

Luku 11

Sähkömagneettiset aallot

Tämä luku käsittelee monokromaattisten sähkömagneettisten aaltojen etenemistä erilaisissa homogeenisissa väliaineissa (RMC luku 17; CL käsittelee aaltoliikettä luvussa 10). Epähomogeenisuudet ja niistä aiheutuvat heijastumis- ja taittumisilmiöt käsitellään seuraavassa luvussa. SM-aaltojen spektri on erittäin laaja. Esimerkkejä löytyy hyvin matalista taajuuksista aina gamma-säteisiin, joiden taajuudet ovat suuruusluokkaa $10^{20} - 10^{22}$ Hz.

11.1 Tasoallot eristeessä

Eristeellä tarkoitetaan tässä yhteydessä niin huonosti johtavaa väliainetta, ettei sähkönjohtavuutta σ tarvitse huomioida ($\omega\epsilon \gg \sigma$). Tutkitaan aaltoyhtälön ratkaisua monokromaattiselle aallolle, jolla on nimensä mukaisesti vain yksi taajuus. Tämä tarkoittaa olennaisesti samaa kuin tarkastella aallon **Fourier-komponentteja** erikseen. Tällöin on hyödyllistä käyttää kompleksilukuesitystä ja kirjoittaa aikariippuvuus muodossa $e^{-i\omega t}$, esimerkiksi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (11.1)$$

Etuna on se, että aikaderivaatta korvautuu tekijällä $-i\omega$.

Huom. Käytettäessä kompleksilukuesitystä **fysikaalinen suure on kompleksisen suureen reaaliosa** (voitaisiin myös käyttää imaginaariosaa). Tämä on erityisen tärkeää pitää mielessä kerrottaessa kompleksisuureita. Ensimmäinen on laskettava loppuun asti kompleksiluvuilla ja otettava lopputuloksesta reaaliosa.

Huom. Kirjallisuudessa on yleisesti käytössä myös aikariippuvuus $e^{+i\omega t}$.

Aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.2)$$

monokromaattiselle aallolle on

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.3)$$

Tämä Helmholtzin yhtälö kuvaa aallon muutosta paikan funktiona. Oletetaan, että kenttä on riippumaton x - ja y -koordinaateista. Tällöin

$$\frac{d^2\mathbf{E}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(z) = 0 \quad (11.4)$$

Tämä on harmonisen värähtelijän yhtälö, jolla on ratkaisuna

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm ikz} \quad (11.5)$$

missä \mathbf{E}_0 on vakiovektori ja $k = \omega/c$ eli **aaltoluku**. Aaltoyhtälöllä on siis ratkaisuna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp kz)} \quad (11.6)$$

jonka reaaliosa on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \mp kz) = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t \mp z/c) \quad (11.7)$$

Kyseessä on joko $+z$ - tai $-z$ -akselin suuntaan nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ etenevä siniaalto. z -akselin valinta ei tässä ole rajoittava tekijä. Aaltoluku voidaan esittää vektorina \mathbf{k} , jolloin aallon paikkariippuvuus tulee muotoon $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

Edellä on käytetty aaltoliikeopista tuttuja käsitteitä. **Kulmataajuuden** ω yksikkö on radiaania sekunnissa. Vastaava **värähtelytaajuus** on $f = \omega/2\pi$, jonka yksikkö on puolestaan hertsi (Hz). Aaltoluvun yksikkö on m^{-1} ja vastaava **aallonpituus** on $\lambda = 2\pi/k$. Aallon **vaihenopeus** on $v_p = \omega/k$, joka tyhjössä on sama kuin valon nopeus.

Mikäli väliaineen μ ja ϵ poikkeavat tyhjän suureista, aallon vaihenopeudeksi tulee

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (11.8)$$

Tällöin taajuuden ja aaltoluvun välinen relaatio eli **dispersioyhtälö** on

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{n}{c}\omega \quad (11.9)$$

missä on määritelty väliaineen **taitekerroin**

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (11.10)$$

Taitekerroin on tärkeä parametri tarkasteltaessa aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnoilla.

Muotoa $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ olevia Maxwellin yhtälön ratkaisuja kutsutaan **tasoaalloiksi**. Mikäli yhtälöillä voidaan annetussa tilanteessa olettaa olevan tasoaaltoratkaisuja, voidaan myös paikkaderivaatat korvata seuraavasti

$$\begin{aligned}\nabla &\rightarrow i\mathbf{k} \\ \nabla \cdot &\rightarrow i\mathbf{k} \cdot \\ \nabla \times &\rightarrow i\mathbf{k} \times\end{aligned}$$

Fysikaalisesti tasoaallolle voidaan löytää suunta, jota vastaan kohtisuoralta, mutta muuten mielivaltaisella tasolla aallon vaihe on annetulla hetkellä sama kaikissa tason pisteissä. Eristeessä tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kyseisillä tasoilla sähkö- ja magneettikentät ovat vakioita. Vaihenopeus tarkoittaa puolestaan vakiovaiheen ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{vakio}$) etenemisnopeutta. Johtavissa väliaineissa vakiovaiheen ja vakiokenttien välinen relaatio on monimutkaisempi.

Oletetaan, ettei väliaineessa ole vapaita varauksia eikä virtoja. Tasoaalloille saadaan Maxwellin yhtälöistä yhtälöryhmä

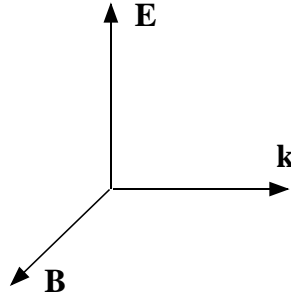
$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D}\end{aligned}\tag{11.11}$$

Huom. RMC merkitsee tasoaallon kenttävektoreita lisäämällä niiden päälle hatun ($\hat{\mathbf{E}}$), mutta tässä ei ole sekaannuksen vaaraa, kunhan muistetaan, että nyt aika- ja paikkariippuvuudet ovat eksponenttifunktiossa. Silloin kun on tarpeen erotella tasoaallon vektori vektorista $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, kirjoitetaan edellinen mieluummin $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ tai $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$, mikä viittaa siihen, että kenttä on määritelty tietylle taajuudelle ja aaltoluvulle. On hyvä huomata myös, että $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ on yleisesti **kompleksivektori**.

Oletetaan väliaine lineaariseksi ja kirjoitetaan $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Käytännössä kaikilla lineaarisilla väliaineilla $\mu = \mu_0$ on hyvä approksimaatio. Silloin Maxwellin yhtälöt tulevat muotoon

$$\begin{aligned}\epsilon_r \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_r \mathbf{E}\end{aligned}\tag{11.12}$$

Koska tarkastelemme monokromaattisia aaltoja, voimme pitää taajuutta ω annettuna. Oletetaan, että ϵ_r on tarkasteltavalle aineelle ominainen vakio. Vektorit \mathbf{k} , \mathbf{E} ja \mathbf{B} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja aaltoa kutsutaan **poikittaiseksi** (transversaaliseksi) (kuva 11.1).



Kuva 11.1: Sähkömagneettisen tasoallon sähkökenttä \mathbf{E} ja magneettikenttä \mathbf{B} ovat toisiaan ja etenemissuunnan ilmaisevaa aaltolukuvektoria \mathbf{k} vastaan kohtisuorassa ja muodostavat oikeakätisen kolmikon $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$.

Sähkö- ja magneettikentän välinen suhde seuraa Faradayn lakia vastaavasta yhtälöstä: $B = (k/\omega)E$. \mathbf{k} :n itseisarvo saadaan laskemalla

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (11.13)$$

Toisaalta $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E}$. Koska $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$,

$$-\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \quad (11.14)$$

eli dispersioyhtälö saa muodon

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c} \quad (11.15)$$

Dispersioyhtälöä kutsutaan usein dispersiorelaatioksi. Se voidaan kirjoittaa **taitekertoimen** $n = \sqrt{\epsilon_r}$ avulla

$$k = n \frac{\omega}{c} \quad (11.16)$$

Oikea aalto ei välttämättä ole monokromaattinen. Jos aalto koostuu joukosta diskreettejä taajuuksia ω_i , Maxwellin yhtälöiden lineaarisuuden vuoksi kokonaissähkökenttä voidaan esittää summana

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i) \exp[-i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})] \quad (11.17)$$

Vektoreita $\mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i)$ kutsutaan aallon **Fourier-komponenteiksi**. Jos \mathbf{k} ja ω käsitellään jatkuvina, funktio $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ on $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:n **Fourier-muunnos** (kertaa FYMM I:stä!).

11.2 Aaltojen polarisaatio

Tarkastellaan seuraavaksi aaltojen polarisaatiota. Peruskurssilta tuttu lineaarinen polarisaatio on helposti mielletävä ilmiö, mutta ympyräpolarisaatio kannattaa miettiä huolellisesti läpi. Asiaa ei lainkaan helpota, että vasen- ja oikeakätisyys määritellään eri lähteissä eri tavoin.

Vektorit $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ ja $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ ovat kompleksivektoreita. Kirjoitetaan \mathbf{E} oikeakätisessä reaalisessa kannassa, jonka yksikkövektorit ovat $(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u} \quad (11.18)$$

missä hattu viittaa kompleksilukuun. Koska tarkastelemme tasoaaltoa, on luonnollista valita \mathbf{u} aallon etenemissuunnaksi, jolloin sähkökenttä on joka hetki ps -tasossa

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \quad (11.19)$$

Ilmaistaan vielä kompleksiset komponentit kompleksitason vaihekulman ϕ avulla

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p}; \quad \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (11.20)$$

missä E_p ja E_s ovat reaalilukuja. s -akselin suunta voidaan valita vapaasti (kunhan se on kohtisuorassa u -akseliin), joten ϕ_s voidaan asettaa nolaksi ja ottaa käyttöön merkintä $\phi_p = \phi$. Niinpä (\mathbf{k}, ω) -avaruuden sähkökenttä on

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s} \quad (11.21)$$

ja sitä vastaava (\mathbf{r}, t) -avaruuden kenttä puolestaan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (11.22)$$

Aallon **fysikaalinen** sähkökenttä on tämän reaaliosta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (11.23)$$

Aallon sähkökentällä on kaksi komponenttia, joiden **reaaliset amplitudit** E_p ja E_s voivat olla eri suuria ja lisäksi komponentit voivat värähdellä eri vaiheessa **vaihe-eron** ollessa ϕ . Tarkastellaan muutamaa erikoistapausta. Valitaan kaikissa tilanteissa tarkastelupisteeksi $\mathbf{r} = 0$. (Piirrä itse kuva kaikista tapauksista!)

1. **Komponentit samassa vaiheessa** $\phi = 0$. Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t \quad (11.24)$$

Sähkökenttä värähtelee $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$:sta $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$:een osoittaen koko ajan suuntaan $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$. Tämä on **lineaarinen polarisaatio**. Lineaarinen polarisaatio on kyseessä myös, jos $E_p = 0$ tai $E_s = 0$, koska silloin aalto värähtelee toisen koordinaattiakselin suunnassa. Myös 180 asteen vaihe-ero antaa lineaarisen polarisaation ($E_p \rightarrow -E_p$).

2. **Vaihe-ero** $\phi = \pm\pi/2$. Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = \pm E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \quad (11.25)$$

Nyt sähkökenttävektori pyörii ps -tasossa piirtäen ellipsin joko myötä- tai vastapäivään riippuen katselusuunnasta. Tämä on **elliptinen polarisaatio**.

3. **Vaihe-ero** $\phi = \pm\pi/2$ ja $E_p = E_s$. Tällöin ellipsi palautuu ympyräksi ja kyseessä **ympyräpolarisaatio**

Jos vaihe-ero on jotain muuta kuin $\phi = \pm\pi/2$, kyseessä on aina elliptinen polarisaatio (mahdollisesti surkastunut lineaariseksi).

Tarkastellaan sitten sähkökentän pyörimissuuntaa. Rajoitutaan yksinkertaisuuden vuoksi ympyräpolarisaatioon. Jos yllä $\phi = +\pi/2$, pyörii aallon sähkökenttä myötäpäivään, kun katsotaan kohti saapuvaa aaltoa. **Optiikassa** tätä kutsutaan **oikeakätisesti polarisoituneeksi** aalloksi. Jos pyörimistä tarkastellaan aallon etenemissuuntaan, se kuitenkin näyttää toteuttavan vasemman käden kiertosäännön. Tarkasteltaessa sähkömagneettisten, esim. radioaaltojen ominaisuuksia magnetoituneessa johtavassa väliaineessa (esim. plasmassa) tällaista aaltoa kutsutaankin **vasenkätisesti polarisoituneeksi**. Tämä valinta on sikäli johdonmukainen, että näin polarisoitunut aalto muodostaa avaruudessa **vasenkätisen ruuvin**. Aallolla sanotaan olevan **negatiivinen helisiteetti** ja voidaan puhua negatiivisesti polarisoituneesta aallosta. Vastaavasti $\phi = -\pi/2$ antaa päinvastaiset nimitykset. Meidän ei tarvitse tällä kurssilla murehtia oikea- tai vasenkätisyyksien sekamelskasta, mutta asia on hyvä tietää vastaisen varalta.

Todetaan vielä, että mielivaltainen elliptinen polarisaatio voidaan hajottaa eri vaiheissa värähtelevien oikea- ja vasenkätisesti polarisoituneiden aaltojen summaksi. Esimerkiksi lineaarinen polarisaatio on summa kahdesta eri suuntiin pyörivästä samanamplitudisesta komponentista.

11.3 Sähkömagneettisen aallon energia

Kompleksisen sähkö- tai magneettikentän reaali-osa on fyysikaalinen mitattava kenttä. Koska Maxwellin yhtälöt ovat lineaariset kenttien suhteen ja toteutuvat siten erikseen reaali- ja imaginaariosille, tästä ei tullut edellä ongelmia. Kenttien energiat ja Poyntingin vuo ovat kuitenkin vektoreiden tuloja, jolloin reaali- ja imaginaariosat sekoittuvat toisiinsa eli $\text{Re}(A \cdot B) \neq \text{Re} A \cdot \text{Re} B$. Niinpä on syytä ottaa ensin suureiden reaali-osa ja kertoa ne vasta sitten keskenään.

Tarkastellaan aaltoa pisteessä $\mathbf{r} = 0$. Tällöin $\mathbf{E}(0, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t)$ ja

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2(\omega t) \quad (11.26)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (11.27)$$

Koska $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ja $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, on $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, joten tasoaallon energiatiheys on

$$u_w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \quad (11.28)$$

Toisaalta $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH \mathbf{u}$, joten Poyntingin vektori osoittaa aallon etenemissuuntaan ja on suuruudeltaan

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (11.29)$$

Tasoaaltojen energiatiheys ja energiavuo pinta-alayksikköä kohti saavat siis hyvin yksinkertaiset lausekkeet ja lisäksi

$$S = \frac{c}{n} u_w \quad (11.30)$$

Jos vaihenopeutta käsitellään aallon etenemissuuntaisena vektorina \mathbf{v}_p , voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{S} = u_w \mathbf{v}_p \quad (11.31)$$

Tasoaallon Poyntingin vuo voidaan siis ymmärtää energiatiheyden etenemisenä vaihenopeuden mukana.

Tasoaallon energiatiheys u_w ja energiavuo \mathbf{S} ovat verrannollisia suureeseen E^2 . Ympyräpolarisoituneelle aallolle ($\phi = \pm\pi/2$)

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2 \quad (11.32)$$

joka on vakio. Lineaarisesti polarisoituneelle aallolle ($\phi = 0, \pi$) puolestaan

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t \quad (11.33)$$

joka vaihtelee nollan ja maksiminsa välillä kaksi kertaa aallon taajuudella.

Sähkömagneettisen aallon mukanaan viemää energiaa tarkastellaan usein korkeataajuisten aaltojen tapauksessa. Tällöin E^2 :n aikakeskiarvo on tärkeämpi suure kuin sen ajallinen vaihtelu. Koska $\cos^2(\omega t - \phi)$:n keskiarvo yhden jakson aikana on $1/2$, kaikilla polarisaatioilla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} (E_p^2 + E_s^2) \quad (11.34)$$

Tämän voi kirjoittaa myös kompleksisen \mathbf{E} -vektorin avulla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \quad (11.35)$$

missä * viittaa kompleksikonjugaattiin. Tämä lauseke kertoo myös, että koko ongelma voidaan käsitellä alusta loppuun kompleksisena, mutta silloin mitattavat suureet on käsiteltävä jakson yli otettuina keskiarvoina.

Sähkömagneettisella kentällä on energian lisäksi liikemäärää ja impulssimomenttia. SM-aallot kuljettavat myös näitä suureita mukanaan.

11.4 Tasoaallot johteessa

Linearisessa homogeenisessa väliaineessa, jossa ei ole vapaita varauksia (μ , ϵ ja σ ovat vakioita ja $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$) aaltoyhtälöt saavat muodon (HT)

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (11.36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (11.37)$$

Nämä yhtälöt ovat seurausta Maxwellin yhtälöistä. Päinvastainen ei kuitenkaan ole totta. Yhtälöillä on ratkaisuja, jotka eivät välttämättä toteuta Maxwellin yhtälöitä, joten ratkaisujen fysikaalisuus on tarkastettava erikseen käytännön ongelmissa.

Sähkökentän aaltoyhtälöä (11.37) kutsutaan lennätinyhtälöksi. Se on standardiesimerkki osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta Fouriermuunnosten avulla. Tehdään tässä sama ratkaisu oikaisemalla sikäli, että oletetaan tasoaaltoratkaisu ja lähdetään liikkeelle Maxwellin yhtälöistä, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H} \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} \end{aligned} \quad (11.38)$$

Koska $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ja $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, niin aalto on jälleen poikittainen.

Valitaan koordinaatisto siten, että $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_x$ ja $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$. Tällöin

$$\begin{aligned} kE_x &= \omega\mu H_y \\ ikH_y &= -(\sigma - i\omega\epsilon)E_x \end{aligned} \quad (11.39)$$

Tästä (tai suoraan aaltoyhtälöstä) saadaan dispersioyhtälö $k = k(\omega)$:

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega \quad (11.40)$$

k on kompleksiluku, joka voidaan kirjoittaa muodossa $k = |k|e^{i\alpha}$ ja dispersioyhtälöstä voidaan ratkaista

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\mu\omega\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \sigma^2}} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right) \end{aligned} \quad (11.41)$$

Lennätinyhtälön ratkaisu harmonisille aalloille on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \mathbf{e}_x e^{i(\operatorname{Re}(k)z - \omega t)} e^{-\operatorname{Im}(k)z} \\ &= E_0 \mathbf{e}_x \exp[i(|k|z \cos \alpha - \omega t)] \exp[-|k|z \sin \alpha] \end{aligned} \quad (11.42)$$

Tässä on valittava α :n vaihe siten, että $\operatorname{Im}(k) > 0$ eli $\sin \alpha > 0$ (HT: piirrä kuva kompleksitasossa). Tällöin **aalto vaimenee** edetessään väliaineeseen (tekijä $e^{-|k|z \sin \alpha}$), mikä on fysikaalisesti mielekäs ratkaisu. Vaihenopeudeksi tulee nyt

$$v_p = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k)} = \frac{\omega}{|k| \cos \alpha} \quad (11.43)$$

Etäisyys, jolla aallon amplitudi vaimenee tekijällä e , on väliaineen **tunkeutumissyvyys** (skin depth):

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{Im}(k)} = \frac{1}{|k| \sin \alpha} \quad (11.44)$$

Väliaineen **impedanssi** (aaltovastus) määritellään

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \sigma^2}}} \exp\left[-\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)\right] \quad (11.45)$$

Impedanssin yksikkö on vastus: $[Z] = \Omega$ (kertaa impedanssin, admittanssin ja reaktanssin käsitteet KSII:sta tai lue RMC:n luku 13).

Esimerkkejä

1) Hyvä johde: $\sigma \gg \epsilon\omega \Rightarrow \alpha = 45^\circ$; $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$

$$v_p = \delta\omega \tan \alpha = \delta\omega$$

$$\text{Kuparille: } \begin{cases} f = 50 \text{ Hz} & \delta \approx 1 \text{ cm} & v_p \approx 3 \text{ m/s} \\ f = 50 \text{ MHz} & \delta \approx 10 \mu\text{m} & v_p \approx 3 \times 10^3 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{-i\pi/4} \Rightarrow 45^\circ \text{ vaihe-ero } \mathbf{E}\text{:n ja } \mathbf{H}\text{:n välillä.}$$

2) Eriste: $\sigma = 0$, $\epsilon > 0$, $\mu = \mu_0$

$\Rightarrow \alpha = 0$ eli aalto ei vaimene tunkeutuessaan eristeeseen!

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \equiv Z_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}},$$

missä Z_0 on **tyhjän impedanssi**: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega$.

Yksinkertaisella laskulla voidaan osoittaa, että aallon Fourier-komponenttien yhtälöryhmä (11.38) voidaan palauttaa yhtälöryhmän (11.12) kaltaiseksi kirjoittamalla

$$\begin{aligned} \epsilon_r \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \hat{\epsilon}_r \mathbf{E} \end{aligned} \tag{11.46}$$

missä on otettu käyttöön **kompleksinen dielektrisyysvakio** $\hat{\epsilon}_r$

$$\hat{\epsilon}_r = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \tag{11.47}$$

Nyt myös taitekerroin kannattaa määritellä kompleksilukuna

$$\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}_r \tag{11.48}$$

Tällöin kompleksinen aaltoluku \hat{k} toteuttaa yhtälön

$$\hat{k}^2 = \frac{\hat{n}^2 \omega^2}{c^2} \tag{11.49}$$

11.5 Palloaallot

Tasoaalto on erittäin käyttökelpoinen matemaattinen idealisaatio. Todellisuudessa sähkömagneettinen aalto kuitenkin synnytetään esimerkiksi äärellisen kokoisella antennilla. Antennin lähellä sähkö- ja magneettikenttien rakenne on hyvinkin monimutkainen ja riippuu käytetyn antennin geometriasta. Kun aalto lähtee etenemään avaruuteen, se laajenee ja tarkasteltaessa aaltorintamaa riittävän pienellä alueella se näyttää tasoaaltorintamalta. Joskus on kuitenkin tarpeen ottaa huomioon aaltorintaman globaali muoto. Tarkastellaan esimerkkinä origosta joka suuntaan eteneviä pallonmuotoisia aaltorintamia, **palloaalloja**. Periaatteessa ongelma ratkaistiin jo luvussa 9, jossa johdettiin viivästyneet potentiaalit ja myös palloaallon Greenin funktio. Emme kuitenkaan laskeneet itse kenttiä, sillä derivaattojen laskeminen viivästyneistä potentiaaleista on aika työläs tehtävä.

Tyhjössä etenevän SM-aallon sähkökentän aaltoyhtälö on

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.50)$$

josta monokromaattiselle aallolle tulee vektorimuotoinen Helmholtzin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.51)$$

Nyt sähkökenttä pitäisi esittää pallokoordinaattien avulla. Ongelmaksi tulee termin $\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$ kirjoittaminen pallokoordinaateissa. Termin $-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ radiaalikomponentissa ovat mukana myös muut pallokoordinaatiston muuttujat ja samoin käy atsimutaali- ja napakulman komponenteille. Lopputulos on kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön ryhmä, joissa kaikissa on mukana kaikki sähkökentän komponentit. Vektorimuotoinen Laplaceen yhtälö voidaan separoida kunkin muuttujan erillisiksi differentiaaliyhtälöiksi vain karteesisissa koordinaateissa.

Tarkastellaan tämän ongelman ratkaisemiseksi skalaarimuotoista Helmholtzin yhtälöä

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0 \quad (11.52)$$

Nyt on suoraviivainen harjoitustehtävä osoittaa, että

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (11.53)$$

on (11.51):n ratkaisu, ja $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Magneettikenttä on valittava siten, että se yhdessä sähkökentän kanssa toteuttaa Maxwellin yhtälöt. Kirjoitetaan Faradayn laki muodossa

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (11.54)$$

jolloin

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (11.55)$$

mikä toteuttaa loput Maxwellin yhtälöt tyhjössä (HT). Voisimme aivan yhtä hyvin lähteä liikkeelle \mathbf{B} -kentän aaltoyhtälöstä ja löytää ratkaisuparin

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (11.56)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (11.57)$$

Ratkaisuparissa (\mathbf{E}, \mathbf{B}) sähkökenttä on jokaisessa pisteessä tangentialinen origokeskisen pallon pinnan kanssa. Tätä aaltoa kutsutaan joskus **transver-**
saaliseksi sähköiseksi (TE) moodiksi. Ratkaisuparissa $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ magneettikentällä on puolestaan sama ominaisuus ja aaltoa kutsutaan **transver-**
saaliseksi magneettiseksi (TM) moodiksi. (HT: piirrä kuvat!)

Nyt on vielä löydettävä ψ Helmholtzin skalaariyhtälön ratkaisuna. Tässä käytetään Laplacen yhtälön ratkaisemisesta tuttua muuttujien separointia pallokoordinaatistossa (luku 2). Ratkaistava yhtälö on pallokoordinaateissa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (11.58)$$

Erona Laplacen yhtälöön on siis termi $k^2 \psi$.

Tehdään tällä kertaa separointiyrite $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Sijoitetaan tämä ylläolevaan yhtälöön. Jaetaan tulos vielä ψ :llä ja kerrotaan tekijällä $r^2 \sin^2 \theta$, mikä antaa yhtälön

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (11.59)$$

ϕ -riippuvuuden osalta separointi antaa saman yhtälön kuin Laplacen yhtälön tapauksessa

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (11.60)$$

θ - ja r riippuvat yhtälöt ovat puolestaan

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_{lm} = 0 \quad (11.61)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - k^2 r^2] R_l = 0 \quad (11.62)$$

Nyt yhtälön (11.60) ratkaisut ovat tietenkin muotoa $\Phi_m = e^{\mp im\phi}$ ja yhtälön (11.61) ratkaisut ovat tutut Legendren liittofunktiot (luku 2). Termi $k^2 \psi$ muuttaa siis ainoastaan radiaalista yhtälöä (11.62), jonka ratkaisut saadaan tekemällä ensin muuttujanvaihdos $\xi = kr$, jolloin

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{dR_l}{d\xi} - [l(l+1) - \xi^2] R_l = 0 \quad (11.63)$$

Tästä saadaan **Besselin yhtälö** sijoituksella $R_l = \xi^{-1/2} Z_l$:

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - [(l+1/2)^2 - \xi^2] Z_l = 0 \quad (11.64)$$

Tämä on yksi matemaattisen fysiikan tärkeimpiä yhtälöitä, jonka ratkaisuina ovat Besselin ja Neumannin funktiot $J_{l+1/2}(kr)$ ja $N_{l+1/2}(kr)$. Pallokoordinaatistossa näistä muodostetaan erityisiä pallobesseleitä

$$j_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{l+1/2}(kr) \quad (11.65)$$

$$n_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} N_{l+1/2}(kr) \quad (11.66)$$

Pallobesselit ovat alkeisfunktioita, joten niitä ei tarvitse pelätä: esimerkiksi $j_0(r) = \sin r/r$, $n_0(r) = -\cos r/r$. Jääköön näiden enempi pohdiskelu kuitenkin FYMM II:n huoleksi.

Nyt meillä on koossa yleinen ratkaisu skalaarimuotoiselle Helmholtzin yhtälölle muodossa

$$\psi_{lm} = \sqrt{\pi/2kr} Z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) e^{\mp im\phi} \quad (11.67)$$

Sijoittamalla tämä TE- tai TM-moodin kenttien lausekkeisiin saadaan niiden paikkariippuvuus. Yksinkertaisin fysikaalisesti mielenkiintoinen valinta on

$$\psi_{10} = \frac{1}{kr} e^{ikr} \left[1 + \frac{i}{kr} \right] \cos \theta \quad (11.68)$$

josta saadaan TE-moodille

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi_{10} = -E_0 e^{ikr} \left[\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right] \sin \theta \mathbf{e}_\phi \quad (11.69)$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -i \frac{1}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{i}{\omega} E_0 e^{ikr} \left\{ \left[\frac{1}{kr^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right] 2 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[\frac{i}{r} - \frac{1}{kr^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right] \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right\} \end{aligned} \quad (11.70)$$

Tulemme myöhemmin näkemään, että tämä on magneettisen dipoliantennin säteilemä aaltokenttä.

