

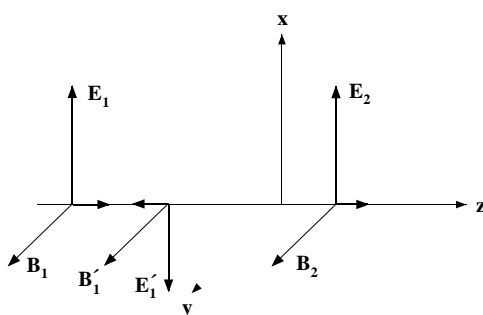
## Luku 12

# Aaltojen heijastuminen ja taittuminen

Tarkastelemme tässä luvussa sähkömagneettisten aaltojen heijastumis- ja taittumisominaisuuksia erilaisten väliaineiden rajapinnalla, ja lopuksi tutustutaan yksinkertaiseen dispersiivisen väliaineen malliin. Rajoitumme monokromaattisiin aaltoihin ja oletamme väliaineet lineaarisiksi ja magnetoitumattomiksi ( $\mu = \mu_0$ ) koko luvun ajan, ellei toisin mainita. Oppimateriaalina on RMC:n luku 18, CL käsittelee asiaa luvussa 10.4; esitiedot KSIII luku 5.

### 12.1 Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle

Tarkastellaan ensin aallon heijastumista kahden eristeen rajapinnalla, kun aalto saapuu kohtisuoraan pintaa vastaan, siis aaltovektori on pinnan nor-



Kuva 12.1: Heijastuminen ja läpäisy kohtisuoraan  $xy$ -tasolle saapuvalla aal-  
lolle.

maalin suuntainen (kuva 12.1).  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$  kuvaa  $+z$ -akselin suuntaan etenevää **saapuvaa** aaltoa,  $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{B}'_1)$   $-z$ -akselin suuntaan etenevää **heijastunutta** aaltoa ja  $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$  rajapinnan **läpäissyttä** aaltoa. Rajapinta on  $xy$ -tasossa. Oletetaan, että aallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut  $x$ -akselin suuntaan, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{e}_x E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_x E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (12.1)$$

missä  $k_1 = n_1 \omega / c$ ,  $k_2 = n_2 \omega / c$ . Magneettikenttä saadaan Faradayn laista seuraavasta relaatiosta  $\mathbf{B} = (n/c) \mathbf{u} \times \mathbf{E}$ , missä  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z$  tulevalle ja läpäisseele aallolle ja  $\mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$  heijastuneelle aallolle. Magneettikentät ovat  $y$ -akselin suuntaiset:

$$\begin{aligned} c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}'_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{e}_y n_2 E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Kaikilla aalloilla on oltava sama kulmataajuus  $\omega$ , jotta reunaehdot rajapinnalla toteutuisivat kaikilla ajanhetkillä  $t$ . Sähkökentän tangentialikomponentti on jatkuva, joten

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \quad (12.3)$$

Sama pätee epämagneettisessa väliaineessa ( $\mu = \mu_0$ ) myös magneettikentälle. Koska magneettikenttä voidaan ilmaista sähkökentän avulla, saadaan jatkuvuusehdoksi

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x} \quad (12.4)$$

Oletetaan saapuvan aallon amplitudi tunnetuksi ja ratkaistaan heijastuneen ja läpäisseen aallon amplitudit:

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}; \quad E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (12.5)$$

Määritellään **Fresnelin kertoimet** kohtisuoraan tulevalle aallolle:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (12.6)$$

$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (12.7)$$

missä  $r$  viittaa heijastumiseen (reflection) ja  $t$  läpäisyyn (transmission). Käytännön ongelmissa mitataan yleensä kunkin osa-aallon mukana kulkevaa keskimääräistä energiavuota pinta-alayksikköä kohti eli **intensiteettiä**. Se saadaan Poyntingin vektorista luvun 11.3 mukaisesti

$$\langle S \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2) \quad (12.8)$$

Tässä käsitellyssä tapauksessa valitaan  $E_p = E_x$  ja  $E_s = 0$ . Määritellään nyt **heijastussuhde** (reflektanssi)  $R_n$  ja **läpäisysuhde** (transmittanssi)  $T_n$  ( $n$  viittaa normaalin suuntaiseen saapumiseen) seuraavasti

$$R_n = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = r_{12}^2 = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (12.9)$$

$$T_n = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = \frac{4n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2} \quad (12.10)$$

Mille hyvänsä eristeparille  $R_n + T_n = 1$ , mikä ilmaisee energian säilymisen.

Elliptiselle polarisaatiolle on tarkasteltava erikseen  $x$ - ja  $y$ -komponentteja.  $x$ -komponenteille pätee yllä oleva tarkastelu sellaisenaan ja  $y$ -komponenteille tulee samat Fresnelin kertoimet. Myös  $y$ -komponentit pysyvät samassa vaiheessa keskenään, vaikka ne ovatkin eri vaiheessa kuin  $x$ -komponentit. Myös heijastus- ja läpäisysuhteet pysyvät ennallaan sillä intensiteetti  $\langle S \rangle$  on eri polarisaatiokomponenttien intensiteettien summa.

### Esimerkkejä

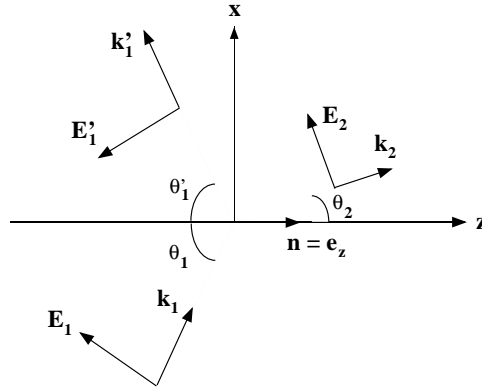
1. Ilman ( $n_1 = 1$ ) ja lasin ( $n_2 = 1.5$ ) rajapinnalla  $R_n = 0.04$  ja  $T_n = 0.96$ .
2. Puhtaan veden taitekerroin näkyvän valon aallonpituudella on  $n_2 = 1.33$ , joten  $R_n = 0.02$ . Kun  $\omega$  on alle  $10^{11} \text{ s}^{-1}$ , veden suhteellinen permittiivisyys on kuitenkin suuri  $K_2 = 81$ , joten  $n_2 = 9$  ja  $R_n = 0.64$ . Vesi siis heijastaa huomattavasti tehokkaammin radioaaltoja kuin valoa. Paremmin sähköä johtavalle merivedelle heijastussuhde on paljon suurempi.

## 12.2 Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa

Tarkastellaan sitten mielivaltaista saapumiskulmaa. Kuva 12.2 esittää tilannetta, jossa rajapinta on  $xy$ -tasossa ja saapuvan aallon aaltovektori  $xz$ -tasossa (**saapumistasossa**). Aaltojen polarisaation tarkastelemiseksi valitaan jokaiselle osa-aallolle jälleen  $\{\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u}\}$ -kanta, jolloin kuvan tilanteessa kullakin aallolla on vain sähkökentän  $p$ -komponentti.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{p}_1 \hat{E}_{1p} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= \mathbf{p}'_1 \hat{E}'_{1p} e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{p}_2 \hat{E}_{2p} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (12.11)$$

Koska kunkin osa-aallon magneettikenttä on kohtisuorassa sekä  $\mathbf{k}$ - että  $\mathbf{p}$ -vektoreihin nähden, magneettikentällä on vain  $s$ -komponentti ja se on tässä geometriassa kaikilla osa-aalloilla  $y$ -akselin suuntainen.



Kuva 12.2: Heijastuminen ja taittuminen  $p$ -polarisaatiolle.

Vaikka kuva 12.2 näyttää erikoistapaukselta, kyseessä on toinen kahdesta perustilanteesta. Olkoon  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  rajapinnan yksikkönormaali. Jotta aaltokenttä olisi jatkuva rajapinnalla, täytyy aaltojen taajuuden lisäksi myös vaiheiden olla samat missä hyvänsä rajapinnan pisteessä  $\mathbf{r}_0$ , joten

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (12.12)$$

Tästä on helppo (HT) näyttää, että

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}'_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}_2 \quad (12.13)$$

Siis kaikki  $\mathbf{k}$ -vektorit ja  $\mathbf{n}$  ovat kohtisuorassa vektoria  $(\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1)/|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1| = \mathbf{e}_y$  kohtaan, joten kaikkien osa-aaltojen aaltovektorit ovat samassa tasossa.

Muistisääntönä  $p$ -komponentti viittaa saapumistasossa olevaan komponenttiin (parallel). Käytämme tällaisesta polarisaatiosta nimitystä  **$p$ -polarisaatio**. Radioaaltojen yhteydessä tätä kutsutaan myös **vertikaaliseksi polarisaatioksi**, sillä tarkasteltaessa radioaallon heijastumista ionosfääristä näin polarisoituneen aallon sähkökentällä on pystykomponentti.

Toinen peruspolarisaatio on  **$s$ -polarisaatio** tai **horisontaalinen polarisaatio**, jossa sähkökentällä on vain  $s$ -komponentti.  $s$  viittaa saksankielen sanaan senkrecht (kohtisuora). Tällöin puolestaan osa-aaltojen magneettikentällä on erisuuntaiset  $p$ -komponentit. Koska kaikki muut polarisaatiotilat voidaan ilmaista eri vaiheissa värähtelevien  $s$ - ja  $p$ -polarisoituneiden aaltojen summana, riittää tarkastella näitä kahta perustapausta

Ehdosta (12.12) seuraa kaksi muutakin tärkeää tulosta. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} &= k_1 \cos \theta_1 \\ \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n} &= -k'_1 \cos \theta'_1 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} &= k_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (12.14)$$

joten

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| &= k_1 \sin \theta_1 \\ |\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}| &= k'_1 \sin \theta'_1 \\ |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}| &= k_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (12.15)$$

Niinpä on oltava

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (12.16)$$

Koska saapuva ja heijastunut aalto etenevät samalla taaajuudella samassa väliaineessa,  $k_1 = k'_1$  ja saamme **heijastuslain**

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad \text{eli} \quad \theta_1 = \theta'_1 \quad (12.17)$$

Aaltolukuja eri väliaineissa puolestaan sitoo dispersioyhtälö  $k = n\omega/c$ , joten olemme saaneet **Snellin lain**

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (12.18)$$

**HUOM!** Näissä relaatioissa ei ole käytetty Maxwellin yhtälöistä seuraavia reunaehtoja, vaan ne riippuvat aaltoliikkeen yleisistä geometrisista ominaisuuksista ja Snellin lain osalta väliaineen taitekertoimesta.

Fresnelin kertoimien määrittämiseksi tarkastellaan kenttien tangentiaalikomponenttien jatkuvuusehtoja. Normaalikomponenttien jatkuvuusehdot toteutuvat automaattisesti. Vektorikenttä voidaan hajottaa normaali- ja tangentiaalikomponentteihin kirjoittamalla  $\mathbf{E} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ . Tangentiaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa, että

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (12.19)$$

Magneettikentälle puolestaan (kun  $\mu = \mu_0$ )

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_2 \quad (12.20)$$

Jos aaltovektorin suuntainen yksikkövektori on  $\mathbf{u}$ , niin  $\mathbf{B} = (n/c)\mathbf{u} \times \mathbf{E}$ , joten magneettikentän jatkuvuus edellyttää

$$n_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}'_1 \times \mathbf{E}'_1) = n_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{E}_2) \quad (12.21)$$

Kirjoittamalla vektorikolmitulot auki ja tarkastelemalla  $s$ -komponenttia saadaan osa-aallolle  $\mathbf{E}_1$  yhtälö

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{1s}) = -\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} \quad (12.22)$$

ja vastaavasti muille osa-aalloille. Näin (12.21) saadaan muotoon

$$n_1 (\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} - \cos \theta'_1 \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} \quad (12.23)$$

Koska  $\theta_1 = \theta'_1$ , tämä sievenee muotoon

$$n_1 \cos \theta_1 (\mathbf{E}_{1s} - \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} \quad (12.24)$$

Sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuudesta saadaan suoraan  $s$ -komponenteille ehto

$$\mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}'_{1s} = \mathbf{E}_{2s} \quad (12.25)$$

Näistä yhtälöistä saadaan Fresnelin kertoimet  $s$ -polarisaatiolle

$$\mathbf{E}'_{1s} = r_{12s} \mathbf{E}_{1s}, \quad \mathbf{E}_{2s} = t_{12s} \mathbf{E}_{1s} \quad (12.26)$$

missä

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (12.27)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (12.28)$$

$p$ -polarisaatio näyttää geometrialtaan hankalammalta, koska sähkökenttä ei ole rajapinnan tasossa. Mutta nyt voidaan tarkastella magneettikenttää, joka on rajapinnan tasossa. Näin saadaan yhtälöpari

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\mathbf{B}_{1s} - \mathbf{B}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \mathbf{B}_{2s} \quad (12.29)$$

$$\mathbf{B}_{1s} + \mathbf{B}'_{1s} = \mathbf{B}_{2s} \quad (12.30)$$

ja Fresnelin kertoimet saadaan ehdosta

$$\mathbf{B}'_{1s} = r_{12p} \mathbf{B}_{1s}, \quad \mathbf{B}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p} \mathbf{B}_{1s} \quad (12.31)$$

missä

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (12.32)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (12.33)$$

Koska Snellin laki 12.18 sitoo taitekertoimet saapumis- ja taittumiskulmiin

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (12.34)$$

voidaan taittumiskulma eliminoida Fresnelin kertoimista.

Intensiteettien väliset relaatiot saadaan keskimääräisten Poyntingin voiden avulla, mutta nyt täytyy käsitellä  $s$ - ja  $p$ -polarisaatiot erikseen.

$$R_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad T_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (12.35)$$

$$R_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} \quad T_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (12.36)$$

jotka Fresnelin kertoimien avulla saavat muodon

$$R_s = r_{12s}^2 \quad T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (12.37)$$

$$R_p = r_{12p}^2 \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (12.38)$$

ja lisäksi  $R_s + T_s = 1$  ,  $R_p + T_p = 1$ .

Käyttämällä hyväksi Snellin lakia Fresnelin kertoimet voi muuntaa puhtaasti trigonometrisiksi (HT)

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (12.39)$$

$$t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (12.40)$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (12.41)$$

$$t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (12.42)$$

Tarkastellaan näiden avulla paria esimerkkiä

### Brewsterin kulma

Millä kulmilla aalto ei lainkaan heijastu rajapinnalta? Molemmille polarisaatioille tämä tapahtuu tietenkin kun  $\theta_1 = \theta_2$ , mutta tämä ei ole kovin mielenkiintoinen tapaus, koska silloin molemmilla väliaineilla on oltava sama taitekerroin.  $p$ -polarisaation kyseessä ollen myös tapaus  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$  tekee heijastuskertoimesta nollan. Taittuneen ja heijastuneen säteen välinen kulma on silloin suora. Merkitään sisääntulokulmaa  $\theta_B$  ja kirjoitetaan  $\theta_2 = \pi/2 - \theta_B$ , jolloin Snellin laista saadaan ratkaistuksi

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (12.43)$$

Kulmaa kutsutaan **Brewsterin kulmaksi**. Koska tämä ehto on voimassa vain  $p$ -polarisaatiolle (vertikaaliselle polarisaatiolle), tämän avulla voidaan tuottaa polarisoitunutta valoa. Esimerkiksi ilman ( $n = 1$ ) ja lasin ( $n = 1.5$ ) rajapinnalla  $\theta_B = 56^\circ$  ja tässä kulmassa rajapinnalle tulevasta polarisoitumattomasta (tai mielivaltaisesti polarisoituneesta) valosta heijastuu vain  $s$ -polarisoitunut komponentti.

**Kokonaisheijastus**

Aalto heijastuu kokonaan, jos  $\theta_2 = \pi/2$ . Sitä vastaava sisääntulokulma saadaan jälleen Snellin laista

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (12.44)$$

Tätä kutsutaan **kriittiseksi kulmaksi**. Tämä kulma on reaalin vain, jos  $n_2 < n_1$ . Tarkastellaan jälleen lasin ja ilman rajapintaa, mutta nyt lasin suunnasta. Tällöin  $\theta_c = 42^\circ$ . Jos kulma on tätä suurempi, Snellin laki antaa ehdon

$$\sin \theta_2 > 1 \quad (12.45)$$

jolla ei ole reaalisia ratkaisuja. Tarkastelemalla kompleksisia Fresnelin kertoimia voidaan näyttää, että  $R_s = R_p = 1$  kaikille  $\theta_1 \geq \theta_c$ . Fysikaalisesti tämä merkitsee, että kriittistä kulmaa suuremmilla saapumiskulmilla kaikki aallon energia heijastuu. Tästä on hyötyä käytännön optiikassa, kuten prismakiikareissa ja valokaapeleissa.

**12.3 Druden ja Lorentzin oskillaattorimalli**

**Dispersiivisessä väliaineessa** dispersioyhtälö on yksinkertaista lineaarista relaatiota  $\omega = (c/n)k$  monimutkaisempi. Aineen eristeominaisuudet voivat riippua taajuudesta ja aaltoluvusta:  $\epsilon = \epsilon(\omega, \mathbf{k})$ . Tarkastellaan väliainetta, jossa ei ole vahvoja sisäisiä voimia, ja jätetään aineen magneettiset ominaisuudet huomiotta ( $\mu = \mu_0$ ). Tarkastellaan yhtä elektronia, joka on sidottu atomiin harmonisella voimalla

$$\mathbf{F}_h = -m\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (12.46)$$

missä  $\mathbf{r}$  on poikkeama tasapainoasemasta. Oletetaan lisäksi jokin elektronin liikettä vastustava voima (esim. kitka)

$$\mathbf{F}_d = -m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (12.47)$$

missä alaindeksi  $d$  (damping) viittaa siihen, että voima vaimentaa harmoniseen voimaan liittyvää värähtelyä. Ulkoisessa sähkökentässä  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  liikeyhtälöksi tulee

$$m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right) = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (12.48)$$

Oletetaan harmoninen aikariippuvuus ( $\propto \exp(-i\omega t)$ ), jolloin liikeyhtälön ratkaisu on

$$\mathbf{r} = \frac{-e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (12.49)$$



Elektronin poikkeama tasapainoasemasta aiheuttaa dipolimomentin  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (12.50)$$

Oletetaan, että yksikkötilavuudessa on  $n$  molekyyliä ja jokaista molekyyliä kohti on  $Z$  elektronia. Oletetaan, että  $f_j$  kappaleella jokaisen molekyylin elektroneista on ominaistajuus  $\omega_{0j}$  ja vaimennustekijä  $\gamma_j$ . Tekijöitä  $f_j$  kutsutaan **oskillaattorivoimakkuuksiksi** ja ne normitetaan elektronien lukumäärään  $\sum_j f_j = Z$ . Nyt sähköinen polarisoituma (dipolimomenttien tiheys) on

$$\mathbf{P} = \frac{ne^2\mathbf{E}}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (12.51)$$

Sähkövuon tiheydestä yksinkertaisessa aineessa  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  saadaan

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) \quad (12.52)$$

Siis permittiivisyys on **taajuudesta riippuva kompleksiluku**.

Oletetaan sitten, että aineessa on jonkin verran vapaita elektroneja ( $f_0$  kappaletta molekyyliä kohti), mutta että muuten väliaine on samanlainen kuin edellä. Vapaille elektroneille  $\omega_{00} = 0$ , jolloin

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) - \frac{ne^2}{m\omega} \frac{f_0}{\omega + i\gamma_0} \quad (12.53)$$

Merkitään oikean puolen ensimmäistä termiä  $\epsilon_b$  ja käytetään Ohmin lakia ( $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ ). Tällöin Maxwellin neljännessä laista saadaan

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon_b)\mathbf{E} \equiv -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (12.54)$$

joten

$$\epsilon = \epsilon_b + \frac{i\sigma}{\omega} \quad (12.55)$$

Vertaamalla tätä lausekkeeseen (12.53) saadaan

$$\sigma = \frac{f_0 ne^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \quad (12.56)$$

Johtavuus  $\sigma$  on nyt taajuuden kompleksiarvoinen funktio. Jos  $\gamma_0 \gg |\omega|$  ja  $f_0 = 1$ , tästä tulee luvusta 10 tuttu staattisen johtavuuden lauseke

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\gamma_0} \quad (12.57)$$

missä  $\gamma_0$  on törmäysajan  $\tau$  käänteisluku.

**Esimerkki:** Kuparilla on huoneen lämpötilassa ominaisuudet

$$\sigma = 5.6 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}, \quad n = 8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \quad f_0 = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

Oletus staattisesta johtavuudesta on siis hyvä approksimaatio taajuuksilla  $|\omega| \ll 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ , mikä on varsin korkea taajuus verrattuna esimerkiksi tyypilliseen radioasemaan  $\omega = 96.2 \text{ MHz} \cdot 2\pi \approx 6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$

Taajuuksia  $\omega_{0j}$  kutsutaan **resonanssitaajuuksiksi**. Monissa käytännön ongelmissa  $\gamma_j \ll \omega_{0j}$ , joten  $\epsilon(\omega)$  on melkein reaalinen paitsi resonanssitaajuuksien lähellä eli

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \quad (12.58)$$

Dispersiota kutsutaan **normaaliksi**, jos  $d(\text{Re } \epsilon(\omega))/d\omega > 0$  ja **anomaaliseksi**, jos  $d(\text{Re } \epsilon(\omega))/d\omega < 0$ . Normaalin dispersion alueella permittiivisyys kasvaa taajuuden myötä. Anomaalista dispersiota ilmenee ainoastaan lähellä resonanssikohtaa, missä  $\text{Im } \epsilon$  poikkeaa nolasta (HT: piirrä kuva).

Tarkastellaan energiabudjettia resonanssikohtan lähellä. Sähkövirta on nyt polarisaatiovirtaa  $\mathbf{J}_P = \partial\mathbf{P}/\partial t$  ja sähkökentän tekemä työ on

$$W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_P = \mathbf{E} \cdot \partial\mathbf{P}/\partial t \quad (12.59)$$

Yhden jakson aikana tehty keskimääräinen työ on

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \cdot (-i\omega\mathbf{P})^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(i\omega(\epsilon^* - \epsilon_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{\omega}{2} |\mathbf{E}|^2 \text{Im } \epsilon(\omega) \quad (12.60)$$

Jos  $\text{Im } \epsilon > 0$ , energia siirtyy sähkökentältä elektroneille eli aalto vaimenee. Tätä kutsutaan **resonanssiabsorptioksi**.

Tässä mallissa  $\text{Im } \epsilon > 0$ , kun  $\omega > 0$ . On olemassa tärkeitä fysikaalisia prosesseja, joissa aalto saa energiaa hiukkasilta, mutta tämä malli ei sovellu näihin tapauksiin. Tässä yhteydessä on opettavaista todeta merkinvalinnan vaikutus. Jos aikariippuvuudeksi valittaisiin  $\exp(+i\omega t)$ , muuttuisi  $\text{Im } \epsilon$ :n merkki. Tilanteen fysiikka on tietenkin riippumatonta merkkisopimuksista.

Väliaineen taitekerroin ja aallon aaltoluku ovat

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \quad (12.61)$$

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \frac{\omega}{c} \quad (12.62)$$

Tästä saadaan vaihenopeus

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \quad (12.63)$$

Tämä ei kuitenkaan ole energian etenemisnopeus dispersiivisessä väliaineessa. Sen antaa **ryhmänopeus**, joka määritellään  $v_g = d\omega/dk$  ja on siten (ks. Jackson)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{dk}} \quad (12.64)$$

Samaan aikaan lähtevät eritaajuiset aallot saavuttavat vastaanottajan eri aikaan, mikäli ne etenevät dispersiivisessä väliaineessa.

