

Luku 5

Staattinen magneettikenttä

Tässä luvussa tutustutaan tasavirtoihin ja niiden aiheuttamiin magneettikenttiin (RMC luvut 7 ja 8, CL luku 6; esitiedot KSII luvut 5 ja 6).

5.1 Sähkövirta

Nykyaikana sähkövirta lienee tutumpi ilmiö kuin sähkövaraus. Todellisuudessa sähkövarauksia ja -virtoja ei oikeastaan voi käsitellä erikseen. Edellisissä luvuissakin sähkövirta on ollut implisiittisesti esillä monta kertaa. Kun varaukset järjestäytyvät johdekappaleen pinnalle, systeemissä kulkee virtaa ja kuinkapa muuten kuin sähkövirran avulla paristo pystyy pitämään edellisen luvun viimeisessä esimerkissä kondensaattorin jännitteen vakiona. Samoin termit ”johde” ja ”eriste” viittaavat kappaleiden kykyyn kuljettaa sähkövirtaa.

Tarkastellaan joukkoa varattuja hiukkasia, joiden varaus on q , lukumäärätiheys on n ja nopeus \mathbf{v} . Sähkövirta I määritellään annetun pinnan läpi aikayksikössä kulkevan varauksen määränä

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

Olkoon dS jokin pintaelementti. Sen läpi kulkeva virta on

$$dI = \frac{nq\mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n} dS}{dt} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2)$$

missä \mathbf{J} on virrantiheys.

Sähkövirran SI-yksikkö on ampeeri $A = C/s$. Virrantiheys on virta pinta-alan läpi, joten sen yksikkö on A/m^2 . SI-yksiköissä sähkövirran yksikkö otetaan perussuureksi ja kaikki muut sähköiset yksiköt voidaan ilmaista ampeerin, metrin, kilogramman ja sekunnin avulla.

Virrantiheys on samankaltainen vuosuure kuin sähkövuon tiheys \mathbf{D} tai pian määriteltävä magneettivuon tiheys \mathbf{B} . Fysikaalinen vuo tarkasteltavan pinnan läpi saadaan integroimalla vuon tiheys pinnan yli.

5.1.1 Jatkuvuusyhtälö

Virrantiheys ja sähkövaraus liittyvät läheisesti toisiinsa. Tarkastellaan suljetun pinnan S läpi alueeseen V **tulevaa** virtaa (\mathbf{n} osoittaa ulospäin)

$$I = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV \quad (5.3)$$

Tämän täytyy olla yhtä suuri kuin varausten tilavuuteen V tuoma sähkövirta

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (5.4)$$

Oletetaan tilavuus kiinteäksi, jolloin aikaderivaatta voidaan viedä integraalin sisään. Koska ρ on sekä ajan että paikan funktio, kokonaisderivaatta muuttuu osittaisderivaataksi

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (5.5)$$

joten

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dV = 0 \quad (5.6)$$

Koska tämän täytyy olla voimassa kaikilla tilavuuksilla, saamme virralle **jatkuvuusyhtälön**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.7)$$

Mikäli varaustiheys on ajasta riippumaton eli $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, sähkövirralla ei ole lähteitä tai nieluja ja siten kaikki virtaviivat sulkeutuvat. Tällaista virtausta kutsutaan **stationaariseksi**.

Huom. Jatkuvuusyhtälö on suora seuraus kokonaisvarauksen säilymislaista eikä edellytä kiinteän tilavuuden tarkastelua (yleisempi johto: CL 6.1).

5.1.2 Ohmin laki

On kokeellinen tosiasia, että vakioämpötilassa olevissa metalleissa sähkövirta riippuu **lineaarisesti** sähkökentästä

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.8)$$

Tätä yhtälöä kutsutaan **Ohmin laiksi** ja verrannollisuuskerrointa σ **johdavuudeksi**.

Huom. Käytämme sähkönjohtavuudelle yleisen tavan mukaan samaa symbolia kuin aiemmin pintavaraukselle. RMC välttää tämän merkitsemällä johtavuutta g :llä ja KSII puolestaan γ :lla. σ on kuitenkin kirjallisuudessa yleisin merkintä ja jos joudumme jossain kirjoittamaan molemmat suuret, eroteltakoon ne siellä vaikkapa kirjoittamalla pintavaraukselle σ_S . Jälleen on tärkeää oppia lukemaan yhtälöiden takana olevaa fysiikkaa eikä niinkään opetella kaavoja ulkoa!

Lineaarinen Ohmin laki on voimassa tavallisille aineille, ellei sähkökenttä ole kovin suuri. Se ei kuitenkaan ole samanlainen fysiikan peruslaki kuin Maxwellin yhtälöt, vaan samantapainen rakenneyhtälö kuin $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, jonka yksityiskohtainen muoto ja jopa olemassaolo riippuvat väliaineen ominaisuuksista. On myös olemassa epälineaarisia väliaineita, missä σ on sähkökentän ja mahdollisesti myös magneettikentän funktio. Jos sähkökenttä on riittävän suuri, niin väliaine kuin väliaine alkaa käyttäytyä epälineaarisesti.

Johtavuuden käänteislukua $\eta = 1/\sigma$ kutsutaan **ominaisvastukseksi** eli resistiivisyydeksi. Myös sen merkintä vaihtelee kirjallisuudessa. Nyt on tärkeää oppia tekemään ero ”ominaisvastuksen” (engl. resistivity) ja ”vastuksen” (resistance) välillä. Johtavuuden SI-yksikkö on $[\sigma] = (\text{A}/\text{m}^2)/(\text{V}/\text{m}) = \text{A}/(\text{Vm})$, joten ominaisvastuksen yksiköksi tulee Vm/A . Toisaalta V/A on tuttu vastuksen yksikkö ohmi (Ω), joten ominaisvastuksen yksikkö on Ωm ja johtavuuden $\Omega^{-1}\text{m}^{-1} = \text{S}/\text{m}$, missä on otettu käyttöön yksikkö siemens. Siemensin sijasta ohmin käänteislukuna esiintyy kirjallisuudessa usein mho. Taulukossa 5.1 on annettu joidenkin hyvien johteiden resistiivisyyksiä.

Tarkastellaan sähkövirran ja jännitteen välistä relaatiota ohuessa homogeenisessa suorassa virtajohdossa, jonka päiden välillä on jännite $\Delta\varphi$ ja jonka johtavuus on σ . Johteessa on sähkökenttä, joka saadaan integraalista

$$\Delta\varphi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.9)$$

Sähkökentällä ei voi olla komponenttia kohtisuorassa johtoa vastaan, koska tämä aiheuttaisi jatkuvan sähkövirran joko johtoon tai siitä pois ja johdon pinnan varautumisen. Koska systeemi on homogeeninen ja suora, sähkökenttä on sama koko johdossa, joten

$$\Delta\varphi = El \quad (5.10)$$

missä l on johdon pituus. Ohmin lain mukaan johdossa kulkee virta, joka mielivaltaisen poikkileikkauspinta-alan A läpi on

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = JA = \frac{\sigma A}{l} \Delta\varphi \quad (5.11)$$

ja olemme löytäneet sähkövirran ja jännitteen välisen Ohmin lain. Verrannollisuuskerroin on vastus (resistanssi) $R = l/(\sigma A)$, jonka SI-yksikkö on siis ohmi.

Taulukko 5.1: Aineiden resistiivisyyksiä. Johtavuus on resistiivisyyden käänteisluku. Vertailun vuoksi mainittakoon, että taulukossa 3.1 lueteltujen eristeiden resistiivisyydet ovat tyypillisesti suurempia kuin $10^8 \Omega m$. Vesi on poikkeus, sillä sen resistiivisyys on noin $5000 \Omega m$, joten sitä voidaan pitää myös johteena.

aine	resistiivisyys $10^{-8} \Omega m$
alumiini	2.65
grafiitti	1375
hopea	1.59
konstantaani	50
kulta	2.35
kupari	1.67
nikkeli	6.84
rauta	9.71
sinkki	5.92
volframi	5.68

Tämän avulla voimme johtaa koulufysiikasta tuttuja relaatioita, kuten työn, jonka sähkökenttä tekee siirtäessään varauksen Q potentiaalieron U läpi: $W = QU$ ja sitä vastaavan tehon $P = UI = RI^2 = U^2/R$. Tämän tehon sanotaan häviävän materiaalin **Joulen lämmityksenä**.

5.1.3 Stationaariset virtaukset

Ohmin laki on siis rakenneyhtälö kuten \mathbf{E} :n ja \mathbf{D} :n välinen relaatio. Analogia menee pidemmällekin. Stationaarisen virtauksen jatkuvuusyhtälö $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ on samaa muotoa kuin $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, mikä yksinkertaisen väliaineen tapauksessa on muotoa $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Niinpä stationaarisen sähkövirran virtaviivat voidaan ratkaista ratkaisemalla Laplace'n yhtälö samoilla menetelmällä kuin edellisissä luvuissa. Ensin on etsittävä sopivat reunaehdot virrantiheydelle. Tarkastellaan esimerkkinä johdetta, jossa on pitkä sylinterinmuotoinen reikä. Sähkövirran on epäilemättä kierrettävä tämä este jotenkin.

Merkitään sylinteriä (sisäalue) alaindeksillä i ja johdetta (ulkoalue) alaindeksillä u . Koska $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ reunaehdoksi saadaan $J_{un} = J_{in}$ eli

$$\sigma_u E_{un} = \sigma_i E_{in} \quad (5.12)$$

\Rightarrow

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \sigma_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial r} \quad (5.13)$$

synterinin pinnalla $r = a$. Toisaalta potentiaali on jatkuva, joten

$$\varphi_u(a, \theta) = \varphi_i(a, \theta) \quad (5.14)$$

Kaukana sylinteristä virta on häiriintymätön, joten

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta \quad \text{kun } r \rightarrow \infty \quad (5.15)$$

Tehdään ratkaisuyritteet (vrt. luku 2.9.3)

$$\varphi_i = A_{i1} r \cos \theta \quad (5.16)$$

$$\varphi_u = -E_0 r \cos \theta + B_{u1} \frac{\cos \theta}{r} \quad (5.17)$$

Yritteessä ei ole $\sin \theta$ -termejä symmetrian $\varphi(\theta) = -\varphi(\pi - \theta)$ vuoksi (HT: mistä tällainen symmetria tulee?). Nyt reunaehdot antavat

$$A_{i1} a \cos \theta = -E_0 a \cos \theta + B_{u1} \frac{\cos \theta}{a} \quad (5.18)$$

$$\sigma_i A_{i1} \cos \theta = \sigma_u \left(-E_0 \cos \theta - \frac{B_{u1} \cos \theta}{a^2} \right) \quad (5.19)$$

Saadaan kertoimet A_{i1} ja B_{u1}

$$A_{i1} = \frac{-2\sigma_u E_0}{\sigma_i + \sigma_u} \quad (5.20)$$

$$B_{u1} = \frac{\sigma_i - \sigma_u}{\sigma_i + \sigma_u} E_0 a^2 \quad (5.21)$$

ja ongelma on ratkaistu.

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa reikä on niin hyvä eriste, että kaikki virta kiertää sen. Tällöin $\sigma_i \rightarrow 0$. Sijoittamalla tämä potentiaalilausekkeeseen, laskemalla sähkökenttä ja käyttämällä Ohmin lakia saadaan virran lauseke

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 - \frac{J_0 a^2}{r^2} (\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (5.22)$$

Sähkövirran virtaviivat kiertävät esteen siististi. Ongelma on analoginen kokoonpuristumattomassa nestevirtauksessa ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) olevan sylinterinmuotoisen virtausesteen kanssa. Laplace'n yhtälön ratkomisen on varsin yleispätevä menetelmä fysiikassa (Feynman lectures, osa 2, luku 12-1: "The same equations have the same solutions").

5.2 Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki

Magnetismin olemassaolo on tunnettu kauan, mutta sen yhteys sähköön löytyi vasta vuonna 1820, kun *Ørsted* havaitsi, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän. Magneettikentän fysikaalinen määrittely tehdään voimavaikutuksen kautta samaan tapaan kuin sähkökentän määrittely.

Pian *Ørstedin* kerrottua havainnoistaan, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän, *Ampère* julkaisi mittaustuloksensa, joiden mukaan kahden virtasilmukan, joissa kulkee virrat I_1 ja I_2 , välillä vaikuttaa voima, joka nykymerkinnöillä on

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.23)$$

Tämä on siis virtasilmukkaan 2 vaikuttava voima (vrt. Coulombin laki). Koska SI-yksiköissä **määritellään** $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$, tämän voiman mittausta varsinaisesti määrittelee ampeerin, josta saadaan coulombi ja muut sähköopin SI-yksiköt.

Voiman lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \quad (5.24)$$

missä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.25)$$

on silmukan C_1 synnyttämä magneettikenttä (oikeammin magneettivuon tiheys) pisteessä \mathbf{r}_2 , joka on silmukassa C_2 . Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi** tai myös Ampèren ja Laplacen laiksi (kunnia kuulunee kaikille). Se voidaan yleistää virtasilmukoista väliaineessa olevalle virrantiheydelle korvaamalla $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} dV$ ja korvaamalla lenkki-integraali tilavuus-integraalilla. Integrandi on tietenkin nolasta poikkeava vain siinä alueessa missä $\mathbf{J} \neq 0$. Siis

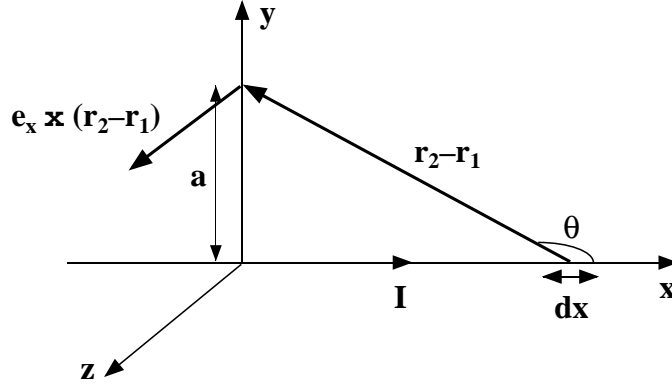
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 \quad (5.26)$$

Näin voimme laskea magneettikentän mielivaltaisesta virtajakautumasta samaan tapaan kuin staattisen sähkökentän annetusta varausjakautumasta.

Kokeellinen tosiasia on, että kaikki magneettikentät voidaan antaa virtajakautumien avulla. Nyt nähdään suoraviivaisella laskulla (HT), että

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.27)$$

joka on Coulombin lain jälkeen toinen laki Maxwellin yhtälöiden joukossa ja ilmaisee, että ei ole olemassa erillisiä kentän \mathbf{B} lähteitä tai nieluja eli



Kuva 5.1: Suoran virtajohtimen aiheuttaman magneettikentän laskeminen.

magneettisia napoja (magneettisia monopoleja). Tämä merkitsee myös sitä, että magneettikentän kenttäviivoilla ei ole alku- eikä loppupäätä vaan kaikki kenttäviivat sulkeutuvat.

On syytä korostaa, että magneettikentän lähteettömyys on puhtaasti kokeellinen laki eikä sille ole mitään teoreettista tai matemaattista välttämättömyyttä. Itseasiassa modernit sähköistä, heikkoa ja vahvaa vuorovaikutusta yhdistävät yhtenäiskenttäteoriat mahdollistavat magneettisten monopolioiden olemassaolon. Ne voidaan periaatteessa ottaa mukaan klassiseenkin elektrodynamiikkaan kirjoittamalla $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$, missä ρ_m on magneettinen varausitiheys, mutta tähän ei ole mitään syytä, koska emme havaitse monopolioiden vaikutuksia klassisen elektrodynamiikan puitteissa.

Pitkän suoran virtajohtimen aiheuttama kenttä

Olkoon johdin x -akselilla ja lasketaan magneettikenttä pisteessä \mathbf{r}_2 y -akselilla.

Käytetään seuraavia merkintöjä $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i}$; $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i}$; $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{j}$. Tällöin $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = a dx \mathbf{k}$. Biot'n ja Savartin lain suoraviivainen käyttö antaa

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left|_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Jos virtajohde on äärellisen mittainen, magneettikenttä on oheisessa kuvassa määritellyn kulman θ funktio

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} \left|_{-L_1}^{L_2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} \left|_{\theta_1}^{\theta_2} (-\cos \theta) \quad (5.29)$$

Huom. Tässä laskussa käytettiin karteesisista koordinaatistoa, missä suunnan \mathbf{k} määrää tarkastelupisteen paikka. Peruskurssilta tiedämme, että magneettikenttä kiertää suoran virtajohteen ympäri oikean käden kiertosäännön mukaisesti. Käyttämällä sylinterikoordinaatistoa, missä positiivinen z -akseli on virran suuntainen ja \mathbf{e}_θ on atsimutaalikoordinaatin yksikkövektori (siis eri kulma kuin ylläolevassa kuvassa), magneettikenttä on

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{e}_\theta \quad (5.30)$$

Ympyränmuotoisen virtasilmukan kenttä ympyrän keskipisteen läpi kulkevalla akselilla

Tämäkin esimerkki lienee tuttu peruskurssilta. Olkoon ympyrän säde a ja tarkastellaan kenttää ympyrän tasoa vastaan kohtisuorassa olevalla keskipisteen kautta kulkevalla z -akselilla. Olkoon \mathbf{k} -vektorin suunta virtaan nähden oikean käden säännön mukainen. Biot'n ja Savartin lain suora soveltaminen antaa kentäksi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Jos ympyröitä on useampia, kuten kelassa, on jokaisen ympyrän osuus summattava.

Helmholtzin kela

Helmholtzin kela muodostuu kahdesta N -kertaisesta silmukasta, joiden keskipisteet ovat samalla z -akselilla. Olkoot kelojen säteet a ja etäisyys $2b$. Tällöin kenttä z -akselilla kelojen välissä etäisyydellä z toisesta kelasta on

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \quad (5.32)$$

Helmholtzin keloja käytetään tuottamaan suhteellisen homogeeninen magneettikenttä rajoitettuun alueeseen. Tarkastellaan magneettikentän derivaattaa z -akselilla. Kun $z = b$, $dB_z/dz = 0$. Myös toinen derivaatta on nolla tässä pisteessä, jos $2b = a$. Asettamalla siis kelat niiden säteen etäisyydelle toisistaan, on kenttä pisteen $z = a/2$ ympäristössä mahdollisimman homogeeninen. Itse asiassa kolmaskin derivaatta häviää ja kentän epähomogeenisuus

ilmenee vasta Taylorin sarjan neljännessä termissä

$$\begin{aligned} B_z(z) &= B_z(a/2) + \frac{(z - a/2)^4}{24} \left. \frac{d^4 B_z}{dz^4} \right|_{z=a/2} + \dots \\ &\approx B_z(a/2) \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - a/2}{a} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3 Ampèren laki

Tarkastellaan stationaarista virtaa, siis $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Lasketaan magneettikentän roottori lähtien Biot'n ja Savartin laista

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \nabla_2 \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 \right\} \quad (5.34)$$

Alaindeksi 2 viittaa siihen, että vietäessä roottori integraalin sisään, se otetaan paikan \mathbf{r}_2 suhteen. Kirjoittamalla ristitulot auki saadaan

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \left(\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] dV_1 \quad (5.35)$$

Muistetaan kaava

$$\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = 4\pi\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (5.36)$$

jonka avulla integraalin ensimmäinen termi antaa $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2)$.

Jälkimmäisessä termissä voidaan $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$:n antisymmetrisyyden vuoksi vaihtaa derivointi tapahtuvaksi \mathbf{r}_1 :n suhteen vaihtamalla merkki. Koska jälkimmäinen termi sisältää ∇ :n ja $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ välisen dyaditulon, käsitellään se $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$:n komponentti kerrallaan. Manipuloidaan x -komponenttia kaavalla

$$\mathbf{J} \cdot \nabla_1 \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) - \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \nabla_1 \cdot \mathbf{J} \quad (5.37)$$

Nyt oikean puolen jälkimmäinen termi on nolla oletuksen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ perusteella. Jäljellä oleva tilavuusintegraali voidaan muuttaa pintaintegraaliksi

$$\int_V \nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) dV_1 = \oint_S \mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.38)$$

Tämän on oltava voimassa pinnan valinnasta riippumatta, joten pinta voidaan siirtää virtajakautuman ulkopuolelle eli integraalin on oltava nolla. Sama pätee kaikille komponenteille, joten jäljelle on jäänyt **Ampèren laki** differentiaali muodossa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.39)$$

Integraalimuotoon Ampèren laki saadaan käyttämällä Stokesin lausetta muodossa

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.40)$$

joten

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \mu_0 I \quad (5.41)$$

Siis suljettua lenkkiä pitkin integroitu magneettivuon tiheys on μ_0 kertaa lenkin läpi kulkeva kokonaisvirta. Tätä tulosta kutsutaan **Ampèren kiertosäännöksi**. Sen avulla voi laskea suoraan magneettikentän sellaisissa edellä käsitellyissä symmetrisissä tapauksissa kuin suora virtajohdin tai ympyränmuotoinen silmukka. Integraaleissa on muistettava, että pinnan S normaalivektori \mathbf{n} määrittelee oikeakätisesti käyräalkion $d\mathbf{l}$.

Kenttä toridaalisen solenoidin sisällä

Tarkastellaan toruksen ympärille kierrettyä solenoidia (N kierrosta). Toruksen sisällä kenttä on symmetriasyistä $\mathbf{B} = B(\rho)\mathbf{e}_\phi$, missä ϕ on toruksen keskipistettä kiertävä kulma ja ρ etäisyys toruksen keskipisteestä toruksen sisällä olevaan pisteeseen. Sovelletaan Ampèren kiertosääntöä pitkin ρ -säteistä ympyrää toruksen sisällä

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(\rho)2\pi\rho = \mu_0 NI \quad (5.42)$$

\Rightarrow

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi \quad (5.43)$$

5.4 Lorentzin voima

Siirrytään nyt tarkastelemaan varauksellisten hiukkasten välisiä magneettisia vuorovaikutuksia. Palautetaan mieleen origossa olevan varauksen q_1 pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukseen q aiheuttama Coulombin voima

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.44)$$

Tässä molemmat varaukset ovat levossa. Jos varaukset liikkuvat vakionopeuksilla \mathbf{v} ja \mathbf{v}_1 , aiheuttaa varaus q_1 varaukseen q **magneettisen voiman**

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.45)$$

Tämän voi päätellä soveltamalla kahden virtasilmukan välistä magneettista voimaa 5.23 infinitesimaalisille virta-alkioille. Laki on luonnollisesti myös kokeellisesti todennettavissa.

Magneettinen voima voidaan myös lausua muodossa (vrt. virtasilmukat)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.46)$$

missä \mathbf{B} on magneettivuon tiheys

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.47)$$

Samoin kuin sähkökentän myös magneettikentän tapauksessa useiden liikkuvien varausten kentät ovat additiivisia.

Yhteenlaskettua sähköistä ja magneettista voimaa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.48)$$

kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. On tärkeää huomata, että magneettinen voima on aina kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan. Siten $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$, mikä merkitsee, että magneettinen voima ei tee työtä varattuun hiukkaseen. Jos siis haluamme kiihdyttää varauksia, tarvitsemme aina viime kädessä sähkökentän, vaikka se luotaisiinkin muuttuvan magneettikentän avulla.

Magneettivuon tiheyden SI-yksikkö on tesla ($T = \text{Ns}/\text{Cm} = \text{N}/\text{Am}$) ja magneettivuon yksikkö weber ($\text{Wb} = \text{Tm}^2$). Koska esimerkiksi maapallon magneettikenttä maan pinnalla vaihtelee välillä 30000–60000 nT, on tesla useissa sovellutuksissa varsin suuri yksikkö.

Vertaamalla sähköisen ja magneettisen voiman määritelmiä huomataan, että tulon $\epsilon_0\mu_0$ dimension täytyy olla sama kuin nopeuden neliön käänteisluvulla. Kirjoittamalla $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ saadaan c :n lukuarvoksi valonnopeus. Niinpä voimme kirjoittaa magneettisen voiman lausekkeen muodossa

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.49)$$

Nyt voimme verrata magneettista ja sähköistä voimaa toisiinsa

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v v_1}{c c} \quad (5.50)$$

Siis tavallisilla nopeuksilla liikkuville varauksille sähköiset voimat ovat paljon voimakkaampia kuin magneettiset voimat. Magneettiset voimat eivät kuitenkaan ole merkityksellisiä, sillä vaikka aine on yleensä sähköisesti neutraalia, se saattaa olla voimakkaasti magnetoitunutta.

5.5 Virtasilmukan magneettimomentti

Tarkastellaan virtajohdinta, joka muodostaa suljetun silmukan C . Tällöin koko silmukkaan vaikuttaa voima 5.24

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (5.51)$$

Kokonaisvirta ei riipu paikasta, joten se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, samoin magneettikenttä, mikäli se on vakio

$$\mathbf{F} = -I \mathbf{B} \times \oint_C d\mathbf{l} = 0 \quad (5.52)$$

Siis **vakio**magneettikentässä virtasilmukkaan vaikuttava voima on nolla.

Tarkastellaan sitten silmukka-alkioon vaikuttavaa vääntömomenttia

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.53)$$

joten koko silmukkaan vaikuttava vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (5.54)$$

Oletetaan jälleen, että magneettikenttä on vakio. Kirjoitetaan ristitulo auki kaavalla $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})\mathbf{B}$. Tällöin

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - I\mathbf{B} \oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.55)$$

Jälkimmäinen integraali muuntuu Stokesin lauseella muotoon $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. Ensimmäinen integraali muuntuu puolestaan yleistetyllä Stokesin lauseella muotoon

$$\oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \quad (5.56)$$

Koska \mathbf{B} on vakio, niin (HT)

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \quad (5.57)$$

joten

$$\boldsymbol{\tau} = I \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = I \left(\int_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (5.58)$$

missä pinta-alavektori \mathbf{S} voidaan kirjoittaa yleistetyn Stokesin lauseen avulla

$$\mathbf{S} = \int_S \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (5.59)$$

Tuloa $I\mathbf{S}$ kutsutaan silmukan C **magneettimomentiksi**

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (5.60)$$

Tämän avulla vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (5.61)$$

Siis vaikka silmukkaan ei kohdistukaan voimaa, joka kiihdyttäisi silmukkaa kokonaisuutena, siihen kohdistuu vääntömomentti, joka pyrkii kääntämään silmukan pintaa kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä käytetään hyväksi esimerkiksi avaruusalusten asennonsäätöjärjestelmissä.

5.6 Magneettikentän potentiaaliesitys

5.6.1 Vektoripotentiaali

Koska magneettikenttä on lähteetön, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se voidaan ilmaista vektorikentän roottorina

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.62)$$

Vektoripotentiaali \mathbf{A} ei ole yksikäsitteinen, sillä olipa f mikä riittävän siisti skalaarikenttä hyvänsä $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$.

Vektoripotentiaali voidaan ilmaista virran avulla lähtemällä jälleen Biot'n ja Savartin laista

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1 \quad (5.63)$$

Koska

$$\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (5.64)$$

voidaan integrandi kirjoittaa muotoon

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (5.65)$$

Sovelletaan tähän kaavaa $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla f$. Nyt $\nabla_2 \times \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) = 0$, koska ∇_2 ei operoi \mathbf{r}_1 :een, joten integrandiksi tulee

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \nabla_2 \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) \quad (5.66)$$

∇_2 voidaan siirtää \mathbf{r}_1 :n suhteen laskettavan integraalin ulkopuolelle, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \nabla_2 \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \right\} \quad (5.67)$$

eli

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \quad (5.68)$$

Kirjoittamalla \mathbf{A} komponenttimuodossa

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \quad (5.69)$$

nähdään, että komponentit A_i ovat matemaattisesti samaa muotoa kuin sähköstaattisen potentiaalin lauseke

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV_1 \quad (5.70)$$

joten jokaiselle komponentille erikseen ja siten koko vektorille on voimassa Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.71)$$

Koska toisaalta

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (5.72)$$

vektoripotentialin on toteutettava ehto

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (5.73)$$

Usein vektoripotentialiaali valitaan siten, että $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, mikä itse asiassa oletettiin edellä implisiittisesti (Luku 9).

Sähköstaattikassa skalaaripotentialiaali helpottaa laskuja olennaisesti. Vektoripotentialiaali on monimutkaisempi suure, mutta silti käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Vektoripotentialiaali on myös hyödyllinen sähkömagneettisiin aaltoihin ja säteilyyn liittyvissä ongelmissa ja keskeinen apuväline elektrodynamiikan teoriassa, relativistisissa tarkasteluissa ja kvanttielektrodynamiikassa.

5.6.2 Magneettikenttä kaukana virtasilmutuksesta

Mikäli virta on kulkee virtasilmutuksessa, voidaan palata luvun alussa olleeseen esitykseen $\mathbf{J} dV \rightarrow I d\mathbf{r}$ ja vektoripotentialin lausekkeeksi tulee

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (5.74)$$

Tarkastellaan tilannetta kaukana silmutuksesta ja kehitetään nimittäjä sarjaksi

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r_2^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^{-1/2} = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \dots \right] \quad (5.75)$$

joten

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_2} \oint d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r_2^3} \oint d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \dots \right\} \quad (5.76)$$

Ensimmäinen integraali on nolla. Jälkimmäinen integrandi on osa lausekkeesta

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \quad (5.77)$$

Toisaalta lausekkeen $\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$ differentiaali \mathbf{r}_1 :n pienen muutoksen suhteen on

$$d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \quad (5.78)$$

Summaamalla nämä ja jakamalla kahdella saadaan

$$d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] \quad (5.79)$$

Koska tämän jälkimmäinen termi on kokonaisdifferentiaali, se ei tuota mitään suljettuun lenkki-integraaliin, joten jäljelle jää

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 \right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (5.80)$$

Hakasuluissa oleva lauseke on tuttu silmukan magneettinen momentti \mathbf{m} , jonka avulla lausuttuna vektoripotentiaali on

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (5.81)$$

Koska laskussa on oletettu $r_1 \ll r_2$, on koordinaatiston origo sijoitettava lähelle silmukkaa.

Magneettikenttä saadaan ottamalla vektoripotentiaalin roottori (HT)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5} - \frac{\mathbf{m}}{r_2^3} \right] \end{aligned} \quad (5.82)$$

Ainoastaan etäällä olevan silmukan magneettinen momentti vaikuttaa magneettikenttään. Tämä on muodoltaan samanlainen kuin sähköisen dipolin aiheuttama sähkökenttä 2.40. Tämän vuoksi magneettista momenttia kutsutaan usein **magneettiseksi dipolimomentiksi**.

5.6.3 Magneettikentän skalaaripotentiaali

Alueissa, joissa $\mathbf{J} = 0$, magneettikenttä on pyörteetön $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, joten näissä alueissa magneettikenttä voidaan ilmaista **magneettisen skalaaripotentiaalin** ψ avulla

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi \quad (5.83)$$

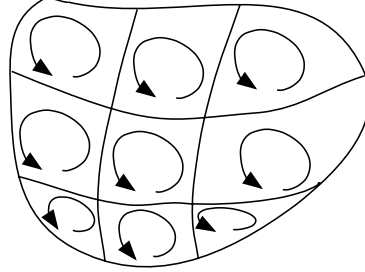
Koska toisaalta aina $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, skalaaripotentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (5.84)$$

joten sähköstatiikasta tuttuja apuneuvoja voi soveltaa magnetostatiikan ongelmiin kunhan ollaan huolellisia erilaisten reunaehtojen kanssa.

Koska etäällä olevan virtasilmukan luoma magneettikenttä on matemaattisesti samaa muotoa kuin sähködipolin kenttä, voidaan magneettinen skalaaripotentiaali ilmaista magneettisen dipolimomentin avulla

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} \right) \quad (5.85)$$



Kuva 5.2: Virtasilmukan muodostaminen pienistä silmukoista. Nettovirtaa kulkee vain ison silmukan ulkoreunalla.

joten

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (5.86)$$

Erona sähköstatiikkaan magneettinen skalaaripotentialiaali on paikan yksiarvoinen funktio ainoastaan yhdesti yhtenäisissä alueissa. Tarkastellaan esimerkkinä aluetta, jossa on virtasilmukka. Nyt dipolitarkastelu ei käy suoraan päinsä. Virtasilmukan voidaan kuitenkin ajatella koostuvan monesta pienestä (differentiaalisesta) silmukasta, jotka muodostavat tiheän silmukan sulkeman pinnan peittävän verkon (kuva 5.2).

Verkon vierekkäisten elementtien virrat kumoavat toisensa, joten kokonaisvirta on sama kuin silmukkaa kiertävä virta. Kukin silmukka tuottaa ulkopuolelleen skalaaripotentialiaalelementin

$$d\psi = \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} = \frac{(I \mathbf{n} dS) \cdot \mathbf{r}_2}{4\pi r_2^3} = -\frac{I}{4\pi} d\Omega \quad (5.87)$$

missä $d\Omega$ on differentiaalisen silmukan avaruuskulmaelementti. Integroimalla kaikkien pikkusilmukoiden yli saadaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi} \Omega \quad (5.88)$$

missä Ω on silmukan peittämä avaruuskulma katsottaessa pisteestä, jossa ψ lasketaan (tämä selittää ylläolevan miinusmerkin!). Kuljettaessa silmukan läpi ja tultaessa takaisin samaan tarkastelupisteeseen kasvaa avaruuskulma tekijällä 4π , joten potentiaali ei todellakaan ole yksikäsitteinen vaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi} (\Omega_0 \pm n 4\pi) \quad (5.89)$$

Alueesta saadaan yhdesti yhtenäinen asettamalla tarkastelualueen rajapinnaksi jokin silmukan reunakäyrän rajoittama pinta.

Helppo esimerkki tilanteesta, jossa skalaaripotentiali ei ole paikan yksiarvoinen funktio, on äärettömän pitkä suora virtajohdin. Jos johdin on z -akselilla, niin sylinterikoordinaateissa skalaaripotentialiksi kelpaa $\psi = -I\phi/(2\pi)$, jolle $\psi(\phi) \neq \psi(\phi + 2\pi)$.

Magneettinen skalaaripotentiali eroaa sähköisestä siinä, että jälkimmäisellä on selvä fysikaalinen tulkinta: se antaa varauksellisen hiukkasen potentiaalienergian sähköstaattisessa kentässä. Magneetikentässä tällaista tulkintaa ei ole.

5.7 Magneettivuo

Magneetikentäksi kutsumamme suure \mathbf{B} on siis tarkkaan ottaen magneettivuon tiheys, jonka SI-yksikkö tesla (T) vastaa yhden weberin (Wb) suuruista magneettivuota neliömetrin läpi. Magneettivuo Φ pinnan S läpi on

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.90)$$

Jos pinta on suljettu

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (5.91)$$

eli magneettivuo suljetun pinnan läpi on nolla. Tätä voi havainnollistaa epätasällisella toteamuksella, että jokaisesta avaruuden alueesta lähtee yhtä paljon magneetikentän kenttäviivoja kuin niitä sinne tulee.

