

Luku 8

Magneettinen energia

Oppimateriaali RMC Luku 12 ja CL 7.3; esitiedot KSII luvut 4 ja 5.

Luvussa 4 todettiin, että staattiseen sähkökenttään liittyy tietty energia. Näin on myös magneettikentän laita, sillä Faradayn lain mukaan magneettikentän muuttaminen aiheuttaa muutosta vastustavan voiman ja siten magneettikentän luominen edellyttää työtä.

8.1 Kytkeytyneiden virtapiirien energia

Tarkastellaan yksinkertaista virtasilmuksia, jossa kulkee virta I ja jonka vastus on R . Liitetään virtapiiriin jännitelähde V . Tällöin

$$V + \mathcal{E} = IR \quad (8.1)$$

missä \mathcal{E} on virtasilmuksaan induoituva smv. Jännite tekee työtä siirtämällä varauksia silmuksassa. Differentiaalisen varauksen $dq = I dt$ osalta työ on

$$V dq = VI dt = -\mathcal{E}I dt + I^2 R dt = I d\Phi + I^2 R dt \quad (8.2)$$

Termi $I^2 R dt$ antaa resistiivisen tehon hävikin lämmöksi (Joulen lämmitys). Termi $I d\Phi$ on induoitunutta sähkömotorista voimaa vastaan tehty työ, joka tarvitaan magneettikentän muuttamiseen:

$$dW_b = I d\Phi \quad (8.3)$$

missä alaindeksi b viittaa ulkoisen jännitelähteen (esim. pariston) tekemään työhön.

Tarkastellaan sitten systeemiä, joka koostuu n kappaleesta virtapiirejä:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i \quad (8.4)$$

Oletetaan, että kaikki vuonmuutokset ovat peräisin systeemin silmukoista, jolloin

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (8.5)$$

Oletetaan lisäksi, että silmukat ovat jäykkiä ja paikallaan, jolloin energianmuutoksiin ei liity mekaanista työtä. Tällöin dW_b on yhtäsuuri kuin magneettisen energian muutos dU . (Virrat oletetaan myös riittävän hitaasti muuttuviksi, jolloin ei tarvitse ottaa huomioon säteilyhäviöitä.)

Rajoitetaan tarkastelu yksinkertaiseen väliaineeseen, jossa magneettivuon ja virran välinen suhde on lineaarinen. Lasketaan virtapiirisysteemin energia lähtien tilasta, jossa kaikille virroille $I_i = 0$. Väliaineen lineaarisuudesta johtuen lopullinen magneettinen energia ei riipu tavasta, jolla tila on saavutettu. Näin ollen kaikkien silmukoiden virtaa voidaan kasvattaa nolasta lopputilaan samassa tahdissa eli joka hetki $I'_i = \alpha I_i$, missä α kasvaa $0 \rightarrow 1$. Tällöin $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$ ja systeemin **magneettinen energia** on

$$U = \int dW_b = \int_0^1 \sum_{i=1}^n I'_i \Phi_i d\alpha = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (8.6)$$

Tämä voidaan myös ilmaista summana silmukoiden yli

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \quad (8.7)$$

josta saadaan suoraan yhdelle silmukalle ($M_{11} = L_1 = L =$ silmukan itseinduktanssi)

$$U = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (8.8)$$

Tämän voi rinnastaa kondensaattorin energiaan $Q^2/(2C)$, joka ilmaisee kondensaattorin sähkökenttään varastoituneen energian. Kahdelle silmukalle saadaan

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (8.9)$$

missä otettiin huomioon symmetria $M_{12} = M_{21} = M$. Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että $L_1 L_2 \geq M^2$.

8.2 Magneettikentän energiatiheys

Tarkastellaan ylläolevaa tilannetta magneettikentän näkökulmasta. Oletetaan väliaine edelleen lineaariseksi ja virtapiirit yksinkertaisiksi silmukoiksi. Tällöin magneettivuoksi saadaan Stokesin lauseen avulla

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (8.10)$$

joten magneettinen energia on

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (8.11)$$

siirrytään sitten tilanteeseen, missä sähkövirta on tilavuusvirta \mathbf{J} ja C_i on suljettu lenkki johtavassa väliaineessa. Tilannetta voi ajatella suurena joukkona lähellä toisiaan olevia silmukoita, jolloin $I_i d\mathbf{l}_i \rightarrow \mathbf{J} dV$ ja

$$\sum_i \oint_{C_i} \rightarrow \int_V$$

eli

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (8.12)$$

Sähköstatiikassa energia lausuttiin vastaavasti varaustiheyden ja potentiaalilin integraalina (luku 4.2).

Koska $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ja $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, niin divergenssiteoreemaa käyttämällä saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.13)$$

Fysikaalisesti järkevä oletus on, että virtasilmukat eivät ulotu äärettömyyteen, joten pinta S voidaan siirtää kauas niiden ulkopuolelle. Kenttä \mathbf{H} heikkenee vähintään kuten $1/r^2$ ja vektoripotentiaali \mathbf{A} vähintään kuten $1/r$, mutta pinta kasvaa vain kuten r^2 . Siispä pintaintegraali häviää kuten $1/r$ tai nopeammin r :n kasvaessa rajatta. Tilavuusintegraali voidaan siis ottaa koko avaruuden yli ja tulokseksi tulee

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (8.14)$$

Samoin kuin sähköstaattisen energian tapauksessa voidaan määritellä **magneettinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (8.15)$$

Tulos pätee siis **lineariselle** magneettiselle väliaineelle. Mikäli väliaine on lisäksi isotrooppista, saadaan

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (8.16)$$

Huom. Edellä tarkasteltiin stationaarista tilannetta. Sähkömagneettisen kentän energia yleisessä ajasta riippuvassa tilanteessa käsitellään luvussa 9.

Esimerkki: Koaksiaalikaapelin energiatiheys

Tarkastellaan koaksiaalikaapelia, jonka keskellä on a -säteinen johdin (matemaattisesti sylinteri), sen ulkopuolella sylinterisymmetrisesti eristekerros välillä $a \leq \rho \leq b$, jonka ulkopuolella on jälleen johtava sylinterisymmetrinen kerros $b \leq \rho \leq c$. Oletetaan, että kaikkialla $\mu = \mu_0$. Kulkekoon sisäjohtimessa virta I ja ulkojohtimessa virta $-I$. Suoran johtimen aiheuttama magneettikenttä on Amperen kiertosäännön perusteella

$$\mathbf{B} = B_\theta(\rho) \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I(\rho)}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\theta \quad (8.17)$$

Tarkastellaan sisempää johdinta ($0 \leq \rho \leq a$). Tällöin $I(\rho)/I = (\pi\rho^2)/(\pi a^2)$, joten

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \quad (8.18)$$

ja magneettinen energiatiheys on

$$u_a = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \quad (8.19)$$

Sisemmän johteen yli integroitu energia l :n pituisella matkalla on

$$U_a = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi} \quad (8.20)$$

Johtimien välissä $a \leq \rho \leq b$ kenttä määräytyy sisemmän johtimen kokonaisvirrasta ja vastaavat tulokset ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta b} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ u_b &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2} \\ U_b &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (8.21)$$

missä siis kokonaisenergia tarkoittaa johtimien välisessä alueessa olevaa kokonaisenergiaa. Uloimmassa johtimessa $b \leq \rho \leq c$ vastaavat lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta c} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2}{\rho} - \rho \right) \\ u_c &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2} \left(\frac{c^4}{\rho^2} - 2c^2 + \rho^2 \right) \\ U_c &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2} \left[c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

ja kokonaisenergia on jälleen kyseisen välin yli integroitu energiatiheys. Lopulta koaksiaalikaapelin ulkopuolella kenttä on nolla, joten energiakin on siellä nolla.

8.3 Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin

Siirretään virtapiirijärjestelmän yhtä silmukkaa matka $d\mathbf{r}$. Oletetaan, että silmukoissa kulkevat virrat säilyvät ennallaan. Tällöin siirroksessa tehty työ on

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.23)$$

Työ koostuu kahdesta osasta

$$dW = dW_b - dU \quad (8.24)$$

missä dU on magneettisen energian muutos ja dW_b on ulkoisten lähteiden tekemä työ, jotta virrat säilyvät ennallaan.

Eliminoidaan dW_b olettamalla silmukat jälleen jäykiksi ja lineaarinen väliaine. Magneettisen energian muutos on

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i \quad (8.25)$$

Toisaalta

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i \quad (8.26)$$

joten

$$dW_b = 2 dU \quad (8.27)$$

ja

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.28)$$

eli voima saadaan energian gradienttina olettaen virrat vakioiksi

$$\mathbf{F} = \nabla U \Big|_I \quad (8.29)$$

Käytännössä tilanne on usein sellainen, että virtapiirin liike rajoittuu kiertymiseen jonkin akselin ympäri. Tällöin

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (8.30)$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on magneettinen vääntömomentti ja $d\boldsymbol{\theta}$ on kiertymän kulmaelementti. Vääntömomentti akselin i suhteen on siten

$$\tau_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right)_I \quad (8.31)$$

Tarkasteltu tilanne on siis samantapainen kuin luvussa 4.5 käsitelty järjestely, jossa johdesysteemi pidetään vakiopotentialissa ulkoisen jännitelähteen avulla. Joissain tapauksissa virtapiirien läpi kulkeva magneettinen vuo voidaan puolestaan ajatella vakioiksi. Tällaisiin tilanteisiin joudutaan tarkasteltaessa (lähes) äärettömän hyvin johtavia väliaineita kuten suprajohteita tai

täysin ionisoitunutta harvaa plasmaa. Tällöin mikään ulkoinen lähde ei tee työtä eli $dW_b = 0$ ja

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU \quad (8.32)$$

Nyt voiman ja vääntömomentin komponentit saadaan derivoimalla U :ta pitäen Φ vakiona, mikä vastaa sähköstatiikassa vapaiden johteiden systeemiä.

Käytännön sovellutuksena magneettisesta vääntömomentista voi mainita vaikka avaruusaluksen asennonsäätöjärjestelmän. Maapallon magneettikentän vaikutuksen alaisena olevaan satelliittiin rakennetaan kelajärjestelmä. Kun satelliittia halutaan kääntää, ajetaan keloihin sellaiset virrat, että satelliitti kääntyy haluttuun kulmaan magneettikenttään nähden. Menetelmän etuna on se, että operaatio voidaan tehdä aurinkoenergian avulla, haittana taas kentän pienuudesta johtuva vääntömomentin heikkous ja siten operaation hitaus.

Kahden virtasilmukan välinen voima

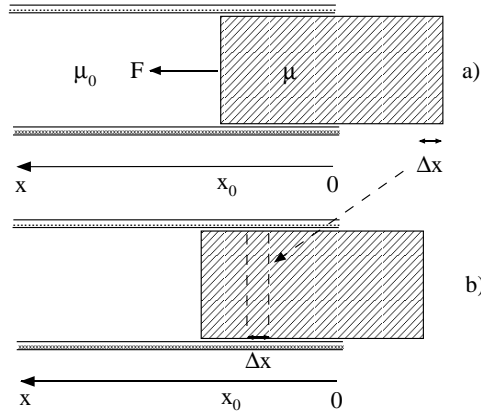
Palataan sitten aivan magnetostatiikan alkuun, missä kerrottiin Ampèren empiirisestä lausekkeesta voimalle kahden virtasilmukan välillä (yhtälö 5.23). Lasketaan sama tulos tämän luvun keinoin. Virtapiiriin 1 aiheuttama voima virtapiiriin 2 on

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_2 M \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \end{aligned} \quad (8.33)$$

missä keskinäisinduktanssi M on ilmaistu von Neumannin kaavan avulla (ks. luku 7). Ensi silmäyksellä näyttää kuin olisimme saaneet eri tuloksen kuin piti. Näin ei kuitenkaan ole, minkä osoittaminen jääköön harjoitustehtäväksi.

Rautatanko solenoidin sisällä

Luvussa 4 tarkasteltiin levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin kohdistuvaa voimaa. Tarkastellaan nyt solenoidin sisällä olevaa rautatankoa, jonka poikkipinta-ala on A ja permeabiliteetti μ . Olkoon solenoidin pituus l ja olkoon sitä kierretty N kierrosta johteella, jossa kulkee vakiovirta I . Vedetään tankoa ulos solenoidista kunnes siitä on enää puolet sisällä ja lasketaan voima, joka yrittää vetää tankoa takaisin (kuva 8.1).



Kuva 8.1: Solenoidiin työnnettyyn rautasauvaan vaikuttava voima.

Ongelma olisi itse asiassa aika vaikea, jos kysyttäisiin alkuperäisen tai lopullisen tilanteen todellista magneettista energiaa, koska silloin olisi huomioitava reunojen vaikutukset. Koska voima on energian gradientti, sen määrittämiseksi riittää tarkastella kahden eri tilan eroa. Tarkastellaan oikean kuvan mukaista lyhyttä siirrosta. Kuvien a) ja b) välinen ero on, että pituusalkio Δx on siirretty kentän ulkopuolisesta osasta solenoidin sisään, kun taas hankalan reunan kohdalla kaikki näyttää samalta molemmissa kuvissa. Koska \mathbf{H} -kenttä on lähes pitkittäinen alueessa Δx ja koska \mathbf{H} -kentän tangentialikomponentti on jatkuva sauvan sylinterinmuotoisen reunan yli, voidaan magneettinen energia laskea lausekkeesta

$$U = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dV \quad (8.34)$$

missä \mathbf{H} on vakio sauvan sisä- ja ulkopuolella, koska I on vakio. Siirroksen jälkeen energia on

$$\begin{aligned} U(x_0 + \Delta x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{2} \int_{A\Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dV \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A \Delta x \end{aligned} \quad (8.35)$$

Koska voima on energian gradientti, se voidaan arvioida tästä

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2} \chi_m \mu_0 H^2 A \quad (8.36)$$

Voima osoittaa x :n positiiviseen suuntaan eli vetää sauvaa solenoidiin. Tilanteesta, jossa magneettivuo Φ on vakio, on yksinkertainen esimerkki harjoituksissa.

