

## Luku 7

# Sähkömagneettinen induktio

Oppimateriaali RMC luku 11 ja CL 8.1; esitiedot KSII luku 5.

Toistaiseksi olemme tarkastelleet vain ajasta riippumattomia kenttiä. Ne voi mainiosti kuvitella kenttäviivojen avulla, joten emme ole törmänneet mihinkään, mikä puolustaisi Feynmanilta lainattua toteamusta kurssin alussa. Tässä luvussa alamme tarkastella ajasta riippuvia kenttiä ja siirtyä alueelle, jossa mielikuvitus joutuu paljon kovemmalle koetukselle.

### 7.1 Faradayn laki

Sähköstaattiselle kentälle pätee  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Mikäli kenttä ei ole staattinen ja siten integraali ei ole nolla, silmukkaan  $C$  sanotaan indusoituvan **sähkömotorisen voiman** (smv)

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.1)$$

joka havaintojen mukaan vastaa silmukan läpäisevän magneettivuon muutosta

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.2)$$

Tämä on **Faradayn induktiolaki**. Se ei riipu mitenkään siitä, kuinka magneettivuon tiheys itsessään muuttuu. Lain olemassaolo ei myöskään riipu fyysisen silmukan olemassaolosta, vaan pätee annettua reittiä  $C$  pitkin lasketulle integraalille. Faradayn laki on jälleen kokeellinen luonnonlaki, joka ei seuraa mistään muista luonnonlaeista.

Sähkömotorisen voiman yksikkö on sama kuin potentiaalieron eli voltti. Sähkömotorinen voima ei kuitenkaan ole minkään kahden pisteen välinen jännite, koska se lasketaan aina suljetun silmukan yli!

Koska Faradayn laki ei riipu kentän jakautumasta silmukan sisällä, voidaan silmukka ajatella kiinteäksi ja viedä aikaderivaatta vuointegraalin sisään, jolloin siitä tulee osittaisaikaderivaatta

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.3)$$

ja Stokesin lauseen mukaan

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.4)$$

Tämä on voimassa kaikille kiinteille pinnoille, joten Faradayn laki differentiaalimuodossa on

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.5)$$

joka on Maxwellin kolmas yhtälö.

Edellä oletettiin integrintisilmukka kiinteäksi. Faradayn lain integraalimuodossa  $\mathbf{E}$  on siis sähkökenttä silmukka-alkion  $d\mathbf{l}$  kohdalla koordinaatistossa tai aineessa, jossa  $d\mathbf{l}$  on levossa. Jos tarkastellaan liikkuvia silmukoita ja mahdollisesti liikkeen mukana muuttuvia silmukoita, liikkeen kanssa täytyy olla huolellinen. Magneettikentän kokonaismuutos havaitsijan koordinaatistossa riippuu sekä eksplisiittisestä aikamuutoksesta ( $\partial/\partial t$ ) että muutoksesta liikkeen mukana ( $\mathbf{V} \cdot \nabla$ ), missä  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  on väliaineen virtauskenttä havaitsijan koordinaatistossa. Silloin siis

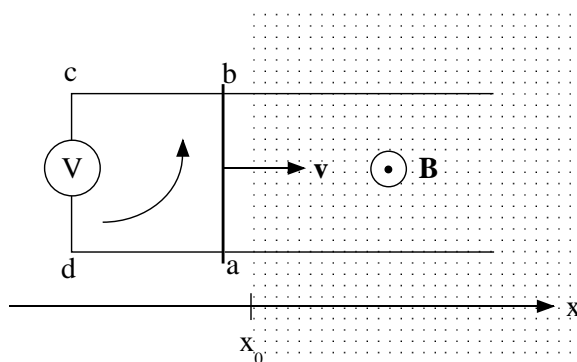
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (7.6)$$

Faradayn laissa oleva miinusmerkki ilmaisee **Lenzin lain**: “Induktiovirta vastustaa muutosta, joka sen aiheuttaa”. Induktiovirta kuluttaa energiaa. Tämä energia on saatava systeemiltä, joka aiheuttaa induktion. Tämä merkitsee, että induktion aiheuttajan on tehtävä työtä induktiovirran vastavaikutuksen voittamiseksi. Lenzin laki on usein kätevä tapa määrittää indusoituvan virran suunta, joka saattaa olla vaikea johtaa aikaderivaatan ja roottorin sisältävästä abstraktin näköisestä Faradayn laista.

Faradayn lain avulla voidaan ymmärtää esimerkiksi **betatronin** toiminta. Olemme todenneet, että vain sähkökenttä voi tehdä työtä varattuun hiukkaseen. Betatronissa muuttuva magneettikenttä indusoi sähkökentän, joka kiihdyttää hiukkasia. Lorentzin voiman lauseke ei tietenkään rajoitu staattisiin sähkö- ja magneettikenttiin.

### **Esimerkki: Liikkuva johdin magneettikentässä**

Tarkastellaan yksinkertaisena, mutta toivottavasti ajatuksia herättävänä esimerkkinä magneettikentässä liikkuvaa johdetankoa. Oletetaan, että johdetanko  $ab$  (pituus  $L$ ) liikkuu vakionopeudella  $\mathbf{v}$  pitkin johdinkiskoja ja saapuu



Kuva 7.1: Magneettikenttään saapuva kiskoilla liikkuva johdintanko.

alueeseen  $x > x_0$ , jossa on vakiomagneettikenttä  $\mathbf{B}$  kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan (kuva 7.1). Asetetaan välille  $cd$  suuriresistanssinen jännitemittari (silmukassa  $abcd$  ei siis kulje virtaa).

Kentässä olevan johdetangon vapaisiin varauksiin vaikuttaa Lorentzin voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.7)$$

Voiman magneettinen osa ajaa positiivisia ja negatiivisia varauksia tangon eri päihin. Tämä aiheuttaa sähkökentän, joka pyrkii vastustamaan varausseparaatiota ja syntyy tasapainotilanne, jossa sähkökenttä suuntautuu pisteestä  $a$  kohti pistettä  $b$  ja kentän suuruus on

$$E = vB \quad (7.8)$$

Tangon päiden  $a$  ja  $b$  välillä on jännite

$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = EL = BLv \quad (7.9)$$

Tätä sanotaan liikkeen indusoimaksi potentiaalieroksi (joskus epätasaisesti liikkeen indusoimaksi sähkömotoriseksi voimaksi).

Edellä ei tarvittu induktiolakia ollenkaan, vaan mikrofysikaalinen tarkastelu oli riittävä. Voimme toisaalta laskea magneettivuon silmukan  $abcd$  läpi, kun johdetanko kulkee magneettikentässä. Valitsemalla integroimisinnan eli silmukan tason normaalivektori magneettikentän suuntaiseksi saadaan vuon muutosnopeudeksi

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dA}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (7.10)$$

joten Faradayn lain mukaan piiriin indusoituu smv

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \quad (7.11)$$

Merkki kertoo, että sähkömotorinen voima vaikuttaa kuvaan merkittyä positiivista kiertosuuntaa vastaan. Jos virtapiiri oikosuljetaisiin jännitemittarin kohdalta, niin induktiovirta kulkisi myötäpäivään. Induktiovirta pyrkii siis pienentämään magneettivuon muutosta silmukan läpi.

Ajatellaan sitten, että neliösilmutta (sivu  $L$ ) saapuu magneettikenttään nopeudella  $\mathbf{v}$ . Oikosuljetaan piiri, jolloin virta voi kulkea siinä. Silmukan tullessa magneettikenttään vuon muutos on vakio ( $-Blv$ ), ja piiriin syntyvän myötäpäivään kulkevan induktiovirran suuruus on  $Blv/R$  ( $R$  on piirin resistanssi). Kun silmutta on kokonaan magneettikentän sisällä, vuo ei enää muutu ja virta lakkaa kulkemasta. Kannattaa huomata, että induktioilmiö voitaisiin tässä tapauksessa selittää myös Lorentzin voiman avulla.

Silmukan tullessa kenttään sivuun  $ab$  kohdistuu nopeudelle vastakkaisuuntainen voima  $\mathbf{F}$  suuruudeltaan  $BLI$ , joten silmukan kiskomiseen tarvittava teho on  $Fv = BLIv$ . Tämä on täsmälleen yhtä suuri kuin virtasilmukan ohmiset tehohäviöt.

Oletetaan nyt, että neliösilmutta on kokonaan alueessa  $x > x_0$  eikä liiku. Muutetaan magneettikenttää silmukan kohdalla ajan funktiona:  $B(t) = Bvt/L$ . Tällöin magneettivuon silmukan läpi on  $\Phi(t) = BvLt$ , jolloin vuon muutos on sama kuin edellä liikkuvan tangon tapauksessa. Ratkaisevana erona edelliseen tilanteeseen on se, ettei induktioilmiötä voida nyt selittää Lorentzin voiman avulla ( $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ ).

Magneettikenttään saapuvan silmukan tilannetta voitaisiin tarkastella myös silmukan mukana liikkuvan tarkkailijan kannalta. Hänen mielestään magneettisia voimia ei ole, joten taas tarvitaan induktiolakia selittämään sähkömotorisen voiman syntyminen.

Se, että liikkeen indusoima potentiaaliero on yhtä suuri kuin muuttuvan magneettikentän aiheuttama sähkömotorinen voima, ei ole itsestään selvää. Tämän ekvivalenssin selvittäminen oli keskeisessä osassa, kun Einstein kehitti suppeamman suhteellisuusteorian vuonna 1905. Liikkuvissa koordinaatistoissa oikean integroimistien valinta vuon muutoksen laskemiseksi ei ole aina helppoa. Koska Maxwellin yhtälöt kuitenkin osoittautuvat Lorentzinvariantteiksi, Faradayn laki differentiaalimuodossa ja Lorentzin voiman lausekke pätevät **kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa**.

## 7.2 Itseinduktanssi

Tarkastellaan eristettyä virtasilmutta, jossa magneettivuon on silmukan itsensä aiheuttama. Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettikenttä riippuu

lineaarisesti silmukassa kulkevasta sähkövirrasta  $I$ . Kiinteässä muuttumattomassa silmukassa vuon muutos johtuu vain virran muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (7.12)$$

Virran ja vuon muutoksen välistä verrannollisuuskerrointa

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (7.13)$$

kutsutaan silmukan **itseinduktanssiksi**. Jos vuo on suoraan verrannollinen virtaan,  $L = \Phi/I$ . Virran muutos indusoi sähkömotorisen voiman

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.14)$$

Koska sähkömotorisen voiman SI-yksikkö on voltti, niin induktanssin SI-yksikkö on Vs/A  $\equiv$  H eli henry. Itseinduktio ilmenee esimerkiksi siten, että virtapiireissä virta ei koskaan kytkeydy tai katkea täysin hetkellisesti. Itseinduktio korostuu, jos piirissä on käämi, koska silloin piirin induktanssi on käytännössä sama kuin käämin induktanssi.

### Toroidaalisen kelan itseinduktanssi

Muodostetaan kela käänimällä johdinlankaa  $N$  kierrosta toruksen ympäri (poikkileikkauksen ala  $A$ ). Itseinduktanssiin vaikuttaa sekä kela itse että silmukkaan virtaa syöttävä johteen ulkoinen osa. Oletetaan, että ulkoinen osa on koaksiaalikaapeli, joka ei aiheuta merkittävää ulkoista kenttää. Ampèren kiertosääntö antaa magneettikentäksi toruksen sisällä

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \quad (7.15)$$

missä  $l$  on toruksen keskimääräinen pituus (luku 5.3). Magneettivuo jokaisen yksittäisen kierroksen läpi on

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N I A}{l} \quad (7.16)$$

ja kaikkien kierrosten yhteenlaskettu vuo on

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I A}{l} \quad (7.17)$$

josta saadaan induktanssi

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (7.18)$$

### 7.3 Keskinäisinduktanssi

Tarkastellaan sitten  $n$  kappaletta erillisiä silmukoita. Kirjoitetaan kaikkien silmukoiden aiheuttama yhteenlaskettu vuo silmukan  $i$  läpi muodossa

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (7.19)$$

Tähän silmukkaan indusoituu smv

$$\mathcal{E}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \quad (7.20)$$

Jos kaikki silmukat ovat kiinteitä, kunkin silmukan osuus  $\Phi_{ij}$  riippuu vain siinä kulkevan virran muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \quad (7.21)$$

Kertoimia

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \quad i \neq j \quad (7.22)$$

kutsutaan silmukoiden  $i$  ja  $j$  väliseksi keskinäisinduktansseiksi.

Jos väliaine on magneettisesti lineaarinen,  $M_{ij}$ :t ovat vakioita. Sähkömotorisen voiman lauseke sisältää myös silmukan  $i$  itseinduktanssin  $L_i = M_{ii}$ . Keskinäisinduktanssi voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen virtojen kulkusuunnista silmukoissa. Tarkastellaan kahta kiinteää silmukkaa lineaarisessa väliaineessa (yksinkertaisuuden vuoksi  $\mu = \mu_0$ ). Tällöin

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (7.23)$$

Lasketaan magneettikenttä Biot'n ja Savartin lailla ja integroidaan siitä magneettivuo

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left[ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] \cdot \mathbf{n} dS_2 \quad (7.24)$$

Käyttämällä kaavaa

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (7.25)$$

saadaan

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left[ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right] \cdot \mathbf{n} dS_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \end{aligned} \quad (7.26)$$

jota kutsutaan **Neumannin kaavaksi**.

Neumannin kaava ei ole kovin hyödyllinen induktanssien laskemisessa, mutta se osoittaa, että keskinäisinduktanssi on puhtaasti silmukoiden geometriasta johtuva suure ja siten silmukoiden itsensä ominaisuus. Silmukoissa kulkeva sähkövirta ei vaikuta lineaarisessa tapauksessa induktanssiin. Lisäksi keskinäisinduktanssi on symmetrinen silmukoiden vaihtamisen suhteen ( $M_{12} = M_{21}$ ), mikä vaikuttaa ensi näkemältä hieman yllättävältä.

Keskinäisinduktanssin laskeminen on käytännössä hankalaa, mutta mittaaminen varsin yksinkertaista: syötetään piiriin 1 tunnettu virta ja mitataan sen indusoima smv piirissä 2. Helpointa tämä on toteuttaa sinimuotoisen vaihtovirran avulla.

### Kelojen kytkennöistä

Virtapiireissä on usein keloja, jotka on kytketty joko sarjaan tai rinnakkain. Täysin häviöttömän kelan rakentaminen on vaikeaa ja käytännössä niillä on aina myös sisäinen resistanssi. Tarkastellaan kahta sarjaan kytkettyä kela, joiden itseinduktanssit ovat  $L_1$  ja  $L_2$ , resistanssit  $R_1$  ja  $R_2$  ja keskinäisinduktanssi  $M$ . Olkoon kytkennän jännite  $V$ . Virran muuttuessa kumpaankin kelaan indusoituu smv, jolloin

$$V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I \quad (7.27)$$

josta saadaan

$$V = (R_1 + R_2)I + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{dI}{dt} \quad (7.28)$$

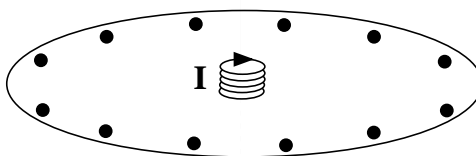
eli tilanne vastaa efektiivistä resistanssia  $(R_1 + R_2)$  yhdessä efektiivisen induktanssin  $(L_1 + L_2 + 2M)$  kanssa.

Kahdelle rinnakkain kytketylle kelalle vastaavia efektiivisiä resistansseja ja induktansseja ei voida esittää yksinkertaisina funktioina suureista  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $R_1$  ja  $R_2$ , koska vastus-kela-parien läpi kulkee eri sähkövirta. Jos resistanssit ovat niin pieniä, että ne voidaan jättää huomiotta, saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} V &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V &= L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned} \quad (7.29)$$

Eliminoimalla ensin  $dI_1/dt$  ja sitten  $dI_2/dt$  saadaan kaksi yhtälöä

$$\begin{aligned} V(L_2 - M) &= (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt} \\ V(L_1 - M) &= (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (7.30)$$



Kuva 7.2: Levy, jonka keskellä kulkevassa käämissä kulkee tasavirta  $I$ . Reunalla on tasaisin välein varattuja palloja.

Laskemalla nämä yhteen saadaan lopulta määritetyksi efektiivinen induktanssi

$$V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \quad (7.31)$$

Induktanssit ovat tärkeitä vaihtovirtapiireissä, joita emme varsinaisesti käsittele tällä kurssilla. Vaihtovirrat on kuitenkin hyödyllistä kerrata vaikkapa KSII:n luvusta 6. Myös RMC:n luku 13 on oivallinen johdatus asiaan.

## 7.4 Pähkinä purtavaksi

Palataan lopuksi perusongelmien pariin (Feynman, osa 2, luku 17-4). Tarkastellaan levyä, joka pääsee pyörimään akselinsa ympäri (kuva 7.2). Keskellä on käämi, jossa pieni paristo pitää yllä tasavirtaa. Levyn reunalla on tasainen varausjakauma, esimerkiksi samanlaisia varattuja palloja. Oletetaan, että levy ei tässä tilanteessa pyöri. Oletetaan sitten, että virta käämissä katkeaa äkillisesti ilman ulkopuolista vaikutusta. Alkaako levy pyöriä?

Magneettikentän heikkeneminen indusoi vähäksi aikaa sähkökentän. Geometrian perusteella kenttäviivat ovat ympyröitä, joiden keskipiste on levyn akselilla. Varauspalloihin kohdistuva voima aiheuttaa silloin vääntömomentin, jonka takia levy alkaa pyöriä.

Toisaalta laitteiston liikemäärämomentti ennen virran katkaisua on nolla. Siihen ei kohdistu ulkoisia voimia, joten liikemäärämomentin säilymislain perusteella levy ei ala pyöriä.

Jos ensimmäinen vastaus on oikea, miten käy liikemäärämomentin säilymislain? Jos taas jälkimmäinen selitys pätee, niin sovellettiinko induktiolakia väärin?