

Luku 6

Magneettikenttä väliaineessa

Tässä luvussa käsitellään magneettikentän ominaisuuksia väliaineessa (RMC luku 9 osittain; CL luku 7 osittain; esitiedot KSII luku 4).

6.1 Magnetoituma

Edellä rajoituttiin magneettikentän määrittämiseen magneettisilta ominaisuuksiltaan tyhjänkaltaisessa väliaineessa. Aineen mikroskooppinen rakenne aiheuttaa todellisuudessa kullekin atomille ominaisen magneettisen dipolimomentin \mathbf{m}_i . Lasketaan yhteen kaikkien atomien dipolimomentit tilavuusalkiossa ΔV . Aineen **magnetoituma** määritellään raja-arvona (vrt. polarisointuma)

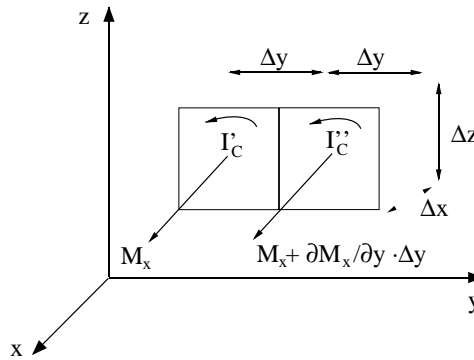
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{m}_i \quad (6.1)$$

Magnetoituma on siis väliaineen magneettisten dipolimomenttien tiheys paikan funktiona. Koska magneettisen momentin SI-yksikkö on Am^2 , on magnetoituman yksikkö A/m .

Jos dipolimomenttien tiheys on homogeeninen, kutakin dipolimomenttia vastaavat virtasilmukat summautuvat nolnaan eivätkä aiheuta nettovirtaa. Jos jakautuma kuitenkin on epätasainen, on tarkastelupisteen eri puolilla eri määrä virtaelementtejä ja tuloksena on kokonaisvirta \mathbf{J}_M . Virran laskemiseksi tarkastellaan kahta pientä tilavuusalkiota magneettisessa materiaalissa. Olkoon kummankin tilavuus $\Delta x \Delta y \Delta z$ ja sijaitkoot ne rinnakkain y -akselin suuntaan kuvan 6.1 mukaisesti.

Jos ensimmäisen alkion magnetoituma on $\mathbf{M}(x, y, z)$, niin toisen magnetoituma on

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{korkeamman kertaluvun derivaattoja}$$



Kuva 6.1: Magnetoitumasta aiheutuvan virran laskeminen.

Ensimmäisen elementin magneettisen momentin x -komponentti saadaan ilmaistuksi silmukavirran I'_C avulla

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_C \Delta y \Delta z \quad (6.2)$$

ja vastaavasti toiselle elementille

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta y \Delta z = I''_C \Delta y \Delta z \quad (6.3)$$

Elementtien välistä nousee nettovirta z -akselin suuntaan

$$I'_C - I''_C = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (6.4)$$

Toistamalla tarkastelu kahdelle rinnakkaiselle tilavuusalkiolle x -akselilla (tarkkana merkkien kanssa!), saadaan z -akselin suuntaiseksi virraksi

$$I_C = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (6.5)$$

Nämä ovat ainoat magneettiset momentit, jotka tuottavat virtaa z -akselin suuntaan. Laskemalla ne yhteen ja jakamalla pinta-alaelementillä saadaan magnetoitumisvirran tiheyden z -komponentiksi

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (6.6)$$

eli vektorimuodossa

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (6.7)$$

6.2 Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä

Lasketaan sitten magneettisen aineen aiheuttama magneettikenttä. Lähdetään liikkeelle vektoripotentiaalista (vrt. 5.81)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (6.8)$$

Tekemällä tuttuja vektorikikkoja saadaan tämä muotoon

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (6.9)$$

missä S_0 on tilavuuden V_0 pinta. Pinnalla magnetoitumisvirran tiheys on

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (6.10)$$

Tämä on magnetoitumisvirta yksikköpituutta kohti eli virta on ikään kuin litistetty kulkemaan yksiulotteisen ”pinnan” läpi. Vektoripotentiaali määräytyy siis magnetoitumisvirrasta tilavuudessa V_0 ja tilavuuden pinnalla S_0

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (6.11)$$

Tämä tulos ei arvatenkään ole mikään yllätys (vrt. sähköstaattinen potentiaali). Tästä ei kuitenkaan ole aivan helppo laskea itse magneettikenttää, koska $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Lähdetään liikkeelle suoraan vektoripotentiaalin määritelmästä.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' \quad (6.12)$$

missä gradientti kohdistuu vektoriin \mathbf{r} . Nyt integrandi saadaan muokatuksi muotoon (käy itse läpi kaikki välimuodot!)

$$\nabla \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - (\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.13)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi tuo magneettikenttään osuuden

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.14)$$

Toinen termi vaatii jälleen vähän vektoriakrobatiaa ja antaa tuloksen

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) \quad (6.15)$$

Tässä $\psi(\mathbf{r})$ on magneettisen materiaalin skalaaripotentiaali. Magneettikenttä on siis tämän potentiaalin ja paikallisten virtojen aiheuttaman magneettikentän summa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.16)$$

Aineen ulkopuolella \mathbf{M} on nolla, joten siellä kenttä saadaan skalaaripotentialista, joka on siis integraali aineessa olevista dipolimomenttiätkioista.

Tässä on päädytty jokseenkin samanlaiseen kuvailuun kuin eristekappaleiden kanssa. Magneettisen skalaaripotentialin saa edelleen muotoon

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'\end{aligned}\quad (6.17)$$

Näin määritellyt **magneettisten napojen tiheys** ρ_M ja **magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys** σ_M ovat samankaltaisia apusuureita kuin polarisaatiotiheydet ρ_P ja σ_P sähköstatiikassa.

6.3 Magneettikentän voimakkuus

Magneettisen aineen itsensä lisäksi kokonaiskenttään vaikuttaa vapaiden varausten aiheuttama virta. Esimerkiksi rauta voi olla magnetoitunutta ja lisäksi sen johtavuuselektronit kuljettavat ”vapaata” virtaa. Niinpä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.18)$$

Tämä voidaan laskea, mikäli \mathbf{M} ja \mathbf{J} ovat tiedossa kaikkialla. Usein virta tunnetaan, mutta \mathbf{M} riippuu \mathbf{B} :stä. Vaikka rakenneyhtälö $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ tunnettaisiinkin, meille jää yhä integraaliyhtälö \mathbf{B} :n itsensä laskemiseen.

Tämän ongelman käsittelemiseksi otetaan käyttöön apukenttä \mathbf{H} , jota kutsutaan **magneettikentän voimakkuudeksi**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (6.19)$$

Tällöin

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) \quad (6.20)$$

Tämä voi näyttää turhalta tempulta, koska \mathbf{H} riippuu yhä \mathbf{M} :stä ρ_M :n ja σ_M :n kautta, mutta toimihan samanlainen temppu myös sähköstatiikassa.

Kentän \mathbf{H} hyödyllisyys piilee siinä, että sille saadaan virrantiheydestä riippuva differentiaaliyhtälö. Palautetaan ensiksi mieleen, että $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ on kokeellinen laki, jonka mukaan magneettivuon tiheys voidaan aina palauttaa

virtajakautumiin, eikä todellisista eristetyistä magneettisista monopoleista ole havaintoja. Nyt Ampèren laissa on tärkeä huomioida kaikki sähkövirrat

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \quad (6.21)$$

missä \mathbf{J} kuvaa varausten siirrokseen liittyvää vapaata virtaa. Tämä pätee kaikkialla muualla kuin pintavirtaa ylläpitävän kappaleen pinnalla. Ottamalla huomioon relaatio $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$, saadaan tästä

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.22)$$

Siis \mathbf{H} -kentän pyörteet aiheutuvat vain vapaiden varausten kuljettamasta virrasta. Magneettisten ongelmien ratkomiseen tarvitaan tämän lisäksi tietenkin $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, reunaehdot ja kokeellinen rakenneyhtälö \mathbf{B} :n ja \mathbf{H} :n välille.

Integraalimuodossa \mathbf{H} :lle pätee

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.23)$$

eli magneettikentän voimakkuuden integraali pitkin suljettua lenkkiä on yhtä suuri kuin varausten kuljettama kokonaisvirta lenkin läpi.

6.4 Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti

Kenttien \mathbf{B} ja \mathbf{H} välinen suhde riippuu väliaineen ominaisuuksista samaan tapaan kuin kenttien \mathbf{D} ja \mathbf{E} yhteys. Magneettiset aineet ovat yleensä niin monimutkaisia, että **rakenneyhtälö** on määritettävä kokeellisesti. Suurelle joukolla aineita (LIH) yhteys on muotoa

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.24)$$

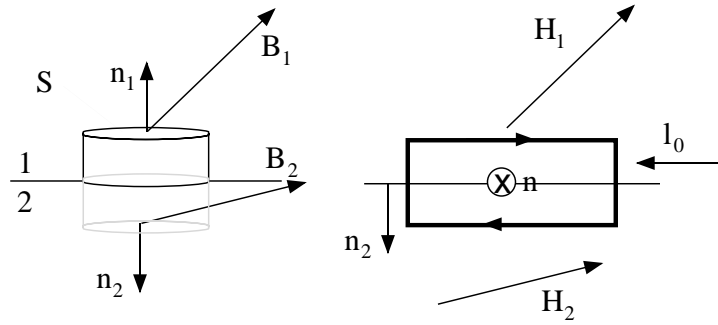
missä kerroin χ_m on **magneettinen suskeptiivisuus**. Epäisotrooppiselle mutta lineaariselle väliaineelle χ_m on tensori, epälineaarisessa väliaineessa se riippuu lisäksi magneettikentästä. Tällä kurssilla rajoitutaan isotrooppisiin magneettisiin väliaineisiin. SI-yksiköissä magneettinen suskeptiivisuus on dimensioton suure (sähköisen χ :n dimensio on sama kuin ϵ_0 :n).

Jos $\chi_m > 0$, väliaine vahvistaa ulkoista magneettivuon tiheyttä ja ainetta kutsutaan **paramagneettiseksi**. Jos taas $\chi_m < 0$, magneettivuon tiheys heikkenee ja aine on **diamagneettista**. Sekä paramagneettisilla että diamagneettisilla aineilla magneettinen suskeptiivisuus on pieni: $|\chi_m| \ll 1$.

Kenttien \mathbf{M} ja \mathbf{H} välinen lineaarinen yhteys merkitsee, että myös kenttien \mathbf{B} ja \mathbf{H} välinen rakenneyhtälö on lineaarinen

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \equiv \mu\mathbf{H} \quad (6.25)$$

missä μ on väliaineen **permeabiliteetti**. Aineiden magneettisia ominaisuuksia tarkastellaan hieman enemmän luvussa 10.



Kuva 6.2: Magneettikenttävektoreiden reunaehtojen määrittäminen.

6.5 Magneettikenttävektoreiden reunaehdot rajapinnalla

Tarkastellaan kuvan 6.2 mukaista kahden väliaineen rajapintaa. Magneettivuon tiheyden \mathbf{B} reunaehto on analoginen sähkövuon tiheyden \mathbf{D} reunaehdon kanssa. Kuvan pillerirasian pinnan yli laskettu \mathbf{B} :n integraali on

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (6.26)$$

Litistämällä pillerirasian vaippa infinitesimaaliseksi saadaan

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0 \quad (6.27)$$

missä ΔS on rasian kannen pinta-ala. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, niin

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (6.28)$$

eli magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

Magneettikentän voimakkuudelle saadaan reunaehto Stokesin lauseen avulla tarkastelemalla \mathbf{H} :n lenkki-integraalia kuvan suorakaidetta pitkin

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.29)$$

missä \mathbf{n} on normaalikomponentti integroimislenkin läpi ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0$). Litistettäessä integroimislaatikko jälleen infinitesimaaliseksi silmukan läpi kulkeva virta voi olla ainoastaan pintavirtaa \mathbf{j} , joten

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \Delta l \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) \quad (6.30)$$

jonka avulla saadaan

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 \Delta l = \Delta l \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \Delta l (\mathbf{j} \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{l}_0 \quad (6.31)$$

josta seuraa reunaehto

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{j} \times \mathbf{n}_2)_t \quad (6.32)$$

eli magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentti on jatkuva rajapinnan yli, ellei pinnalla ole pintavirtaa. Mikäli \mathbf{H} -kenttä tunnetaan pinnan molemmiin puolin, saadaan pintavirran tiheys lausekkeesta

$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j} \quad (6.33)$$

Useissa magnetismissä liittyvissä ongelmissa on näppärää tarkastella **vuoputkia**. Tarkastellaan magneettikentän kenttäviivoja, siis viivoja, jotka ovat jokaisessa pisteessä kentän \mathbf{B} tangentin suuntaisia. Vuoputki on ikäänkuin kimppu kenttäviivoja tai täsmällisemmin alue, jonka vaipan läpi ei kulje yhtään kenttäviivaa. Olkoot S_1 ja S_2 vuoputken päät. Tällöin vuoputken tilavuuden yli laskettu integraali on

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' dS_1 = \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0 \quad (6.34)$$

missä \mathbf{n} ja \mathbf{n}' ovat magneettikentän suuntaan laskettuja putken päiden normaalivektoreita. Magneettivuo pitkin vuoputkea on siis vakio.

Huom. Ylläoleva tulos koskee vain \mathbf{B} -kenttää eikä välttämättä päde \mathbf{H} -kentälle:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{H} dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dV = \int_V \rho_M dV \quad (6.35)$$

Vuoputken voi siis tulla magneettikentän voimakkuutta, mikäli väliaineen magneettisten napojen tiheys on äärellinen eli aineella on nollasta poikkeava napavoimakkuus.

6.6 Reuna-arvo-ongelmia magneettikentässä

Magneettiset reuna-arvo-ongelmat ovat yleensä monimutkaisempia kuin sähköstatiikan vastaavat ongelmat. Sähkövirtojen olemassaolo, epätasainen magnetoituminen tai epälineaarinen rakenneyhtälö edellyttävät Laplaceen yhtälöä monimutkaisempien yhtälöiden ratkomista ja hankaloittavat reunaehdoja. Rajoitutaan tässä yksinkertaisiin tilanteisiin.

Virrattomuus ($\nabla \times \mathbf{H} = 0$) tekee mahdolliseksi magneettikentän esittämisen skalaaripotentialin gradienttina $\mathbf{H} = -\nabla \psi$. Jos lisäksi aine on magneettisesti ainakin likimain lineaarista eli $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ja tasaisesti magnetoitunut ($\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$), niin $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ja pääsemme ratkaisemaan Laplaceen yhtälöä

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (6.36)$$

Magnetoituva pallo tasaisessa magneettikentässä

Tämä ongelma on periaatteessa sama kuin luvun 3.5 eristepallo tasaisessa ulkoisessa sähkökentässä. Lausumalla ψ vyöhykeharmonisten funktioiden avulla ja käyttämällä reunaehtoja saadaan (HT) magneettikentälle lausekkeet pallon sisällä

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \mathbf{e}_z = \text{vakio} \quad (6.37)$$

ja pallon ulkopuolella

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{e}_z + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \quad (6.38)$$

missä \mathbf{e}_z on ulkoisen magneettikentän suuntainen, koordinaatiston origo on pallon keskipisteessä ja kulma θ on poikkeama z -akselilta.

Tässä on syytä huomata, että nimenomaan \mathbf{B} -kenttä vastaa rakenteeltaan sähköstatiikan \mathbf{D} -kenttää.

Tasaisesti magnetoituneen pallon kenttä tyhjässä

Olkoon pallon säde a ja magnetoituma vakio $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$. Tilanne on jälleen aksiaalisymmetrinen, joten magneettinen skalaaripotentiali pallon ulkopuolella (1) ja sisällä (2) voidaan kirjoittaa (ks. luku 2.9.2)

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (6.39)$$

$$\psi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) \quad (6.40)$$

Erona aiempiin vastaaviin laskuihin on, että nyt ei ole taustan kenttää, joten ulkokentässä kaikki r :n positiiviset potenssit on jätettävä pois. Sisäkentässä ei voi puolestaan olla negatiivisia potensseja, jotta ratkaisu olisi äärellinen pallon keskipisteessä. Reunalla $r = a$

$$H_{1\theta} = H_{2\theta} \quad (6.41)$$

$$B_{1r} = B_{2r} \quad (6.42)$$

\mathbf{H} :n reunaehdosta seuraa yksinkertaisesti

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \quad (6.43)$$

\mathbf{B} -kentässä on mukana myös magnetoituma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.44)$$

ja tämän jatkuvuus reunalla edellyttää

$$-\mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \mu_0 M \cos \theta \quad (6.45)$$

Sijoittamalla näihin ψ :n lausekkeet saadaan yhtälöt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) P_n(\cos \theta) = \text{vakio} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 C_{10} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) [C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] \\ - \mu_0 M \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (6.47)$$

P_n :t ovat ortogonaalisia funktioita, joten jokaisen n -termin summauksissa täytyy toteutua erikseen. Kun $n = 0$, saadaan ehdot

$$C_{10} a^{-1} - A_{20} = \text{vakio} \quad (6.48)$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} = 0 \quad (6.49)$$

Siis $C_{10} = 0$ ja myös A_{20} voidaan valita nolllaksi ilman, että sillä on vaikutusta kenttiin \mathbf{B} tai \mathbf{H} . Termeille $n = 1$ on voimassa

$$C_{11} a^{-3} - A_{21} = 0 \quad (6.50)$$

$$2C_{11} a^{-3} + A_{21} - M = 0 \quad (6.51)$$

jonka ratkaisuna on $C_{11} = Ma^3/3$; $A_{21} = M/3$.

Kun $n \geq 2$ yhtälöt toteutuvat ainoastaan kertoimilla $C_{1n} = A_{2n} = 0$. Ongelma on ratkaistu. Potentiaalit ovat

$$\psi_1(r, \theta) = \frac{1}{3} M (a^3/r^2) \cos \theta \quad (6.52)$$

$$\psi_2(r, \theta) = \frac{1}{3} M r \cos \theta \quad (6.53)$$

ja \mathbf{H} -kentät saadaan näiden gradientteina

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} M (a^3/r^3) [2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \quad (6.54)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} M \mathbf{e}_z \quad (6.55)$$

Ulkoinen \mathbf{B} -kenttä on $\mu_0 \mathbf{H}_1$. Koska pallon magnetoituma $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z$, jää pallon sisäiseksi \mathbf{B} -kentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M \mathbf{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \quad (6.56)$$

joka on siis vastakkaissuuntainen \mathbf{H} -kentälle. Ongelman voisi ratkaista myös luvussa 6.2 esitetyllä tavalla skalaaripotentialin avulla, jolloin tehtäväksi

jää magnetoituman integroiminen. Tasaisesti magnetoitunut pallo on analoginen tasaisesti polarisoituneen pallon kanssa.

Huom. Vaikka Maxwellin yhtälöt ovat yksinkertaisemmat tyhjäkentille \mathbf{E} ja \mathbf{B} , jolloin ei tarvita rakenneyhtälöitä, käytännön magneettisissa ongelmissa \mathbf{H} -kenttä on usein yksinkertaisempi tarkasteltava.