

Luku 9

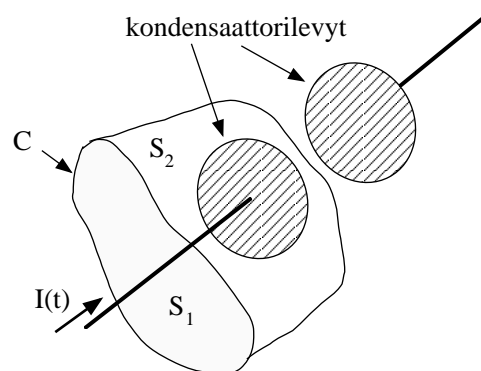
Maxwellin yhtälöt

Oppimateriaali RMC luku 16 ja CL luvut 8–9; esitiedot KSII luku 7 ja KSIII luku 5.

Nyt meillä on koossa elektrodynamiikan peruspilarit sillä tasolla, jolla ne tunnettiin 1860-luvun alussa. Maxwell huomasi yhtälöissä piilevän teoreettisen ongelman: Mitä tapahtuu, jos varaustiheys ja siten sähkökenttä muuttuvat ajallisesti? Ampèren laki on voimassa vain staattiselle systeemille ja ottamalla siitä divergenssi $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}$ nähdään, että $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Varaustiheyden muuttuessa ajallisesti pitäisi kuitenkin **jatkuvuusyhtälön** $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ olla voimassa.

9.1 Siirrosvirta

Tarkastellaan kuvan 9.1 mukaista ajatuskoetta, jossa varataan kondensaattoria sähkövirralla I . Ampèren lain mukaan sähkövirta on silmukkaa C



Kuva 9.1: Ampèren laki varattaessa kondensaattoria

pitkin laskettu integraali

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = I \quad (9.1)$$

missä S_1 on pinta, jonka läpi virta I kulkee. Nyt kuitenkin mikään ei sano, missä silmukan C rajoittaman yhdesti yhtenäisen pinnan tulisi olla, joten pinnaksi pitäisi voida valita myös kondensaattorin levyjen välisen alueen kautta piirretty pinta S_2 , joka ei leikkaa virtaa missään ja

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (9.2)$$

Molemmat integraalit on laskettu matemaattisesti oikein, joten ongelman täytyy olla puutteellisesti ymmärrettyssä fysiikassa. Ratkaisu on siinä, että virta I tuo varausta kondensaattorin levyille eikä varaus poistu systeemistä samaan tahtiin. Virralla on siis divergenssiä pintojen S_1 ja S_2 rajaamassa tilavuudessa.

Tarkastellaan ongelmaa differentiaalimuodossa lähtien varauksen jatkuvuusyhtälöstä

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

Varaustiheys voidaan ilmaista Gaussin lain avulla

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (9.4)$$

joten jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.5)$$

Maxwellin oivallus oli korvata virrantiheys Ampèren laissa ylläolevalla sulku-lausekkeella ja tuloksena oli neljäs Maxwellin laeista

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.6)$$

jota voi hyvällä syyllä kutsua Ampèren ja Maxwellin laiksi. Termiä $\partial \mathbf{D} / \partial t$ kutsutaan **kentänmuutosvirraksi**, **kenttävirraksi** tai **siirrosvirraksi**.

Maxwellin idea siirrosvirrasta oli puhtaasti teoreettinen, sillä sen vaikutus on niin pieni, että mikään tuolloinen mittaus ei ollut ristiriidassa Ampèren lain kanssa. Siirrosvirta alkaa olla verrattavissa johtavuusvirtaan vasta, kun $\omega\epsilon/\sigma > 0.01$ eli johteiden tapauksessa taajuuksien on oltava erittäin korkeita. Eristeissä tilanne on toinen ja jo tavallisessa 50 Hz vaihtovirtapiirissä olevan kondensaattorin läpi kulkeva virta on siirrosvirtaa. Kondensaattorin sisäistä virtaa ei tosin useinkaan tarvitse tarkastella virtapiirianalyysissä.

Koska siirrosvirta tulee näkyviin vasta suurilla taajuuksilla, se liittyy sähkömagneettiseen aaltoliikkeeseen luonnollisella tavalla. Vuonna 1888 Heinrich Hertz todensi siirrosvirran olemassaolon tutkiessaan sähkömagneettisia aaltoja. Tämän jälkeen myös Maxwellin alunperin teoreettinen oivallus sai kokeellisen perustan.

Varauksen **jatkuvuusyhtälö** seuraa nyt Ampèren ja Maxwellin laista yhdessä Gaussin lain kanssa, joten sitä ei tarvitse ottaa mukaan erillisenä yhtälönä. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että varauksen **säilymlaki** seuraaisi Maxwellin yhtälöistä, vaan sitä, että annetussa tilavuudessa varauksen ajallinen muutos kompensoituu alueeseen tulevalle tai siitä poistuvalla sähkövirralla, koska varaus säilyy!

9.2 Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa koko Maxwellin yhtälöiden ryhmä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{9.7}$$

Tässä lähdetermeinä ovat **vapaat varaukset** ρ ja **vapaat virrat** \mathbf{J} . Sidotut varaukset ja virrat on kätkeyty kenttiin \mathbf{D} ja \mathbf{H} . Mikäli kyseessä on tyhjää monimutkaisempi väliaine, tarvitaan lisäksi rakenneyhtälöt $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

Yhtälöryhmä 9.7 ei kuitenkaan ole sen yleisempi tai rajoitetumpi kuin luvussa 1 esitetty ”tyhjömuodossa” kirjoitettu yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{9.8}$$

missä ρ ja \mathbf{J} kuvaavat **kaikkia** varauksia ja virtoja. Esitysmuoto 9.7 on joitain merkintöjä vaille sama, jossa Maxwell itse esitti yhtälönsä. Muotoa 9.8 voi kuitenkin pitää jossain mielessä perustavampana, koska se ei ota mitään kantaa mahdollisen väliaineen sähköisiin tai magneettisiin ominaisuuksiin.

Vaikka usein puhutaan neljästä Maxwellin yhtälöstä, yhtälöryhmässä 9.8 on kuitenkin 8 yhtälöä (2 skalaariyhtälöä ja 6 vektoriyhtälöiden komponenttia). Yhtälöryhmä on **lineaarinen**, joten yhtälöiden ratkaisuille pätee superpositioperiaate. Mikäli lähdeterminit ρ ja \mathbf{J} tunnetaan, on jäljellä 6 tuntematonta ja yhtälöryhmä riittää mainiosti \mathbf{E} :n ja \mathbf{B} :n määrittämiseen. Jos kuitenkin etsitään itseksistenttejä ratkaisuja, tuntemattomia on 10 kpl (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{J} ja ρ), joten systeemistä tarvitaan lisätietoa. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi Ohmin laki ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). Kuten aina differentiaaliyhtälöitä ratkottaessa, myös **reunaehdot** täytyy määrätä oikein.

9.3 Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä

Tarkastellaan seuraavaksi SM-kentän energian ja liikemäärän säilymistä. Käsitellään asia hieman perusteellisemmin kuin RMC:ssä.

9.3.1 Poyntingin teoreema

Oletetaan väliaine yksinkertaiseksi (LIH). Sähköinen ja magneettinen energiatiheys ovat tuttuja käsitteitä luvuista 4 ja 8:

$$u_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (9.9)$$

$$u_m = \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (9.10)$$

Koska pyrimme tutkimaan näiden ajallista muutosta, etsimme Maxwellin yhtälöistä termejä, jotka sisältävät kenttien aikaderivaattoja. Ottamalla Ampèren ja Maxwellin lain skalaaritulo \mathbf{E} :n kanssa ja vähentämällä siitä Faradayn lain skalaaritulo \mathbf{H} :n kanssa päästään liikkeelle oikeaan suuntaan

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9.11)$$

Yhtälön vasen puoli voidaan vielä kirjoittaa muotoon $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. LIH väliaineen ϵ , μ ja σ eivät riipu ajasta, joten

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (9.12)$$

ja vastaavasti magneettikentälle. Näin olemme saaneet yhtälön

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (9.13)$$

Yhtälön oikealla puolella on sähkömagneettisen energian ajallinen muutos sekä sähkömagneettisen kentän varauksille luovuttamaa energiaa kuvaava termi. Integroidaan yhtälö annetun tilavuuden yli

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad (9.14)$$

Käyttämällä divergenssiteoreemaa tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV + \oint_{\partial V} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da \quad (9.15)$$

missä tilavuuden V reuna on nyt kirjoitettu sekaannusten välttämiseksi ∂V ja pintaelementti da .

Jos tilavuudessa V ei ole työtä tekevää sähkömotorista voimaa, yhtälön vasen puoli on aina negatiivinen ja vastaa sähkömagneettisen energian disipoitumista Joulen lämmityksenä. Jos alueessa jokin prosessi tekee mekaanista työtä, voi yhtälön vasen puoli olla myös positiivinen ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} < 0$). Tällöin kyseessä on jonkinlainen generaattori, joka muuttaa mekaanista energiaa sähkömagneettiseksi energiaksi. Yhtälön oikealla puolella on puolestaan sähkömagneettisen energian ajallinen muutos ja termi, joka kuvaa vektorin

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (9.16)$$

vuota aluetta rajaavan pinnan läpi. Vektoria \mathbf{S} kutsutaan **Poyntingin vektoriksi** ja yhtälöä 9.15 **Poyntingin teoreemaksi**. Poyntingin teoreema ilmaisee **sähkömagneettisen kentän energian säilymlain**: SM-kentän energian muutos aikayksikössä on yhtä suuri kuin kentän varauksiin tekemän työn ja tarkasteltavaa varausjoukkoa rajaavan pinnan läpi virtaavan Poyntingin vuon summa.

Differentiaalinen Poyntingin teoreema voidaan kirjoittaa säilymlakimuodossa

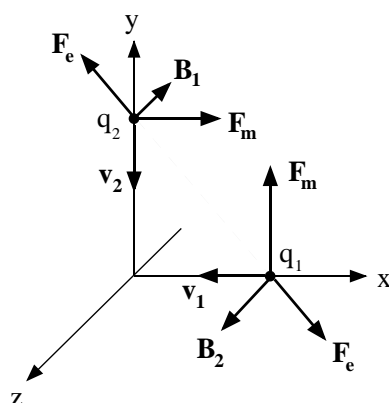
$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (9.17)$$

Tulkitsemalla \mathbf{S} energiavuoksi nähdään, että SM-kentän lähteinä tai nieluina on mekaaninen työ. Kokonaisenergia tietenkin säilyy eli

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{em} + u_{mech}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (9.18)$$

Poyntingin vektorin $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ tulkinta ”energian kuljettajana” johtaa erikoiselta vaikuttaviin tilanteisiin yksinkertaisissakin esimerkeissä, joista tasavirtajohdinta käsitellään harjoituksissa. Ei ole itsestään selvää, että Poyntingin vektorin ”oikea” lauseke on 9.16. Poyntingin teoreeman differentiaalimuodosta nähdään, että vektoriin \mathbf{S} voitaisiin lisätä roottorikenttä. Monimutkaisempiakin muunnelmia on olemassa, mutta silloin myös energiatiheyksien lausekkeita on muutettava. Oleellista on, että energian säilymlaki pätee. Pohjimmiltaan kyse on siitä, ettei sähkömagneettisen kentän energiaa voida paikallistaa.

Yllä oletettiin LIH väliaine. Isotropiaa ei varsinaisesti käytetty, mutta myös epäisotrooppisessa väliaineessa vektorin \mathbf{S} tulkinta voi olla ongelmallinen. Olennaista on jälleen, että säilymlaissa on $\nabla \cdot \mathbf{S}$, joten säilymlaki



Kuva 9.2: Rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymislakia?

on yhä voimassa. Suurempia monimutkaisuksia tulee ajassa tai paikassa epähomogeenisten sekä epälineaaristen väliaineiden kanssa. Ongelmat liittyvät usein SM-aaltoihin. Epähomogeenisuus aiheuttaa dispersiota eli aaltopakettit hajoavat matkan varrella ja epälineaarisuus taas jakaa energiaa eri taajuuksille. Eteentulevat ongelmat ovat sekä tärkeitä että mielenkiintoisia, mutta tämän kurssin ulkopuolella.

9.3.2 Maxwellin jännitystensori

Tarkastellaan kuvan 9.2 kaltaista tilannetta. Kaksi samanmerkkistä varausta (q_1 ja q_2) liikkuu negatiivisten x - ja y -akselien suuntaan. Oletetaan, että hiukkaset ovat jonkinlaisilla kiskoilla, mikä pakottaa ne jatkamaan matkaansa huolimatta liikettä poikkeuttavista voimista. Hiukkasten välillä on sähköinen poistovoima \mathbf{F}_e . Varauksen q_1 aiheuttama magneettikenttä varauksen q_2 kohdalla osoittaa sivun sisään ja magneettinen voima \mathbf{F}_m oikealle. Vastaavasti varauksen q_2 aiheuttama magneettikenttä varauksen q_1 kohdalla osoittaa sivulta ulospäin ja magneettinen voima ylöspäin. Siispä varauksen q_1 varaukseen q_2 kohdistama sähkömagneettinen kokonaisvoima ei ole vastakkaisuuntainen varauksen q_2 varaukseen q_1 kohdistamaan voimaan. Onko siis jouduttu ristiriitaan Newtonin kolmannen lain kanssa ja sitä tietä ristiriitaan liikemäärän säilymislain kanssa!?

Vastaus on kielteinen. Ratkaisu on siinä, että SM-kentällä on energian lisäksi **liikemäärää**. Säilyvä suure on hiukkasten ja kenttien yhteenlaskettu liikemäärä. Tämän tarkastelemiseksi on tutustuttava Maxwellin jännitystensoriin.

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi väliainetta, jolle $\epsilon = \epsilon_0$ ja $\mu = \mu_0$. Kaikkien tilavuudessa V olevien hiukkasten liikemäärien summa \mathbf{p}_{mech}

noudattaa Newtonin toista lakia

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} = \int_V \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (9.19)$$

joten **voimatiheys** on

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (9.20)$$

Eliminoidaan ρ ja \mathbf{J} Maxwellin yhtälöiden avulla, jolloin

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \quad (9.21)$$

Nyt

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (9.22)$$

missä viimeisessä termissä on käytetty Faradayn lakia. Voimatiheys on siten

$$\mathbf{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9.23)$$

Lauseke saadaan symmetrisemmäksi lisäämällä termi $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/\mu_0$, joka on aina nolla. Kenttien roottorilausekkeet voi kirjoittaa auki kaavalla

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (9.24)$$

ja samoin \mathbf{B} :lle. Näin voimatiheys on saatu muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Tämä näyttää pahalta, mutta siistiytyy määrittelemällä **Maxwellin jännitystensori** \mathcal{T} , jonka komponentit ovat

$$\mathcal{T}_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (9.26)$$

Tensorin \mathcal{T} divergensi on vektori, jonka komponentit ovat

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathcal{T})_j = & \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \end{aligned} \quad (9.27)$$

Nämä ovat Poyntingin vektorin aikaderivaattaa vaille voimatiheyden komponentit, joten

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathcal{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (9.28)$$

Integroidaan tämä tilavuuden V yli ja kirjoitetaan jännitystensorista riipuva osa pintaintegraaliksi. Tällöin kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \quad (9.29)$$

Jännitystensorin kirjoittaminen pintaintegraalina kertoo, että staattisessa tilanteessa sähkömagneettinen kokonaisvoima määräytyy jännitystensorista pelkästään tarkasteltavan alueen reunalla. Siis \mathcal{T} laskettuna alueen reunalla jotenkin pitää sisällään voimien kannalta olennaisen tiedon kenttien energiasta koko alueessa.

Voimien laskeminen jännitystensorista ei rajoitu elektrodynamiikkaan. Mekaniikasta tuttu energia-impulssitensori on formaalisti samanlainen otus, yleinen suhteellisuusteoria formuloidaan Einsteinin tensorin avulla, jne.

Esimerkki. Johdepalloon vaikuttava sähköstaattinen voima.

Asetetaan ohut johtava pallonkuori (säde a) homogeeniseen sähkökenttään \mathbf{E}_0 . Osoitetaan, että kentän suuntaan vastakkaisia pallonkuoren puolikkaita repii eri suuntiin voima $F = \frac{9}{4}\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2$.

Sähkökenttä määritettiin jo luvussa 2.9. Pallon pinnalla sähkökentällä on vain radiaalinen komponentti $E_r(r = a) = 3E_0 \cos \theta$. Harjoitustehtävänä on osoittaa, että staattisessa sähkökentässä olevaan johdekappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_S \sigma_s \mathbf{E} dS \quad (9.30)$$

missä σ_s on varaustiheys johteen pinnalla S . Käsiteltävässä esimerkissä symmetriasta seuraa, että pallon ylempään puoliskoon ($0 < \theta < \pi/2$) vaikuttava voima on z -akselin suuntainen ($F_+ \mathbf{e}_z$) ja alempaan puoliskoon ($\pi/2 < \theta < \pi$) vaikuttava voima on $\mathbf{F}_- = -\mathbf{F}_+$. Koska pallon pinnalla $\sigma_s = \epsilon_0 E_r(a)$, niin

$$F_+ = \int \mathbf{e}_z \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 E_r^2(a) \mathbf{e}_r = \frac{9}{2} \epsilon_0 E_0^2 a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^3 \theta = \frac{9}{4} \pi \epsilon_0 a^2 E_0^2 \quad (9.31)$$

9.3.3 Liikemäärän säilyminen

Palataan sitten takaisin kysymykseen liikemäärän säilymisestä. Newtonin toisen lain mukaan hiukkaseen vaikuttava voima on yhtä suuri kuin sen liikemäärän aikaderivaatta

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mech}}{dt} \quad (9.32)$$

missä alaindeksi *mech* viittaa mekaaniseen liiketilan muutokseen. Toisaalta olemme edellä ilmaisseet sähkömagneettisen voiman jännitystensorin avulla, joten

$$\frac{d\mathbf{p}_{mech}}{dt} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \quad (9.33)$$

Tämän voi tulkita samaan tapaan kuin Poyntingin teoreeman. Oikean puolen ensimmäinen termi kertoo liikemäärän virtauksen aikayksikössä pinnan ∂V läpi ja jälkimmäinen termi puolestaan kenttiin kertyneen liikemäärän muutoksen. Siis **sähkömagneettisen kentän liikemäärä** on

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbf{S} dV \quad (9.34)$$

Yhteenlasketun sähkömagneettisen ja mekaanisen liikemäärän muutos vastaa tarkastelualueeseen kenttien mukanaan tuomaa liikemäärää. Jos tilavuus on koko avaruus, vuosuure on nolla ja silloinkin kokonaisliikemäärä säilyy.

Olkoon \hat{p}_{mech} mekaaninen liikemäärätiheys. Määritellään vastaavasti SM-kentän **liikemäärätiheys**

$$\hat{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \quad (9.35)$$

Tällöin liikemäärän säilyminen voidaan ilmaista differentiaalimuodossa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{p}_{mech} + \hat{p}_{em}) = \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (9.36)$$

Todetaan vielä lopuksi, että sähkömagneettisella kentällä on myös **impulssimomenttia**. Impulssimomentin tiheys määritellään

$$\hat{l}_{em} = \mathbf{r} \times \hat{p}_{em} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \quad (9.37)$$

Myös kokonaisimpulssimomentti on säilyvä suure.

9.4 Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla

Luvuissa 3 ja 6 käsiteltiin staattisten sähkö- ja magneettikenttien reunaehtoja kahden aineen rajapinnalla. Magneettikentän normaalikomponentille saatiin yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pillerirasiakikalla reunaehto

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (9.38)$$

Tämä pätee tietenkin myös ajasta riippuvassa kentässä.

Tarkastellaan sitten sähkökentän tangentialikomponenttia. Sähköstaattisen yhtälön $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ sijasta on käytettävä Faradayn lakia

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.39)$$

Tehdään samanlainen suorakulmainen silmukka kuin luvussa 3 ja integroidaan Faradayn laki silmukan sulkeman pinnan yli

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.40)$$

Sovelletaan Stokesin teoreemaa lausekkeen vasemmalle puolelle ja suoriteetaan viivaintegraalit:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1E_{1n} + h_2E_{2n} - h_1E'_{1n} - h_2E'_{2n} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.41)$$

missä l on silmukan pituus rajapinnan suunnassa, h_1 ja h_2 ovat silmukan etäisyydet rajapinnasta kummankin väliaineen puolella ja E_{in} ja E'_{in} ottavat huomioon, että sähkökentän normaalikomponentit saattavat poiketa toisistaan silmukan eri päissä. Kun silmukka litistetään nollapaksuiseksi häviävät sähkökentän normaalikomponenttien termit ja samoin yhtälön oikea puoli sillä edellyksellä, että $\partial \mathbf{B} / \partial t$ pysyy äärellisenä. Lopullisesta yhtälöstä voi supistaa l :n ja jäljelle jää sama reunaehto kuin sähköstatiikassa

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (9.42)$$

\mathbf{D} -vektorin normaalikomponentin reunaehto on monimutkaisempi, koska nyt pintavaraustiheys voi muuttua. Sekaannusten välttämiseksi merkitään johdavuutta σ :lla ja pintavaraustiheyttä σ_s :llä. Tarkastellaan yhtälöä $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ pillerirasialaskalla, joka antaa samannäköisen tuloksen kuin sähköstatiikassa

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s \quad (9.43)$$

Toisaalta varaustiheyden muutosta kontrolloi jatkuvuusyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.44)$$

Tehdään tällekin pillerirasialasku, joka antaa

$$J_{1n} - J_{2n} = - \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \quad (9.45)$$

joten lopputulos riippuu pintavaraustiheyden ajallisesta muutoksesta.

Rajoitetaan tarkastelu yksinkertaiseen aaltoliikkeeseen eli oletetaan sähkökentän olevan muotoa $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Tällöin voidaan korvata $\partial / \partial t \rightarrow -i\omega$ ja yhtälön oikealla puolella on $i\omega\sigma_s$. Olettamalla lineaarinen väliaine ja käyttämällä rakenneyhtälöitä $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ja $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ voidaan D_n :n ja J_n :n reunaehdot kirjoittaa yhtälöparina

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} &= \sigma_s \\ \sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} &= i\omega\sigma_s \end{aligned} \quad (9.46)$$

Jos pintavaraustiheys häviää, on oltava $\epsilon_1/\sigma_1 = \epsilon_2/\sigma_2$, mikä voidaan saada aikaan valitsemalla sopivat väliaineet. Samoin käy myös kahden erittäin hyvän eristeen rajapinnalla, jolloin johtavuudet häviävät. Yleisesti σ_s ei häviä, joten se voidaan eliminoida yhtälöparista ja sähkökentän normaalikomponentille on voimassa reunaehto

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{\sigma_1}{\omega}\right)E_{1n} - \left(\epsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega}\right)E_{2n} = 0 \quad (9.47)$$

Tarkasteltaessa \mathbf{H} -vektorin tangentialikomponenttia täytyy kentänmuutosvirta huomioida

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (9.48)$$

Tangentialikomponentin reunehto löytyy jälleen suorakulmaisesta silmukasta. Samoin kuin Faradayn laissa oletettiin $\partial \mathbf{B}/\partial t$:n pysyvän äärellisenä silmukkaa kutistettaessa, nyt pidetään $\partial \mathbf{D}/\partial t$ äärellisenä ja jäljelle jää magnetostatiikasta tuttu reunaehto

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp} \quad (9.49)$$

missä j_{\perp} on pintavirran tiheyden komponentti, joka on kohtisuorassa tarkasteltavaa H -komponenttia vastaan. Pintavirrantiheys on nolla, jos väliaineen johtavuus on äärellinen. Siis ellei väliaineen johtavuus ole ääretön, magneetikentän tangentialikomponentti on jatkuva.

Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa väliaineen 2 johtavuus on ääretön. Ampèren ja Maxwellin laki väliaineelle 2 on

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} = \mathbf{J}_2 \quad (9.50)$$

Olettamalla harmoninen aikariippuvuus $e^{-i\omega t}$ ja käyttämällä rakenneyhtälöitä saadaan

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2 \quad (9.51)$$

Jos $\nabla \times \mathbf{H}_2$ on rajoitettu, niin ehto $\sigma_2 \rightarrow \infty$ edellyttää, että $\mathbf{E}_2 = 0$. Olettaen myös \mathbf{H}_2 :n aikariippuvuus harmoniseksi Faradayn laki ja lineaarinen rakenneyhtälö $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ antavat

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (9.52)$$

ja siten myös \mathbf{H}_2 häviää. Tämä kaikki tarkoittaa sitä, että sähkömagneettinen aalto ei etene äärettömän hyvään johteeseen. Reunaehdoksi tulee tällöin

$$H_{1t} = j_{\perp} \quad (9.53)$$

9.5 Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet

9.5.1 Aaltoyhtälö tyhjässä

Siirrosvirtatermin ansiosta Maxwellin yhtälöillä on ratkaisunaan **sähkömagneettinen aaltoliike**. Tarkastellaan tilannetta ensiksi tyhjässä ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Ottamalla roottori Ampèren ja Maxwellin laista saadaan

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (9.54)$$

josta kirjoittamalla vasemman puolen roottorit auki ja käyttämällä magneettikentän lähteettömyyttä saadaan aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.55)$$

Ottamalla puolestaan roottori Faradayn laista ja huomioimalla, että myöskään sähkökentällä ei ole tyhjässä lähteitä, saadaan sähkökentälle sama yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (9.56)$$

Tällainen aalto etenee nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ eli valon nopeudella.

9.5.2 Potentiaaliesitys

Tarkastellaan seuraavaksi Maxwellin yhtälöiden ratkaisemista olettamalla kenttien lähteet ρ ja \mathbf{J} tunnetuiksi. Esitetään tarkastelu tyhjänkaltaisessa väliaineessa (ϵ_0, μ_0) kentille \mathbf{E} ja \mathbf{B} . Tarkastelun siirtäminen lineaariseen väliaineeseen on suoraviivaista.

Ongelmaa on tehokkainta lähestyä käyttämällä kenttien skalaari- ja vektoripotentiaaleja ϕ ja \mathbf{A} . Ensinnäkin yhtälö $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implikoi tutun relaation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sijoittamalla tämä Faradayn lakiin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (9.57)$$

Fysikaalisen siisteille kentille aika- ja paikkaderivaattojen järjestyksen voi vaihtaa, joten

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.58)$$

eli voidaan kirjoittaa $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi$. Sähkökenttä on siis muotoa

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.59)$$

eli sähköstaattisen potentiaalin lisäksi Faradayn laki tuo vektoripotentiaalin aikamuutoksesta johtuvan osuuden sähkökenttään. Näin kenttien kuusi komponenttia on ilmaistu neljän muuttujan (φ , \mathbf{A}) avulla. Tähän on tarvittu neljä Maxwellin yhtälöiden kahdeksasta skalaarikomponentista, joten meillä on jäljellä neljä yhtälöä neljän tuntemattoman ratkaisemiseen. Jäljelläolevat Coulombin ja Ampèren ja Maxwellin lait saadaan muotoon

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.60)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0\mathbf{J} \quad (9.61)$$

Saatu yhtälöryhmä näyttää pahemmalta kuin alkuperäiset Maxwellin yhtälöt, mutta sille löytyy käteviä ratkaisumenetelmiä. Koska kentät \mathbf{E} ja \mathbf{B} muodostuvat potentiaalien derivaatoista, voidaan potentiaaleihin lisätä sellaisia tekijöitä, jotka katoavat derivoitaessa. Tätä ominaisuutta kutsutaan **mittainvarianssiksi**. Yksi tapa säilyttää alkuperäiset kentät on edellyttää

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (9.62)$$

Tätä ehtoa kutsutaan **Lorentzin ehdoksi** ja kyseistä mitta **Lorentzin mitaksi**. Tällainen muunnos voidaan aina tehdä.

Lorentzin mitassa jäljellä olevat yhtälöt redusoituvat **epähomogeeniseksi aaltoyhtälöiksi**

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.63)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \quad (9.64)$$

joille tunnetaan yleisiä ratkaisumenetelmiä.

9.5.3 Viivästyneet potentiaalit

Edellä on löydetty itse asiassa neljä karteesisissa koordinaateissa toisistaan riippumatonta skalaariyhtälöä, joten ratkaisumenetelmän kannalta riittää tarkastella yhtälöä φ :lle.

Mikäli kyseessä olisi staattinen kenttä, meillä olisi tuttu Poissonin yhtälö, jonka ratkaisuja ovat Laplacen yhtälön yleiset ratkaisut sekä jokin Poissonin yhtälön erikoisratkaisu. Ratkaistaan aaltoyhtälö ensin yhdelle varaukselle, joka on sijoitettu origoon. Tällöin homogeenisen aaltoyhtälön

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0 \quad (9.65)$$

on toteuduttava kaikkialla muualla kuin origossa. Pienessä alueessa origon ympärillä puolestaan

$$\int_{\Delta V} dV \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q(t) \quad (9.66)$$

Koska tilanne on pallosymmetrinen, $\varphi = \varphi(r)$ ja homogeeninen aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa pallokoordinaatistossa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.67)$$

Tämä palautuu yksiulotteiseksi aaltoyhtälöksi sijoituksella

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (9.68)$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.69)$$

ja tällä on tutut $\pm r$ -suuntiin etenevät ratkaisut

$$\chi = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (9.70)$$

Näistä $f(r - ct)$ etenee pois päin varauksesta ja $g(r + ct)$ etenee kohti varausta. Koska haluamme ymmärtää varauksen vaikutusta ympäristöönsä, meille riittää tarkastella ratkaisua f .

Olemme siis löytäneet homogeeniselle aaltoyhtälölle pallosymmetrisen ratkaisun

$$\varphi = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (9.71)$$

ja nyt pitäisi määrittää funktion f muoto. Staattisessa tapauksessa potentiaali on

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.72)$$

ja nyt $q = q(t)$. Kirjoitetaan f ajan funktiona $f(t - r/c)$, missä vakio $-c$ on upotettu määrättävään funktioon itseensä. Näin ollen ajanhetkellä $t - r/c$ on voimassa

$$f(t - r/c) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (9.73)$$

ja yksittäisellä varauksen epähomogeenisella aaltoyhtälöllä on ratkaisu

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.74)$$

Integroimalla kaikkien varausten yli saadaan lopulta ratkaisu

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.75)$$

missä $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ on **viivästynyt aika**. Potentiaalia φ kutsutaan **viivästyneeksi skalaaripotentialiksi**, koska se huomioi ajan, joka kuluu kustakin pisteestä tarkastelupisteeseen nopeudella c etenevältä signaalilta.

Vektoripotentialin aaltoyhtälön kukin komponentti on matemaattisesti aivan samanlainen kuin skalaripotentialin aaltoyhtälö

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_i = -\mu_0 J_i \quad (9.76)$$

joten jokaiselle komponentille on olemassa sama ratkaisu. Kokoamalla kaikki komponentit yhteen saadaan **viivästynyt vektoripotentiali**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.77)$$

Olemme siis saaneet määritetyksi skalaari- ja vektoripotentialit annettujen varaus- ja virtajakautumien funktioina. Sähkö- ja magneettikentät saadaan näistä suoraviivaisesti: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ja $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Olemme siis ratkaisseet Maxwellin yhtälöt annetuille varaus- ja virtajakautumille. Käytännössä derivaattojen laskeminen on kuitenkin varsin työlästä.

Tutustumme kurssin lopulla suppeamman suhteellisuusteorian formalismiin, jossa vektori- ja skalaaripotentialien aaltoyhtälöt voidaan koota **nelipotentialin** $A^\alpha = (\varphi, A_i)$ aaltoyhtälöksi

$$\partial^2 A^\alpha \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\alpha = -j^\alpha \quad (9.78)$$

missä **nelivirran** j^α komponentit ovat $(\rho/\epsilon_0, \mu_0 J_i)$.

Osoittautuu, että Maxwellin yhtälöt ovat Lorentz-invariantteja eli valmiiksi kelvollisia suhteellisuusteorian pätevyysalueelle. Historiallisesti juuri elektrodynamiikka johti Einsteinin suhteellisuusteorian jäljille.

9.5.4 Aaltoyhtälön Greenin funktio

Tarkastellaan aaltoyhtälön ratkaisua käyttämällä luvussa 2.11 esitettyä Greenin funktion ideaa. Sekä \mathbf{A} :n että φ :n aaltoyhtälöt ovat muotoa

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t) \quad (9.79)$$

missä $f(\mathbf{r}, t)$ on tunnettu lähde-termi. Tehdään sekä ψ :lle että f :lle Fourier-muunnos ajan suhteen

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega ; f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (9.80)$$

Sijoittamalla nämä aaltoyhtälöön ja merkitsemällä $k = \omega/c$ saadaan Fourier-komponenteille

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{r}, \omega) \quad (9.81)$$

Tämä on **epähomogeeninen Helmholtzin aaltoyhtälö**, joka tapauksessa $k = 0$ palautuu Poissonin yhtälöksi. Sen Greenin funktion täytyy toteuttaa yhtälö

$$(\nabla^2 + k^2) G_k(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.82)$$

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on silloin

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \int G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) f(\mathbf{r}', \omega) dV' \quad (9.83)$$

johon voidaan lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja.

Koska aaltoyhtälöä joudutaan käytännössä ratkomaan heijastavien reunojen, aaltoputkien jne. yhteydessä, Greenin funktion muoto riippuu ongelman reunaehdoista (vrt. pallon Greenin funktio luvussa 2.11). Tarkastellaan nyt vain reunatonta avaruutta, jolloin G_k on pallosymmetrinen ja riippuu ainoastaan tarkastelupisteen ja lähdepisteen etäisyydestä $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Kirjoitetaan ∇^2 pallokoordinaateissa

$$\nabla^2 G_k = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial G_k}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R G_k) \quad (9.84)$$

Koska R on ainoa muuttuja, voidaan käyttää kokonaisderivaattaa

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9.85)$$

Muualla kuin pisteessä $R = 0$ tämä yksinkertaistuu yhtälöksi

$$\frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 (R G_k) = 0 \quad (9.86)$$

jonka ratkaisut ovat

$$R G_k = A e^{ikR} + B e^{-ikR} \quad (9.87)$$

Rajalla $R \rightarrow 0$, $kR \ll 1$ ja (9.85) palautuu Poissonin yhtälöksi, jonka ratkaisu käyttäytyy kuten $1/R$. Tämä antaa sidosehdon $A + B = 1$ ja Greenin funktio on muotoa

$$G_k(R) = A G_k^+(R) + B G_k^-(R) \quad (9.88)$$

missä $G_k^\pm = e^{\pm ikR}/R$. G_k^+ kuvaa origosta pois päin etenevää palloaaltoa ja G_k^- origoon tulevaa palloaaltoa aivan kuten edellisessäkin jaksossa esitettyssä ratkaisussa.

A ja B määräytyvät reunaehdoista **ajan** suhteen. Jos lähde on hiljaa hetken $t = 0$ asti ja alkaa sitten vaikuttaa, ulospäin etenevä ratkaisu $A G_k^+$

on fysikaalisesti mielekäs valinta, mutta jos aallon amplitudi on annettu sopivilla reunaehdoilla, myös $B G_k^-$ voi olla käyttökelpoinen.

Tarkastellaan sitten **ajasta riippuvaa** Greenin funktiota, joka toteuttaa yhtälön

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (9.89)$$

Koska

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} \quad (9.90)$$

voidaan lähdetermi yhtälössä 9.82 kirjoittaa muodossa $-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{i\omega t'}$ ja ajasta riippuva Greenin funktio on

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (9.91)$$

missä $\tau = t - t'$. Äärettömän avaruuden Greenin funktio riippuu siis vain lähteen ja havaitsijan välisestä etäisyydestä R ja aikaerosta $t - t'$. Koska $k = \omega/c$, voidaan ω -integraali laskea ja lopputulos on

$$G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - [t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c]) \quad (9.92)$$

Nyt G^+ on **viivästynyt** Greenin funktio ja G^- puolestaan **edistynyt** Greenin funktio.

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on siis

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (9.93)$$

johon voi lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja. Viivästyneelle Greenin funktiolle ratkaisu on tietenkin sama kuin luvussa 9.5.3 suuremmalla laskulla löytynyt ratkaisu. Tässä esitetty menetelmä on kuitenkin yleisempi ja käyttökelpoisempi tarkasteltaessa monimutkaisempia olosuhteita kuin yksinkertaista lähdettä reunattomassa avaruudessa.

9.6 Mittainvarianssi

Aaltoyhtälön ratkaisu helpottui valitsemalla sopiva mitta. Tämän teki mahdolliseksi Maxwellin yhtälöiden tärkeä ominaisuus: **mittainvarianssi**. Tämä tarkoittaa sitä, että kenttien potentiaaleja voidaan muuttaa tietyllä yleisellä

tavalla ilman, että kentät itse muuttuvat. Elektrodynamiikan mittamuunnokset ovat muotoa

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \quad (9.94)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t \quad (9.95)$$

Funktiota Ψ kutsutaan **mittafunktioksi** ja se voidaan valita usealla eri tavalla eli on olemassa suuri joukko erilaisia mittoja. Yksi näistä on siis edellä käytetty Lorentzin mittaehto

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0 \quad (9.96)$$

Voidaan osoittaa, että Lorentzin mittaehtoon toteuttava funktio Ψ on aina olemassa, mutta se ei ole yksikäsitteinen.

Lorentzin mitan etu on, että sitä käytettäessä yhtälöiden Lorentz-kovarianssi näkyy eksplisiittisesti ja tulokset on suoraviivaista siirtää koordinaatistosta toiseen. Käytännön laskut voivat kuitenkin olla hyvin monimutkaisia.

Useissa tapauksissa laskennallisesti yksinkertaisempi vaihtoehto on **Coulombin mitta**, jonka mittaehto on

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \quad (9.97)$$

Nyt vektoripotentialiaali saadaan muunnoksella

$$\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (9.98)$$

joka määrittää mittafunktion (additiivista vakiota vaille) yksikäsitteisesti, jos $\mathbf{A} \rightarrow 0$ ja $\varphi \rightarrow 0$, kun $r \rightarrow \infty$. Coulombin mitassa skalaaripotentialiaali ratkaistaan yhtälöstä 9.60

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.99)$$

Huom. Nyt aika ei ole viivästetty vaan skalaaripotentialiaali määräytyy samanaikaisesta varausjakautumasta kaikkialla. Tämä merkitsee, että Coulombin mitta ei ole Lorentz-kovariantti. Koska Coulombin mitta on kuitenkin kelvollinen mitta Maxwellin yhtälöille, tästä ei seuraa ristiriitaa kenttien \mathbf{E} ja \mathbf{B} osalta. Coulombin mittaa käytettäessä on kuitenkin oltava tarkkana koordinaatistonmuutosten kanssa.

Coulombin mitassa vektoripotentialialille tulee aaltoyhtälö

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu_0\mathbf{J} \quad (9.100)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi on pyörteetön. Helmholtzin teoreeman mukaan vektorikenttä \mathbf{F} voidaan jakaa pyörteettömään ja lähtettömään osaan

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t ; \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 ; \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0$$

missä l viittaa **pitkittäiseen** (longitudinaaliseen, pyörteettömään) ja t **poikittaiseen** (transversaaliseen, lähteettömään) osuuteen. Käyttämällä virran jatkuvuusyhtälöä aaltoyhtälö saadaan muotoon (ks. esim. Jackson)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t \quad (9.101)$$

Koska vektoripotentiali määräytyy vain virran poikittaisesta komponentista, Coulombin mitta kutsutaan usein poikittaismitaksi. Se tunnetaan myös nimellä säteilymitta, koska sähkömagneettiset säteilykentät saadaan lasketuksi viivästyneestä vektoripotentialista

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_t(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (9.102)$$

mikä on olennaisesti helpompaa kuin säteilykenttien laskeminen Lorentzin mitasta.

Coulombin mitta separoi annetussa koordinaatistossa sähkökentän staattiseen (s) ja induktiiviseen (i) osaan

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\varphi ; \mathbf{E}_i = -\partial\mathbf{A}/\partial t \quad (9.103)$$

Huom. Tämä separaatio ei ole Lorentz-kovariantti: Yhdessä koordinaatistossa esiintyvä sähköstaattinen kenttä voidaan hävittää siirtymällä sopivalta nopeudella liikkuvaan koordinaatistoon. Tämä ilmiö on läheisesti tekemisissä Faradayn lain yhteydessä käsitellyn liikkeen indusoiman ja oikean sähkömotorisen voiman välisen yhteyden kanssa.

Klassinen elektrodynamiikka on ensimmäinen esimerkki mittainvariantista fysiikan perusteorioista. Mittakentän käsitteestä on tullut erittäin keskeinen osa fysiikan perusteorioissa kuten kvanttielektrodynamiikassa, sähköheikon vuorovaikutuksen teoriassa, kvanttikromodynamiikassa ja näitä yhdistävissä yhtenäiskenttäteorioissa. Esimerkkinä käyköön vuoden 1999 Nobelin palkinto, jonka saivat Gerardus t'Hooft ja Martinus Veltman töistään kvanttikromodynamiikan ei-abelisten mittakenttien parissa.

