	20
eboniitti	2.7	10
kuiva ilma	1.0006	4.7
lasi	5-10	15
kova paperi	5	15
eristyspaperi	5	30
posliini	5.5	35
tislattu vesi	81	30

troneja ulos molekyyleistä, jolloin aine alkaa johtaa sähköä. Tätä rajaa kutsutaan aineen dielektriseksi vahvuudeksi. Taulukossa 3.1 on joidenkin tärkeiden aineiden eristevakioita ja dielektrisiä vahvuuksia. Ilma on sähköisesti melkein tyhjä, siis hyvä eriste. Veden eristevakio on puolestaan suuri, mikä merkitsee vahvaa polarisoitumista ja siten kohtuullisen hyvää sähkönjohtokykyä polarisoitumisvarausten kantamana.

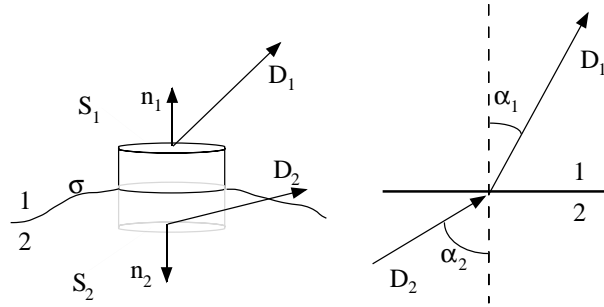
### 3.5 Sähkökenttä rajapinnalla

Eristeet ovat usein paljon hankalampia käsiteltäviä kuin johteet. Hyvän johteen ominaisuus on, että sen sisäinen sähkökenttä on nolla ja kaikki varaus kertyy pinnalle. Eristeet sen sijaan polarisoituvat ja erilaiset eristeet polarisoituvat eri tavoin. Eristeongelmissa joudutaan usein tarkastelemaan kenttien ominaisuuksia eri eristeiden tai eristeiden ja johteiden rajapinnoilla.

Tarkastellaan seuraavassa tilannetta kahden yksinkertaisen (lineaarinen, isotrooppinen, homogeeninen = LIH) eristeen rajapinnalla ja oletetaan rajapinta makroskooppisessa mielessä ohueksi. Tämä tarkastelu voidaan ulottaa myös epähomogeenisiin eristeisiin, jos eriste voidaan kuvata eri eriste-vakiolla varustettuina kerroksina. Toinen eriste voi olla myös tyhjä, jonka permittiivisyys on  $\epsilon_0$  eli  $K = 1$ . Merkitään väliaineita indekseillä 1 ja 2 ja olkoon  $\sigma$  pintavaraustiheys rajapinnalla. Tarkastellaan pientä sylinterinmuotoista ”pillerirasiaa”, jonka kannet ovat eri väliaineissa (kuva 3.1).

Sovelletaan Gaussin lakia

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2 + \oint_{\text{vaippa}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.26)$$



Kuva 3.1: ”Pillerirasia” kahden väliaineen rajapinnalla ja sähkövuon tiheyden ”taantumiskulmien” määrittelmä.

Oletetaan, että pillerirasian korkeus  $\rightarrow 0$ . Tällöin integraali vaipan yli on nolla ja pillerirasian sisällä oleva varaus on pelkkä pintavaraus kertaa pinta-ala  $Q = \sigma \Delta S$ , missä  $\Delta S = \Delta S_1 = \Delta S_2$ . Koska  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ , voidaan kirjoittaa **reunaehto** sähkövuon tiheyden normaalikomponentille

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \quad (3.27)$$

tai

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (3.28)$$

Tärkeä erikoistapaus on  $\sigma = 0$ : Mikäli kahden eristeen rajapinnalla ei ole ulkoista varausta, sähkövuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

**Huom.** Koska eristeet polarisoituvat, ylläoleva tarkastelu on tehtävä nimenomaan sähkövuon tiheydelle, ei sähkökentälle.

Myös sähköstaattiselle kentälle löytyy reunaehto rajapinnalla. Koska  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , niin viivaintegraali

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.29)$$

pitkin mitä tahansa suljettua silmukkaa. Sovelletaan tätä suorakulmaiseen silmukkaan  $ABCD$  eristeiden rajapinnalla. Olkoot rajapinnan suuntaiset sivut  $AB$  ja  $CD$  kumpikin eri väliaineessa ja pituudeltaan  $\Delta l$ . Väliaineesta toiseen kulkevat sivut  $BC$  ja  $DA$  oletetaan häviävän lyhyiksi. Tällöin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0 \quad (3.30)$$

$\Rightarrow$

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (3.31)$$

eli sähkökentän tangentiaalikomponentti on jatkuva rajapinnan yli. Tämä tulos on voimassa riippumatta mahdollisesta pintavarauksesta.

Lasketaan sitten vektorin  $\mathbf{D}$  taittuminen rajapinnalla tapauksessa  $\sigma = 0$ . Olkoon  $\alpha_1$  ”rajapinnalle tulevan” vektorin  $\mathbf{D}_1$  ja  $\mathbf{n}_1$ :n välinen kulma ja  $\alpha_2$  ”rajapinnalta lähtevän” vektorin  $\mathbf{D}_2$  ja  $\mathbf{n}_2$ :n välinen kulma. Koska väliaineet on oletettu yksinkertaisiksi, niin

$$D_{1t} = K_1 \epsilon_0 E_{1t} ; D_{2t} = K_2 \epsilon_0 E_{2t} \quad (3.32)$$

Tällöin

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{D_{2t} D_{1n}}{D_{2n} D_{1t}} = \frac{K_2 \epsilon_0 E_{2t}}{K_1 \epsilon_0 E_{1t}} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (3.33)$$

Sähkövuon tiheysvektori taittuu siis pois päin normaalin suunnasta mentäessä pienemmästä eristevakiosta suurempaan eristevakioon. Tämä on selvästi sukua aaltojen taittumiselle eri väliaineiden rajapinnalla, johon tutustutaan lähemmin luvussa 12.

Tarkastellaan sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Oletetaan jälleen  $\sigma = 0$ , jolloin  $D_{2n} = D_{1n}$ . Tästä seuraa  $K_2 \epsilon_0 E_{2n} = K_1 \epsilon_0 E_{1n}$ . Koska  $E_n = -\partial\varphi/\partial n$ , tulee reunaehdoksi

$$K_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \quad (3.34)$$

Tämän lisäksi  $\varphi$  on jatkuva reunan yli. Tämä nähdään tarkastelemalla kahta pistettä  $r_1$  ja  $r_2$  reunan molemmiin puolin. Tällöin

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

kun  $r_1$  ja  $r_2$  lähestyvät toisiaan eri puolilta rajapintaa sillä fysikaalisella oletuksella, että sähkökenttä on äärellinen rajapinnalla.

### Eristepallo sähkökentässä

Yksinkertaisessa väliaineessa (LIH)  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , joten  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ . Siis ainoa muodollinen ero edellisten lukujen käsittelyyn on korvata  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ . Useissa käytännön ongelmissa eristeessä ei ole ulkoista varausta, joten  $\nabla^2\varphi = 0$  koko eristeessä. Tarkastellaan esimerkkinä  $a$ -säteistä eristepalloa homogeenisessa sähkökentässä  $\mathbf{E}_0$ . Ratkaisumenetelmä on samanlainen kuin johdepallon tapauksessa. Valitaan alkuperäinen sähkökenttä  $z$ -akselin suuntaiseksi  $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$ , joten tämän potentiaali on jälleen  $\varphi = -E_0 r \cos\theta$  ja tämän on oltava ratkaisu kaukana pallosta. Asetetaan pallo origoon ja todetaan, että tilanne on aksiaalisymmetrinen  $z$ -akselin suhteen:  $\partial\varphi/\partial\phi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(r, \theta)$ .  $K$  on vakio eristeessä ja  $\epsilon = \epsilon_0$  muualla. Systeemissä ei ole vapaita varauksia, joten  $\rho = 0$  kaikkialla ja Laplacen yhtälö on voimassa niin



eristeessä kuin sen ulkopuolellakin. Kirjoitetaan Laplacen yhtälön ratkaisu jälleen vyöhykeharmonisten funktioiden sarjana (2.90)

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) \quad (3.36)$$

Merkitään termejä pallon ulkopuolella ( $r > a$ ) indeksillä 1 ja sisäpuolella ( $r < a$ ) indeksillä 2. Etäällä pallosta ratkaisu lähenee alkuperäistä potentiaalia  $-E_0 r \cos \theta$ , joten pallon ulkopuolella

$$A_{1n} = 0, \text{ kun } n \geq 2; \quad A_{11} = -E_0$$

$\Rightarrow$

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) - E_0 r \cos \theta \quad (3.37)$$

Pallon sisällä potentiaalin on oltava äärellinen origossa, joten kaikki kertoimet  $B_{2n}$  ovat nollia ja sisäratkaisu on muotoa

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) \quad (3.38)$$

Käytetään sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Ensinnäkin potentiaalin on oltava jatkuva  $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & -E_0 a \cos \theta + \frac{B_{10}}{a} + \frac{B_{11}}{a^2} \cos \theta + \frac{B_{12}}{a^3} P_2(\cos \theta) + \dots \\ & = A_{20} + A_{21} a \cos \theta + A_{22} a^2 P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

Toisaalta potentiaalin derivaatalle on reunaehto

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = K \left. \frac{\partial \varphi_2(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} & -E_0 \cos \theta - \frac{B_{10}}{a^2} + \frac{2B_{11}}{a^3} \cos \theta + \frac{3B_{12}}{a^4} P_2(\cos \theta) + \dots \\ & = K A_{21} \cos \theta + 2K A_{22} a P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

Koska Legendren polynomit muodostavat ortonormaalin kannan, kunkin  $P_n$ -termin täytyy toteuttaa yhtälöt erikseen. Nyt molemmat yhtälöt (3.39) ja (3.40) toteutuvat vain jos  $A_{2n} = 0$  ja  $B_{1n} = 0$  kaikilla  $n \geq 2$ . Yhtälön (3.40)

ainoa  $\cos\theta$ :sta riippumaton termi on  $B_{10} = 0$ , joka sijoitettuna yhtälöön (3.39) antaa  $A_{20} = 0$  ja jäljelle jää yhtälöpari

$$-E_0a + \frac{B_{11}}{a^2} = A_{21}a \quad (3.41)$$

$$-E_0 - \frac{2B_{11}}{a^3} = KA_{21} \quad (3.42)$$

joiden ratkaisuna saadaan

$$A_{21} = -\frac{3E_0}{K+2}; \quad B_{11} = \frac{K-1}{K+2}E_0a^3 \quad (3.43)$$

Kaiken kaikkiaan ratkaisu pallon ulkopuolella on

$$\varphi_1(r, \theta) = -\left(1 - \frac{K-1}{K+2} \frac{a^3}{r^3}\right) E_0r \cos\theta \quad (3.44)$$

ja pallon sisällä

$$\varphi_2(r, \theta) = -\frac{3}{K+2}E_0r \cos\theta = -\frac{3}{K+2}E_0z \quad (3.45)$$

Nyt pallon sisällä on vakiosähkökenttä

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3}{K+2}\mathbf{E}_0 \quad (3.46)$$

ja juuri tämä on erona johdepalloon, jossa varaukset jakautuvat pinnalle siten, että pallon sisällä ei ole sähkökenttää lainkaan.  $K \geq 1$ , joten kenttä eristeen sisällä on pienempi kuin ulkopuolella. Jos eriste olisi ilmaa, pallon kenttä olisi miltei sama kuin alkuperäinen kenttä. Jos eriste on jonkin verran sähköä johtavaa vettä ( $K = 80-90$ ), on pallon sisäkenttä muutama prosentti ulkopuolisesta kentästä.

Kenttien  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{E}$  ero näkyy kuvasta 3.2. Sähkövuon tiheydellä ei ole lähteitä, vaan kaikki kenttäviivat jatkuvat pallon läpi. Sitävastoin polarisoitumisesta johtuva pintavarauskate aiheuttaa sen, että sähkökentällä on lähteitä ja nieluja pallon pinnalla ja osalla kenttäviivoista pää on pallon pinnalla. Tämän seurauksena kenttäviivat eivät myöskään ole kohtisuorassa pallon pintaa vastaan. Tämä osoittaa, että polarisaatiovarauksen kutsuminen ”näennäiseksi” on kyseenalaista.

Kuva 3.2: Eristepallo ulkoisessa sähkökentässä. Vasemmalla sähkövuon tiheyden kenttäviivat, oikealla sähkökentän kenttäviivat.

