# Luku 4

# Sähköstaattinen energia

Esitiedot KSII luku 2, osa 2.10; oppimateriaali RMC luku 6 ja CL luku 5.

Voiman, työn ja energian käsitteet ovat keskeisiä kaikessa fysiikassa. Mittaamme sähkö- ja magneettikenttiä voimavaikutuksen kautta. Kun voima vaikuttaa varaukselliseen hiukkaseen, se tekee työtä ja hiukkasen energia muuttuu. Samoin kuin mekaniikassa, myös elektrodynamiikassa energia voidaan jakaa liike- ja potentiaalienergiaan. Sähköstaattinen energia on potentiaalienergiaa. Kun varaus $q$ siirtyy pisteestä $A$ pisteeseen $B$ sähköstaattisessa kentässä, kenttä tekee työn

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A) \qquad (4.1)$$

Työn ja energian SI-yksikkö on joule (J), joka on sama kuin wattisekunti (Ws). Ylläolevan tarkastelun mukaan työ on myös varaus kertaa sähköinen potentiaali, jonka yksikkö on CV tai elektronivoltti (eV). Koska elektronin varaus on $1.6022 \cdot 10^{-19}$ C, on 1 eV $= 1.6022 \cdot 10^{-19}$ J.

## 4.1 Varausjoukon potentiaalienergia

Varausjoukon sähköstaattisella energialla ymmärretään systeemin potentiaalienergiaa verrattuna tilanteeseen, jossa kaikki varaukset ovat äärettömän kaukana toisistaan. Energia saadaan laskemalla yhteen tarvittava työ, kun kukin varaus tuodaan kerrallaan paikalleen tarkasteltavana olevaan varausjoukkoon. Koska alunperin tarkasteltavassa systeemissä ei ole varauksia, ensimmäinen $q_1$ varaus voidaan asettaa pisteeseen $\mathbf{r}_1$ ilman työtä, $W_1 = 0$. Toisen varauksen $q_2$ tuominen tämän lähelle merkitsee työntekoa voimaa $\mathbf{F} = q_1\mathbf{r}_1/4\pi\epsilon_0|r_1|^3$ vastaan, joten varauksen sijoittamiseksi pisteeseen $\mathbf{r}_2$ on tehtävä työtä

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} \qquad (4.2)$$

Kolmannelle varaukselle

$$W_3 = q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right) \tag{4.3}$$

ja niin edelleen kaikille $N$ kappaleelle varauksia. Koko systeemin sähköstaattinen energia $U$ saadaan yhteenlaskulla

$$U = \sum_{j=1}^{N} W_j = \sum_{j=1}^{N} \left( \sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \tag{4.4}$$

Summaus voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left( {\sum_{k=1}^{N}}' \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \tag{4.5}$$

missä merkintä $\sum'$ merkitsee että termit $j = k$ jätetään pois. Tämä voidaan ilmaista varaukseen $j$ vaikuttavien kaikkien muiden varausten potentiaalin

$$\varphi_j = {\sum_{k=1}^{N}}' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \tag{4.6}$$

avulla:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} q_j \varphi_j \tag{4.7}$$

## 4.2 Varausjakautuman sähköstaattinen energia

Tarkastellaan seuraavassa jatkuvia tilavuus- ja pintavarausjakautumia. Osan varauksista oletetaan olevan johteiden pinnalla ja lisäksi systeemissä saa olla eristeitä, mutta ne on oletettava lineaarisiksi. Syy tähän on, että epälineaarisilla eristeillä varaussysteemin kokoaminen riippuu tiestä, jota pitkin varaukset tuodaan äärettömyydestä tarkastelualueeseen.

Oletetaan, että olemme jo koonneet osan systeemistä. Tällöin uuden varauselementin $\delta q$ tuominen nollapotentiaalista systeemiin vaatii työn

$$\delta W = \varphi'(\mathbf{r}) \delta q \tag{4.8}$$

Kokonaistyö ei riipu tavasta, jolla varaukset tuodaan paikoilleen. Voimme ajatella, että kaikkia varauksia siirretään vuorotellen vähän kerrallaan, ja merkitään kullakin hetkellä osuutta koko matkasta $\alpha$:lla. Mielivaltaisella hetkellä varausjakautumat ovat siis $\alpha\rho(\mathbf{r})$ ja $\alpha\sigma(\mathbf{r})$ ja siirrokset ovat $\delta\rho = \rho(\mathbf{r})d\alpha$ ja $\delta\sigma = \sigma(\mathbf{r})d\alpha$. Lopullinen energia saadaan integroimalla

$$U = \int_0^1 d\alpha \int_V \rho(\mathbf{r})\varphi'(\alpha; \mathbf{r})\, dV + \int_0^1 d\alpha \int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi'(\alpha; \mathbf{r})\, dS \tag{4.9}$$

Kaikki varaukset ovat joka hetki saman suhteellisen etäisyyden päässä lopullisesta sijoituspaikastaan, joten $\varphi'(\alpha; \mathbf{r}) = \alpha\varphi(\mathbf{r})$, missä $\varphi(\mathbf{r})$ on lopullinen potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$. Tämän avulla $\alpha$-integrointi on laskettavissa ja

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, dS \tag{4.10}$$

Tässä tilavuuden $V$ täytyy olla niin suuri, että se pitää sisällään kaikki ongelman varaukset.

Jos koko (tarkasteltava) tila on eristettä, jonka permittiivisyys on $\epsilon$, saadaan potentiaali laskemalla

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\rho(\mathbf{r})'\, dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\sigma(\mathbf{r})'\, dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{4.11}$$

Jos taas systeemissä on useita erilaisia eristeitä, on huomioitava oikeat reunaehdot rajapinnoilla.

Johdekappaleet on käytännöllistä käsitellä erikseen, sillä niiden varaus on kokonaan pinnoilla $S_j$ ja johteen potentiaali on vakio:

$$U = \frac{1}{2}\int_{S_j} \sigma\varphi\, dS = \frac{1}{2}Q_j\varphi_j \tag{4.12}$$

Varausjakautuman sähköstaattinen energia on kaiken kaikkiaan

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\, dS + \frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j \tag{4.13}$$

missä viimeinen termi on summa yli kaikkien johdekappaleiden ja pintaintegraali on rajoitettu eristeiden pintoihin. Energian lausekkeen voi päätellä myös suoraan yleistämällä luvun 4.1 diskreettien varausjakautumien tulokset jatkuville jakautumille.

**Huom.** Koska johdekappaleen pinnalla on suuri määrä varauksia, ei johdekappaleita summattaessa kappaleen omaa osuutta (itseisenergiaa) voida jättää huomiotta, kuten tehtiin yksittäisten varausten tapauksessa edellisessä jaksossa. Pistevarausten itseisenergia voidaan jättää huomiotta makroskooppisissa tarkasteluissa, mutta aikoinaan formuloitaessa kvanttitason elektrodynamiikkaa tästä aiheutui ongelmia.

## 4.3 Sähköstaattisen kentän energia

Edelläoleva tarkastelu edellyttää potentiaalin tuntemista koko systeemissä. Usein tunnetaan kuitenkin tavalla tai toisella itse sähkökenttä ja halutaan määrittää sen sähköstaattinen energia.

Varaustiheydet voidaan ilmaista sähkövuon tiheyden avulla seuraavasti. Eristeissä $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ ja johteiden pinnalla $\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$. Tällöin

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{4.14}$$

Tilavuusintegraali lasketaan alueessa, jossa $\nabla \cdot \mathbf{D} \neq 0$ ja pintaintegraali on johteiden pintojen yli. Muotoillaan tilavuusintegraalin integrandia kirjoittamalla $\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi$. Tässä oikean puolen jälkimmäinen termi on $+\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ ja ensimmäisen termin tilavuusintegraali voidaan muuttaa Gaussin lauseen avulla pintaintegraaliksi, jolloin saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{4.15}$$

Tässä pinta $S + S'$ on koko tilavuutta $V$ rajoittava pinta, joka muodostuu johteiden pinnoista $S$ ja tilavuuden $V$ ulkopinnasta $S'$. Molemmissa tapauksissa $\mathbf{n}'$ osoittaa ulospäin tilavuudesta $V$. Viimeisen integraalin $\mathbf{n}$ puolestaan osoittaa johdekappaleista ulospäin eli tilavuuden $V$ sisään. Näinollen integraalit johdekappaleiden yli kumoavat toisensa.

Osoitetaan vielä, että pinnan $S'$ yli otettava integraali häviää, kun pinta viedään kauas varausjakautumasta. Kaukana $\varphi \propto 1/r$ ja $D(\mathbf{r}) \propto 1/r^2$. Olkoon nyt $S''$ pinnan $S'$ sisäänsä sulkeva $R$-säteinen pallo. Tällöin on olemassa äärellinen suure $M$, jolle

$$\left| \int_{S'} \frac{1}{2} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, dS \right| \leq \int_{S''} \frac{M}{r^3} \, dS = \frac{4\pi R^2 M}{R^3} \propto \frac{1}{R} \to 0 \tag{4.16}$$

kun $R \to \infty$. Niinpä energiaksi jää

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dV \tag{4.17}$$

Tässä $V$ on koko avaruus sisältäen myös johdekappaleet, joiden sisällä $\mathbf{E} = 0$. Lausekkeen integrandi on **sähköstaattinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \tag{4.18}$$

Koska on oletettu lineaarinen väliaine, tämä voidaan kirjoittaa

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \tag{4.19}$$

**Huom.** Sovellettaessa tätä formalismia systeemiin, jossa on pistevarauksia, niiden ääretön itseisenergia on vähennettävä eksplisiittisesti.

Toinen tapa johtaa tulos (4.18) on esitetty yksityiskohdittain CL:n jaksossa 5.2. Siinä lähdetään liikkeelle varausjakautumasta $\rho(\mathbf{r})$ ja oletetaan siihen pieni häiriö $\delta\rho$. Häiriöön liittyy työ

$$\delta U = \int_V \delta\rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dV \tag{4.20}$$

ja siirtymäkenttä $\delta\mathbf{D}$, jolle $\nabla\cdot(\delta\mathbf{D}) = \delta\rho$, joten osittaisintegroimalla lauseketta (4.20) saadaan

$$\delta U = \int_V (\nabla\cdot\delta\mathbf{D})\varphi\, dV = \int_V \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\, dV \tag{4.21}$$

Nyt voidaan kirjoittaa muodollisesti

$$U = \int_V dV \int_0^D \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} \tag{4.22}$$

missä integrointi $\mathbf{D}$:n suhteen riippuu integroimistiestä. Yksinkertaiselle väliaineelle

$$\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) \tag{4.23}$$

$\Rightarrow$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dV \tag{4.24}$$

Tässä johdossa on oletettu, että tarkasteltava systeemi on mekaanisesti jäykkä, mikä viittaa siihen, että yksinkertaisellekin väliaineella energiatiheyden lauseke (4.18) on vain approksimaatio. Epälineaarisille väliaineille energia on laskettava suoraan lausekkeesta (4.22). Tämä liittyy hystereesi-ilmiöön, johon tutustutaan lähemmin luvussa 10.

## 4.4 Sähkökentän voimavaikutukset

Sähkökenttä määriteltiin alunperin operatiivisesti sen voimavaikutuksen kautta. Toisaalta olemme oppineet määrittämään varaussysteemin sähköstaattisen energian. Tarkastellaan nyt, kuinka tästä energiasta voidaan johtaa sähkökentän voimavaikutus. Oletetaan systeemi eristetyksi ja kaikki sen energia sähköstaattiseksi energiaksi. Voiman $\mathbf{F}$ tekemä työ systeemin pienessä siirroksessa $d\mathbf{r}$ on

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{4.25}$$

Koska systeemi on eristetty, tämä työ on tehtävä sähköstaattisen energian $U$ kustannuksella

$$dW = -dU \tag{4.26}$$

Näistä seuraa, että voima on energian gradientin vastaluku

$$\mathbf{F} = -\nabla U \tag{4.27}$$

Jos voima puolestaan kiertää systeemiä kulman $d\boldsymbol{\theta}$ verran (vrt. väkipyörä), tehty työ on

$$dW = \boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{\theta} \tag{4.28}$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on vääntömomentti, joka saadaan siis energian negatiivisena gradienttina kiertymäkulman suhteen

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big|_Q \tag{4.29}$$

Koska systeemi on eristetty, gradientit lasketaan olettaen varaus $Q$ vakioksi.

Käytännössä mielenkiintoiset sähköstaattiset systeemit eivät useinkaan ole eristettyjä, vaan muodostuvat esimerkiksi johdekappaleista, jotka pidetään kiinteässä potentiaalissa ulkoisen energialähteen avulla. Siirtyköön osa systeemistä jälleen sähköisten voimien vaikutuksesta. Nyt

$$dW = dW_b - dU \tag{4.30}$$

missä $dW_b$ on paristosta peräisin oleva työ. Johdekappaleiden energia on $U = (1/2)\sum \varphi_j Q_j$. Koska ulkoinen paristo pitää johdekappaleet samassa potentiaalissa saadaan

$$dU = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j dQ_j \tag{4.31}$$

Toisaalta paristosta saatava työ on yhtä suuri kuin työ, joka tarvitaan siirtämään varauksen muutos $dQ_j$ nollapotentiaalista johdekappaleen potentiaaliin

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j \tag{4.32}$$

joten

$$dW_b = 2dU \tag{4.33}$$

eli nyt voima on

$$\mathbf{F} = (\nabla U)_\varphi \tag{4.34}$$

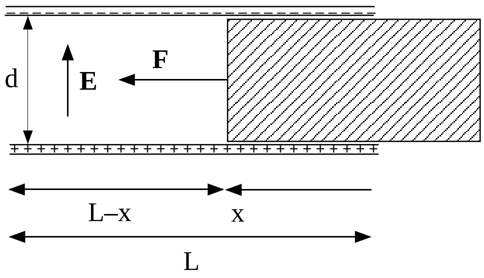
missä alaindeksi $\varphi$ viittaa siihen, että ulkoinen energialähde pitää johdekappaleiden potentiaalit vakioina siirroksen $d\mathbf{r}$ ajan.

**Esim. Levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin vaikuttava voima**

Olkoon kondensaattorin levyjen sisällä koko kondensaattorin täyttävä eristepalkki (kuva 4.1), jonka permittiivisyys on $\epsilon$. Kondensaattorin levyjen etäisyys on $d$, niiden pituus $L$ ja leveys $w$. Ulkoinen virtalähde pitää kondensaattorin jännitteen vakiona $\triangle\varphi$. Lasketaan, kuinka suuri voima yrittää vetää palkkia kondensaattoriin.

Kondensaattorissa on sekä ilmassa että eristeessä sama sähkökenttä $E = \triangle\varphi/d$ (HT: miksi?), joten sen energiasisältö on

$$U = \frac{1}{2}\int_V \epsilon E^2\, dV \tag{4.35}$$




Kuva 4.1: Eristepalkki levykondensaattorin sisällä.

jättämällä kondensaattorin reunaefektit huomiotta. Systeemin energia kuvan tilanteessa on

$$U(x) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\triangle\varphi}{d}\right)^2 wxd + \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\triangle\varphi}{d}\right)^2 w(L-x)d \tag{4.36}$$

Voima

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2}\, w\, \frac{(\triangle\varphi)^2}{d} = \frac{K-1}{2}\,\epsilon_0 E^2 wd \tag{4.37}$$

osoittaa kasvavan $x$:n suuntaan vastustaen ulosvetämistä (HT: miten tämän voi selittää eristepalkkiin indusoituvien varausten avulla?).

Mainitaan lopuksi, että sähkökentän voimavaikutukset voidaan laskea tyylikkäästi Maxwellin jännitystensorin avulla. Siihen perehdytään luvussa 9.