

## Luku 10

# Sähköiset ja magneettiset materiaalit

Aiemmat 9 lukua ovat esitelleet klassisen elektrodynamiikan peruskäsitteet ja teorian perusrakenteen. Alamme nyt perehtyä elektrodynamiikan käyttöön erilaisissa ongelmissa. Tarkastellaan aluksi aineen sähköisiä ja magneettisia ominaisuuksia mikroskooppisella tasolla. Erityisesti magnetismin osalla on tyydyttävä varsin kvalitatiiviseen kuvailuun, koska tarkka käsittely vaatisi varsin pitkälle menevää kvanttimekaniikkaa. Tämän luvun aineisto on peräisin useammasta lähteestä (mm. Feynman, Jackson, RMC).

Palautetaan ensin mieleen Maxwellin yhtälöt tilanteessa, jossa väliaine kuvataan polarisoituman  $\mathbf{P}$  ja magnetoituman  $\mathbf{M}$  avulla:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{vapaa} \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.3)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_{vapaa} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (10.4)$$

Tässä  $\rho_{vapaa}$  sisältää muut varaukset kuin polarisaatiovarauksen ja  $\mathbf{j}_{vapaa}$  muut virrat kuin magnetoitumisvirran. Määrittelemällä sähkövuon tiheys  $\mathbf{D}$  ja magneettikentän voimakkuus  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (10.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (10.6)$$

voidaan Maxwellin yhtälöt väliaineessa esittää muodossa

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{vapaa} \quad (10.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{vapaa} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.10)$$

Sähkökenttä  $\mathbf{E}$  ja magneettivuon tiheys  $\mathbf{B}$  ovat suureet, jotka lopulta halutaan määrittää. Tätä varten on tunnettava rakenneyhtälöt esimerkiksi muodossa  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  ja  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

## 10.1 Molekulaarinen polarisoituvuus

Tarkastellaan yksinkertaista väliainetta, jossa yksittäisen molekyylin dipolimomentti  $\mathbf{p}_m$  on verrannollinen polarisoivaan sähkökenttään  $\mathbf{E}_m$ :

$$\mathbf{p}_m = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_m \quad (10.11)$$

Suuretta  $\alpha$  kutsutaan polarisoituvuudeksi (yksikkö  $m^3$ ). Oletetaan lisäksi, ettei molekyylillä ole pysyvää dipolimomenttia. Tavoitteena on lausua molekyylin polarisoituvuus makroskooppisesti mitattavien suureiden avulla.

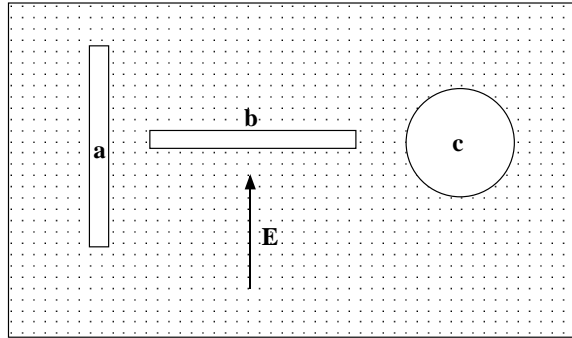
Ensimmäinen ongelma liittyy polarisoivaan sähkökenttään: se on kenttä, jonka aiheuttavat kaikki ulkoiset lähteet ja väliaineen polarisoituneet molekyylit lukuunottamatta tarkasteltavaa molekyyliä itseään. Kuinka kenttä  $\mathbf{E}_m$  määritetään? Luonnollinen ajatus on poistaa makroskooppisesti pieni mutta mikroskooppisesti suuri palanen ainetta tarkasteltavan molekyylin ympäriltä ja laskea kenttä jäljelle jäävässä onkalossa. Kenttä tarkasteltavan molekyylin kohdalla on silloin

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{near} \quad (10.12)$$

Tässä  $\mathbf{E}$  on keskimääräinen kenttä koko kappaleessa,  $\mathbf{E}_p$  onkalon pinnan polarisaatiovarauksen aiheuttama kenttä ja  $\mathbf{E}_{near}$  onkalossa olevien kaikkien muiden molekyylien aiheuttama kenttä. Aivan tarkasteltavan molekyylin kohdalla on siis otettava huomioon aineen yksityiskohtainen mikroskooppinen rakenne.

Kenttä  $\mathbf{E}_{near}$  on nolla esimerkiksi säännöllisen kuutiohilan hilapisteissä, jos molekyylien dipolimomenttivektorit ovat identtisiä (HT). Samoin voidaan olettaa  $\mathbf{E}_{near}$  nollaksi nesteissä ja kaasuissa, joissa molekyylit ovat täysin satunnaisesti jakautuneita. Useista molekyylylityypeistä koostuvissa aineissa tämä kenttä voi kuitenkin poiketa nollasta. Jatkossa oletetaan, että  $\mathbf{E}_{near} = 0$ .

Pulmallista on vielä se, että polarisaatiokenttä  $\mathbf{E}_p$  riippuu onkalon muodosta (kuva 10.1). Jos onkalo on kapean suorakaiteen muotoinen ja sen



Kuva 10.1: Molekulaarisen kentän määrittäminen erilaisissa onkaloissa.

pitkä sivu on makroskooppisen kentän  $\mathbf{E}$  suuntainen (a), niin sähkökenttä on onkalossa sama kuin väliaineessa kentän tangentialikomponentin jatkuvuuden perusteella. Jos suorakaidetta käännetään 90 astetta (b), niin onkalossa  $\mathbf{E}_b = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0$  sähkövuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuuden vuoksi (pinnoilla on polarisaatiovarausta, mutta ei vapaata varausta).

Luonnolliselta tuntuva vaihtoehto on olettaa onkalo palloksi (c). Nyt kenttä onkalossa saadaan vähentämällä tasaisesti polarisoituneen pallon kenttä kentästä  $\mathbf{E}$ . Voidaan käyttää hyväksi analogiaa magnetostatiikkaan, jossa tasaisesti magnetoituneen pallon sisällä on vakiokenttä  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}/3$  (ks. luku 6.6). Tästä voidaan suoraan päätellä, että polarisoituneen pallon sisällä on kenttä  $-\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$ , ja onkalossa  $\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)$ . Tämä on jonkinlainen välimuoto suorakaiteen muotoisten onkaloiden kentistä.

Nyt voidaan laskea polarisoituma suoraviivaisesti. Jos molekyylien lukumäärätiheys on  $n$ , niin polarisoituma on määritelmän mukaan  $\mathbf{P} = n\mathbf{p}_m$ , joten

$$\mathbf{P} = n\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)) \quad (10.13)$$

Toisaalta  $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$ , joten saadaan Clausiuksen ja Mossottin yhtälö

$$\alpha = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{n(\epsilon_r + 2)} \quad (10.14)$$

jossa suhteellinen permittiivisyys  $\epsilon_r$  ja tiheys  $n$  ovat makroskooppisesti mitattavia suureita. Voidaan esimerkiksi mitata kaasun  $\epsilon_r$  ja  $n$ , jolloin saadaan  $\alpha$  laskettua. Olettamalla, että polarisoitumismekanismi on samanlainen myös nesteessä voidaan tunnettujen tiheyksien avulla ennustaa nesteen suhteellinen permittiivisyys. Näin saadaan varsin hyviä tuloksia esimerkiksi aineille  $CS_2$ ,  $O_2$ ,  $CCL_4$ . Mainittakoon, että vedelle tulisi vastaavalla tavalla ennusteksi negatiivinen permittiivisyys, joten pysyvästi polarisoituneelle aineelle esitetty malli ei päde.

Useimmilla eristeillä  $\mathbf{E}_m$  menee nolnaan  $\mathbf{E}$ :n mukana. Joissain tapauksissa on olemassa pysyvää polarisaatiota  $\mathbf{P}_0$ , jolloin  $\mathbf{E}$ :n ollessa nolla

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{3}\mathbf{P}_0 \quad (10.15)$$

Tällöin

$$\mathbf{P}_0 = n\alpha\mathbf{E}_m = \frac{n\alpha}{3}\mathbf{P}_0 \quad (10.16)$$

joten nollasta poikkeava pysyvä polarisaatio edellyttää, että

$$\frac{n\alpha}{3} = 1 \quad (10.17)$$

Tämä ehto on varsin tiukka ja useimmille materiaaleille  $n\alpha/3 < 1$ , joten ne käyttäytyvät kuten tavalliset eristeet. Jotkin kristallirakenteiset kiinteät aineet kuitenkin toteuttavat ehdon ja niitä kutsutaan ferroelektriseksi materiaaleiksi. Esimerkiksi  $\text{BaTiO}_3$  on ferroelektristä alle  $120^\circ \text{C}$ :n lämpötilassa (aiheesta enemmän Feynman Lectures, osa II, luku 11-7).

Pysyvästi polarisoitunut kappale (elektretti) on kestopolymagneetin sähköinen vastine. Se eroaa kuitenkin magneetista ratkaisevasti, koska elektretin pinnalle kertyy vähitellen väliaineesta vapaita varauksia, jotka neutralisoivat polarisaatiopintavarauksen.

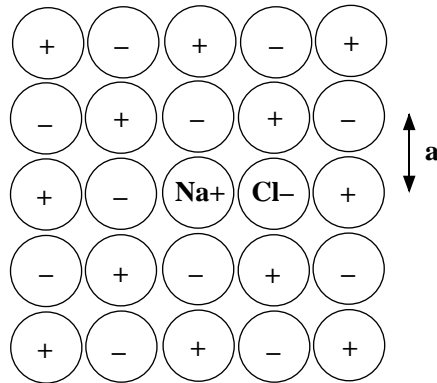
Ferroelektrisyydelle ominainen pysyvä polarisoituvuus aiheuttaa **hystereesi-ilmiön**. Kun aine on kerran polarisoitu tasolle  $P$ , niin polarisaatio ei katoa viettäessä sähkökenttä nolnaan, vaan vasta selvästi nollan alapuolella. Kasvatettaessa negatiivista sähkökenttää polarisaatio saavuttaa uudelleen uuden tason  $-P$ , josta ei puolestaan päästä eroon kasvattamalla sähkökenttää nolnaan vaan kenttää on kasvatettava riittävän paljon nollan yläpuolelle. Siten polarisaation ja sähkökentän välinen relaatio ei ole yksikäsitteinen. Vastaavaan ilmiöön tutustutaan myöhemmin ferromagnetismin yhteydessä.

## 10.2 Ionikiteen sähköstaattinen energia

Tutkitaan seuraavaksi sähköstatiikan keinoin ionikiteen energiaa. Tarkastellaan esimerkkinä suolaa ( $\text{NaCl}$ , kuva 10.2). Kokeellisesti tiedetään, että suolan hajottaminen  $\text{Na}^+$  ja  $\text{Cl}^-$ -ioneiksi vaatii energiaa 7.92 eV molekyyliä kohti. Lasketaan, onko tämä sama kuin yhden molekyylin sähköstaattinen potentiaalienergia kaikkien muiden suolakiteen ionien kentässä.

Riittää tarkastella yhtä  $\text{Na}^+$ -ionia. Sen potentiaalienergia on

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (10.18)$$



Kuva 10.2: Poikkileikkaus NaCl-kiteestä.

missä  $q_i$  on  $\pm e$  ( $e$  = alkeisvaraus) ja  $r_i$  on kunkin ionin etäisyys origoon sijoitetusta  $Na^+$ -ionista. Koska halutaan yhden molekyylin potentiaalienergia  $U$ , niin on laskettava summa  $U = 2U_1$ :

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (10.19)$$

$N$  voidaan turvallisesti olettaa äärettömäksi, koska se on makroskooppisille kiteille Avogadron vakion  $6.02 \cdot 10^{23}$  suuruusluokkaa.

Röntgendifraktiokokeiden perusteella tiedetään, että ionit ovat kuutiohilassa, jossa kuution sivun pituus  $a$  on noin  $2.82 \cdot 10^{-10} m$ . Koska  $e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx 5.1 eV$ , niin suuruusluokan puolesta ollaan oikeilla jäljillä. Energian lauseke voidaan kirjoittaa summana

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (10.20)$$

missä ei pidä ottaa mukaan termiä  $m = n = p = 0$ . Numeerisesti saadaan  $U \approx -1.747e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx -8.91 eV$ . Tämä on hieman liian suuri arvo, koska edellä ei otettu huomioon hyvin lähellä toisiaan olevien ionien välillä vallitsevaa poistovoimaa. Sen vaikutus pienentää molekyylin hajottamiseen tarvittavaa energiaa. Lisäksi pieni korjaus tulisi ottamalla huomioon kidevärähtelyistä johtuva liike-energia.

### 10.3 Sähkönjohtavuus mikrokooppisesti

Tarkastellaan johteessa nopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvaa varausta  $q$  klassisen mekaniikan mukaisesti. Mikäli hiukkaseen vaikuttaa sähkökenttä  $\mathbf{E}$ , se kiihtyy voiman  $m d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E}$  vaikutuksesta. Olkoon kyseessä lineaarinen ohminen

johde, jossa sähkökenttä aiheuttaa tasaisen virrantiheyden  $\mathbf{J}$ . Hiukkaseen täytyy vaikuttaa toinenkin voima, joka kumoaa sähkökentän aiheuttaman kiihtyvyyden. Oletetaan, että jarruttava voima on mekaanisen kitkan kaltainen eli verrannollinen hiukkasen nopeuteen, jolloin

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \quad (10.21)$$

Alkuehdolla  $\mathbf{v}(0) = 0$  liikeyhtälöllä on ratkaisu

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G}\mathbf{E}(1 - e^{-Gt/m}) \quad (10.22)$$

Tämän mukaan hiukkasen nopeus lähestyy kulkeutumismopeutta  $\mathbf{v}_d = q\mathbf{E}/G$  eksponentiaalisesti  $e^{-t/\tau}$  aikavakion  $\tau$  ollessa

$$\tau = m/G \quad (10.23)$$

Sijoittamalla tämä  $\mathbf{v}_d$ :n lausekkeeseen Ohmin laki voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\tau}{m}\mathbf{E} \quad (10.24)$$

joten

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (10.25)$$

missä  $n$  on hiukkasten lukumäärätiheys. Jos virrankuljettajia on useampaa laatua, niin

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \quad (10.26)$$

Kohtuullisen hyvillä johteilla metalleista puolijohteisiin  $\tau$  voidaan tulkitta johtavuuselektronien **keskimääräiseksi törmäysajaksi**. Matkaa, jonka johtavuuselektroni kulkee keskimäärin törmäysten välillä kutsutaan **keskimääräiseksi vapaaksi matkaksi**  $l_{mfp}$  ja se on

$$l_{mfp} = v_T \tau \quad (10.27)$$

missä  $v_T$  on elektronien **terminen** nopeus. Nyt termisen nopeuden on oltava paljon suurempi kuin  $v_d$ , sillä muutoin  $\tau$  tulisi riippuvaiseksi sähkökentästä eikä väliaineella olisi enää lineaarista Ohmin lakia. Useimmilla metalleilla  $v_T \approx 10^6$  m/s ja  $v_d$  yleensä alle  $10^{-2}$  m/s. Metalleilla  $l_{mfp} \approx 10^{-8}$  m huoneenlämmössä, joten  $\tau \approx 10^{-14}$  s. Puolijohteilla relaksaatioaika voi olla kertalukua suurempi, mutta joka tapauksessa sähkövirta reagoi käytännössä välittömästi sähkökentän muutokseen. Tämä selittää, miksi ennen Maxwellia kentänmuutosvirtaa ei ollut havaittu missään koetilanteessa.

## 10.4 Molekulaarinen magneettikenttä

Tarkasteltaessa aineen magnetismia molekyyalitasolla kenttien  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{H}$  välinen ero olennaisesti katoaa, sillä molekyylien ajatellaan sijaitsevan tyhjässä ja mikrokooppinen magneettikenttä  $\mathbf{B}_m$  tarkasteltavan molekyylin kohdalla voidaan korvata mikrokooppisella kentällä  $\mathbf{H}_m$  kirjoittamalla

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (10.28)$$

Molekulaarisen magneettikentän muodostavat kaikki ulkoiset sähkövirrat ja kaikki molekulaariset dipolit lukuunottamatta molekyyliä, jonka kohdalla kenttä lasketaan. Tehdään tarkasteltavan pisteen ympärille onkalo, jonka ulkopuolinen väliaine käsitellään jatkumona samalla tavalla kuin luvussa 10.1 molekulaarista polarisoitumista määritettäessä. Molekulaarinen kenttä on siis

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{near} \quad (10.29)$$

missä  $\mathbf{H}$  on makroskooppinen kenttä,  $\mathbf{H}_s$  onkalon reunoilla olevien pintadipolien aiheuttama kenttä ja  $\mathbf{H}_{near}$  onkalon sisällä olevien dipolien tuottama kenttä. Samanlaisella laskulla, jolla määritettiin  $\mathbf{E}_m$  edellä, saadaan (vrt. luku 6.6, tasaisesti magnetoitunut pallo)

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (10.30)$$

Onkalossa olevat dipolit antavat puolestaan

$$\mathbf{H}_{near} = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[ \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \quad (10.31)$$

missä  $\mathbf{r}_i$  on etäisyys onkalon keskipisteestä  $i$ :nteen dipoliin. Suurelle joukolle aineita  $\mathbf{H}_{near}$  on merkityksettömän pieni, jolloin

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (10.32)$$

## 10.5 Para- ja diamagnetismista

Tässä luvussa käsitellään hieman yksityiskohtaisemmin väliaineen vaikutusta magneettikenttään. Rajoitumme tässä kvalitatiiviseen käsittelyyn. Hyviä kuvauksia voi löytää korkeatasoisista lukion oppikirjoistakin (esim. Kurki-Suonio et al., Kvantti 2, jota tässä on käytetty yhtenä lähdeksi).

Aine magnetoituu ulkoisessa magneettikentässä. Väliaine ja kenttään tuodut kappaleet synnyttävät oman magneettikenttensä. Tilanne on kuitenkin selvästi erilainen kuin sähkökentän tapauksessa, mikä lienee tuttua kaikille hankaussähkön ja kestopagneettien kanssa leikkineille. Kaikkien aineiden polarisoituminen sähkökentässä havaitaan siitä, että varattu kappale

Taulukko 10.1: Joitain dia- ( $\chi_m < 0$ ) ja paramagneettisia ( $\chi_m > 0$ ) aineita. Suskeptiivisuudet on annettu huoneenlämpötilassa. Kaasujen tapauksessa oletetaan lisäksi normaali ilmanpaine.

aine	suskeptiivisuus
alumiini	$2.1 \cdot 10^{-5}$
elohopea	$-2.8 \cdot 10^{-5}$
happi	$193.5 \cdot 10^{-8}$
hopea	$-2.4 \cdot 10^{-5}$
kulta	$-3.5 \cdot 10^{-5}$
kupari	$-0.98 \cdot 10^{-5}$
magnesium	$1.2 \cdot 10^{-5}$
timantti	$-2.2 \cdot 10^{-5}$
titaani	$18 \cdot 10^{-5}$
typpi	$-0.67 \cdot 10^{-8}$
vety	$-0.22 \cdot 10^{-8}$

vetää puoleensa neutraalejakin kappaleita. Sen sijaan magneeteilla on selvästi näkyvä vaikutus vain harvoihin aineisiin. Lähellä olevat kappaleet ja väliaineet eivät siksi yleensä häiritse merkittävästi magneettisia tutkimuksia.

Väliaineen vaikutusta magneettikenttään on yksinkertaista tutkia toroidikämin avulla, koska käämin kenttä on kokonaan toroidin sisällä (vrt. eristeiden tutkimus kondensaattorin avulla). Kentän muoto ei muutu, jos toroidi täytetään väliaineella, vaan ainoastaan magneettivuon tiheys muuttuu. Väliaineen suhteellinen permeabiliteetti voidaan silloin mitata vertaamalla magneettivuon tiheyttä käämissä väliaineen kanssa ja ilman sitä.

Koska suurimmalla osalla aineista suhteellinen permeabiliteetti on lähellä ykköstä, käytetään useammin magneettista suskeptiivisuutta

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (10.33)$$

ja useille aineille pätee yksinkertainen rakenneyhtälö

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \quad (10.34)$$

Ainetta kutsutaan diamagneettiseksi, jos  $\chi_m < 0$  ja paramagneettiseksi, jos  $\chi_m > 0$ . Näille aineille on tyypillisesti  $\chi_m < 10^{-3}$ , joten yleensä voidaan aineen permeabiliteetti olettaa samaksi kuin tyhjän permeabiliteetti (taulukko 10.1). Poikkeuksena ovat ferromagneettiset aineet, jotka eivät noudata yksinkertaista magnetoitumislakia.

Aineen magneettisten ominaisuuksien mikroskooppinen selitys perustuu useisiin eri tekijöihin. Alkeishiukkaset ovat pieniä alkeismagneetteja, joiden



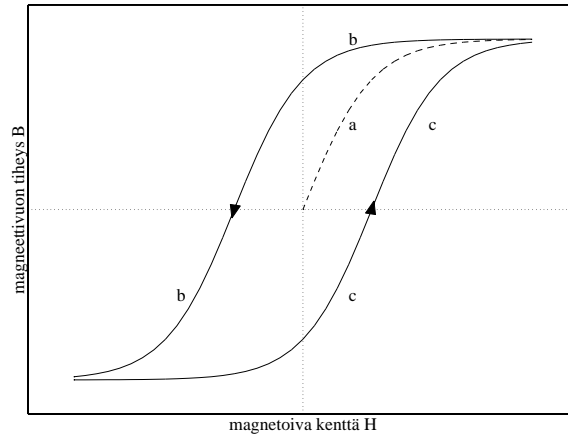
magneettimomentti liittyy hiukkasteen spiniin. Elektronin magneettimomentti on noin 700 kertaa suurempi kuin protonin ja noin 1000 kertaa suurempi kuin neutronin magneettimomentti, joten elektronit määräävät aineen magneettiset ominaisuudet. (Neutroni ei siis kuitenkaan ole magneettisessa mielessä täysin neutraali.)

Elektronin kiertoliike atomissa vastaa virtasilmuksia ja siitä aiheutuva magneettimomentti on samaa suuruusluokkaa kuin spinistä johtuva. Rataliikkeestä johtuva magneettimomentti voidaan ymmärtää klassisella mallilla, jossa elektroni kiertää  $r$ -säteistä ympyrärataa kulmataajuudella  $\omega = 2\pi/T$ . Malli vastaa virtasilmuksia, jonka pinta-ala on  $A = \pi r^2$  ja jossa kulkee virta  $I = q/T = qv/2\pi r$ . Magneettimomentti on siis  $m = IA = qvr/2$ . Elektronin liikemäärämomentti radan keskipisteen suhteen on  $L = m_0vr$  (massa  $= m_0$ ). Ottaen huomioon, että kyse on vektorisuureista, voidaan suuntasäännöt muistaen kirjoittaa  $\mathbf{m} = -e/(2m_0)\mathbf{L}$ , joka vastaa myös havaintoja. Samaan tulokseen päädytään, jos tarkastellaan pyörivän hiukkasen magneettimomentin ja liikemäärämomentin suhdetta (HT). Elektronin spinistä johtuva magneettimomentti on kuitenkin kaksinkertainen, joten klassinen kuva ei tässä anna oikeaa ennustetta. Samalla nähdään, ettei spiniä voida selittää arkipäiväisen mielikuvan mukaan pyörimisestä johtuvaksi, vaan kyseessä on puhtaasti kvanttimekaaninen suure.

Atomin magneettimomentti muodostuu elektronien spinien ja rataliikkeen magneettimomenteista, jotka yleensä pyrkivät kumoamaan toisensa pareittain. Jos atomilla tai molekyylillä on parillinen määrä elektroneja, sen magneettimomentti yleensä puuttuu. Muuten atomien magneettimomentit ovat samaa suuruusluokkaa kuin elektroneilla.

Ulkoisen magneettikenttä suuntaa atomien ja metallien vapaiden elektronien magneettimomenteja siten, että niiden kenttä vahvistaa ulkoista kenttää aineessa. Tämä selittää paramagnetismin. Lämpötilan noustessa lämpöliike häiritsee atomien järjestäytymistä, jolloin susceptiivisuus pienenee. Vastaavasti lämpötilan nousu heikentää pysyvien sähködipolien suuntautumista aiheutuvan polarisoitumista.

Ulkoisen magneettikenttä vaikuttaa myös elektronien rataliikkeeseen. Tällöin atomiin indusoituu magneettimomentti, joka suuntautuu ulkoista kenttää vastaan, mikä selittää diamagnetismin. Ilmiö tapahtuu kaikissa aineissa, mutta peittyi molekyylien magneettimomenttien alle, jos molekyyleillä on magneettimomenttia (vrt. pysyvä ja indusoituva polarisaatio sähkökentän vaikutuksesta). Diamagneettinen susceptiivisuus ei riipu merkittävästi lämpötilasta, koska atomien lämpöliike ei pysty häiritsemään nopeasti ulkoiseen kenttään sopeutuvia elektroneja.



Kuva 10.3: Magneettivuon tiheys ferromagneettisessa aineessa ei ole magnetoivan kentän yksikäsitteinen funktio. Kuvaan on piirretty myös magneitoitumiskäyrä (a).

## 10.6 Ferromagnetismi

Joissain kiinteissä aineissa atomien välinen vuorovaikutus pyrkii suuntaamaan niiden magneettimomentit samansuuntaisiksi, jolloin muodostuu atomin kokoon nähden suuria magneettisia alkeisalueita. Niissä kaikkien atomien magneettimomentit ovat samansuuntaisia. Ulkoinen kenttä puolestaan kasvattaa alkeisalueita ja pyrkii kääntämään kaikkien alueiden magneettimomentit samansuuntaiseksi. Tämä on ferromagnetismin perusmekanismi. Ferromagneettisia aineita ovat esimerkiksi rauta (Fe), koboltti (Co) ja nikkeli (Ni) sekä näiden monet yhdisteet. Riittävän korkeassa lämpötilassa (Curie-pisteessä) ferromagneettinen aine muuttuu paramagneettiseksi. Raudan Curie-piste on  $770^{\circ}\text{C}$  ja nikkelin  $358^{\circ}\text{C}$ .

Myös ferromagneettisille aineille on tapana kirjoittaa rakenneyhtälö  $\mu$ :n avulla, mutta nyt  $\mu = \mu(\mathbf{H})$ , joka ei ole välttämättä yksikäsitteinen funktio. Vastaesimerkkinä on hystereesi (kuva 10.3), jossa ja magnetoivan kentän  $\mathbf{H}$  ja aineen magneettivuon tiheyden  $\mathbf{B}$  välinen yhteys on erilainen riippuen siitä, ollaanko magnetoivaa kenttää kasvattamassa vaiko pienentämässä. Suskeptiivisuus  $\chi_m$  on siis kentän  $\mathbf{H}$  funktio ja on yleisesti ottaen iso.

Kun kentän  $\mathbf{H}$  voimakkuutta kasvatetaan, aineen magneitoituminen voimistuu (kuva 10.3). Tätä voi jatkaa kuitenkin vain tiettyyn kyllästysarvoon  $\mathbf{M}_s$  asti. Tämän jälkeenkin  $\mathbf{B}$ -kenttä jatkaa kasvamistaan lineaarisesti termin  $\mu_0\mathbf{H}$  myötä. Olkoon ferromagneetti nyt magnetoitu tällä tavoin ja annetaan  $\mathbf{H}$ :n alkaa pienetä. Nyt  $\mathbf{B}$ -kenttä ei pienene saman käyrän mukaisesti vaan tapahtuu kuvassa 10.3 esitetty hystereesi-ilmiö.

Ferromagnetismin vastakohtana on tilanne, jossa järjestyneen vastakkaisuuntaisista spineistä muodostuvan rakenteen magneettinen momentti on nolla. Tällaista ainetta kutsutaan **antiferromagneetiksi**. Vielä yleisempi järjestynyt rakenne on sellainen, jossa on vastakkaisia spinejä, mutta kuitenkin nollassa poikkeava kokonaismagneettimomentti. Tällaisia aineita kutsutaan **ferriteiksi**. Niitä ovat esimerkiksi tietyt rautaoksidit ( $\text{MFe}_2\text{O}_3$ , missä M on jokin kaksivalenssinen metalli-ioni). Tunnetuin ferritti lienee magnetiitti ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Ferrittien teknologinen merkitys on niiden korkeissa magnetoituman kyllästymisarvoissa ja huonossa sähkönjohtavuudessa. Ferrittien tyypilliset resistiivisuudet ovat luokkaa  $1\text{--}10^4 \Omega\text{m}$ , kun raudan resistiivisyys on vain  $10^{-7} \Omega\text{m}$ . Ferrittejä käytetään etenkin korkeataajuuslaitteissa, joissa pyörrevirtoihin liittyvä energiahäviö on ongelma.

## 10.7 Epälineaariset energiahäviöt

Todellinen makroskooppinen ferromagneetti käyttäytyy huomattavasti molekyyalitasoa rakeisempana. Aine koostuu ferromagneettisista alueista, jotka ovat magnetoituneet eri suuntiin ja joiden välillä on suuruusluokkaa 100 atomin paksuisia seiniä. Kun nämä alueet järjestyvät uudelleen ulkoisen magneetikentän muuttuessa, syntyy kitkaa, joka kuluttaa energiaa. Tarkasteltaessa aiemmin sähkömagneettista energiaa väliaineet oletettiin lineaarisiksi. Ferromagneettinen aine on kuitenkin epälineaarista ja eteen tulee kysymys, mitä tapahtuu, kun hystereesisilmukkaa kierretään ympäri. Tämän selvittämiseksi tarkastellaan virtapiiriä, jonka muodostaa ferromagneettisen aineen ympärille kierretty kela ( $N$  kierrosta), johon ulkoinen energian lähde syöttää virtaa.

Jos magneettivuo kelan läpi muuttuu tekijällä  $\delta\Phi$ , niin ulkoinen energianlähde tekee sähkömotorista voimaa vastaan työn

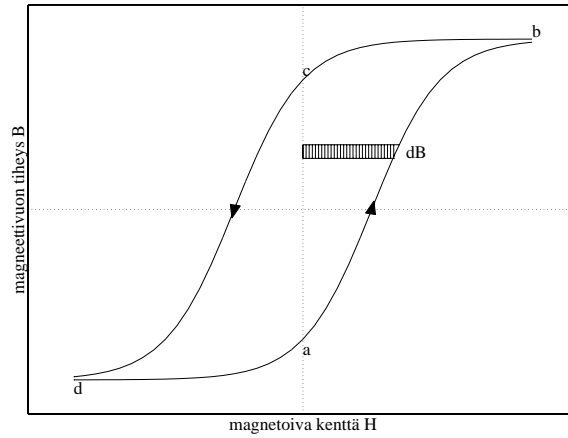
$$\delta W_b = NI\delta\Phi \quad (10.35)$$

Ajatellaan ferromagneetti pätkäksi magneettista silmukkaa eli aluetta, jossa magneetikenttä poikkeaa nollassa. Tällöin kelan kohdalla Amperen kiertosäännön mukaan  $NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ . Merkitsemällä magneettisen silmukan pinta-alaa  $d\mathbf{l}$ :n kohdalla  $A$ :lla saadaan

$$\delta W_b = \oint \delta\Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (10.36)$$

Mikäli ferromagneetti käyttäytyy reversiibelisti, saadaan systeemin magneettinen energia integroimalla magneettivuon tiheys arvosta  $\mathbf{B} = 0$  lopulliseen arvoonsa. Lineaarille aineelle tulos on luvusta 8 tuttu

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV \quad (10.37)$$



Kuva 10.4: Yksikkötilavuutta kohti tehty työ ferromagneettisessa syklissä.

Lauseke 10.36 on kuitenkin yleisempi ja antaa oikean työn myös hystereesitilanteessa. Magneettikentän muutosta vastaava työ yksikkötilavuudessa on

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (10.38)$$

Tarkastellaan nyt hystereesisykliä, joka alkaa  $H$ :n arvosta 0, kasvaa arvoon  $H_{max}$ , pienenee arvoon  $-H_{max}$  ja palaa sen jälkeen takaisin nollaan (kuva 10.4).

Työ kuvan 10.4 pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H dB \quad (10.39)$$

on hystereesikäyrän  $ab$  ja  $B$ -akselin välinen pinta-ala ja se on positiivinen koska sekä  $H$  että  $dB$  ovat positiivisia. Vastaavasti  $(w_b)_{bc}$  on  $B$ -akselin ja käyrän  $bc$  välinen pinta-ala, mutta se pitää laskea negatiivisena, koska  $dB < 0$ . Samoin lasketaan työ negatiivisilla  $H$  ja lopputulos on, että yhden hystereesisyklin myötä tehty työ on hystereesisilmukan sisään  $BH$ -tasossa jäävä pinta-ala

$$w_b = \oint H dB \quad (10.40)$$

Täyden syklin jälkeen ferromagneetin tila on sama kuin alussa, joten sen magneettinen energia on yhtä suuri kuin aluksi. Ulkoinen energianlähde on kuitenkin tehnyt työtä, joka on kulunut magneettisten alueiden uudelleen järjestäytymiseen. Kyseessä on palautumaton SM-energian häviö lämmöksi. Tämän ilmiön vuoksi esimerkiksi muuntaja lämpenee. Yleensäkin hystereesihäviöt on tärkeää huomioida rakennettaessa vaihtovirtalaitteita. Ylläoleva

lasku tehtiin yhdelle hystereesisyklille, joten mitä korkeammalla taajuudella laite toimii, sitä nopeammin hystereesi hävittää energiaa.

Käytännössä ferromagneettinen sykli on usein mielekkäämpää käsitellä magneettikentän voimakkuuden  $\mathbf{H}$  ja magnetoituman avulla ilman viittausta magneettivuon tiheyteen  $\mathbf{B}$ . Tämä onnistuu seuraavasti ( $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ):

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (10.41)$$

Nyt termi  $\mu_0 H dH$  on tyhjässä tehty työ, joka on nolla integroituna kokonaisen syklin yli ja termi  $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$  on materiaalille ominainen työ. Koko syklin yli työ on siis

$$w_b = \mu_0 \oint H dM = -\mu_0 \oint M dH \quad (10.42)$$

missä on käytetty hyväksi lauseketta  $d(MH) = H dM + M dH$ . Kokonaisdiferentiaalin  $d(MH)$  integraali on nolla riippumatta aineen ominaisuuksista.

