

## Luku 14

# Liikkuvan varauksen kenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvan varauksen aiheuttamaan kenttään. Asiaa on käsitelty RMC:n luvussa 21 ja CL:n luvussa 13. Jokaisen sähködynaamikon on laskettava ainakin kerran elämässään Liénardin ja Wiechertin potentiaalit ja kentät.

### 14.1 Liénardin ja Wiechertin potentiaalit

Tarkastellaan siis yksittäistä varauksellista hiukkasta, jonka rata on  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$ . Varaus- ja virrantiheys ovat tällöin

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \quad (14.1)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\dot{\mathbf{r}}_q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \quad (14.2)$$

Käyttökelpoisten potentiaalien laskeminen ei ole aivan helppo tehtävä. RMC esittelee jaksossa 21–1 yhden tavan (tosin hypäten varsinaisen laskun yli). Toinen menetelmä on käyttää hyväksi Greenin funktiota, mikä sekin on teknisesti kohtuullisen vaativaa. Kyseessä on siis mitä mainioin harjoitustehtävä. Esitetään tässä menetelmän idea.

Tehtävänä on ratkaista epähomogeeniset aaltoyhtälöt

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (14.3)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (14.4)$$

Kuten luvussa 9 todettiin, näiden ratkaisut ovat Greenin funktion avulla lausuttuina

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (14.5)$$

missä  $\psi^\pm(\mathbf{r}, t)$  ovat viivästyneet (+) ja edistyneet (-) skalaaripotentialit tai vektoripotentialin karteesiset komponentit ja  $f(\mathbf{r}', t')$ :t vastaavat lähdetermejä  $(\rho, \mathbf{J})$ . Nyt riittää käyttää viivästyneen potentialin Greenin funktiota

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (14.6)$$

Tekijä  $4\pi$  on otettu Greenin funktion määritelmään, kun se luvussa 9 oli  $G$ :n aaltoyhtälössä.

Ensin integroidaan paikkaintegraalit Greenin funktion avulla. Sen jälkeen aikaintegraalia laskettaessa käytetään hyväksi  $\delta$ -funktiolle voimassa olevaa identiteettiä

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (14.7)$$

missä  $g(x_i) = 0$ . Lopputuloksena saadaan **Liénardin ja Wiechertin potentiaalit**:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret} \quad (14.8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret} \quad (14.9)$$

missä  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  ja  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ . Alaindeksi *ret* viittaa lausekkeen laskemiseen viivästyneellä ajalla  $t'$ , joka on ratkaistava ehdosta

$$t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|/c = t \quad (14.10)$$

Havaittaja siis mittaa kentän pisteessä  $\mathbf{r}$  hetkellä  $t$ .

Kaikkein eleganteinta, joskaan ei sen helpompaa, on tehdä ylläoleva lasku relativistisessa formalismissa, missä  $\varphi$  ja  $\mathbf{A}$  ovat nelipotentialin  $A^\alpha$  komponentit ja

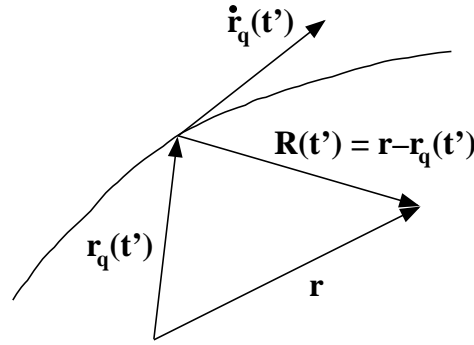
$$A^\alpha(x) = \int G(x - x')J^\alpha(x')d^4x' \quad (14.11)$$

(katso Jackson tai CL luku 13.3).

## 14.2 Kenttien laskeminen

Kun potentiaalit tunnetaan, kentät saadaan derivoimalla, joka yleensä on helppoa, mutta vaatii nyt kärsivällisyyttä. Hankaluuden aiheuttaa viivästyneen ajan implisiittisesti määrittelevä yhtälö 14.10. Aluksi kannattaa tehdä itselleen selväksi koordinaatisto (kuva 14.1). Sähkökenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\nabla(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right] \quad (14.12)$$



Kuva 14.1: Varauksellisen hiukkasen liiketila hetkellä  $t'$  määrää kentän myöhempanä hetkenä  $t$ . Kenttä etenee pisteestä  $\mathbf{r}_q(t')$  havaintopisteeseen  $\mathbf{r}$  ajassa  $R(t')/c$ , jolloin hiukkanen on ehtinyt radallaan pisteeseen  $\mathbf{r}_q(t)$ .

Hakasulku viittaa lausekkeen laskemiseen viivästetyllä ajalla (jätetään sulut pois välivaiheissa).

Aloitetaan  $R(t')$ :n derivoinnista: koska  $t'$  riippuu paikkavektorista  $\mathbf{r}$ , niin  $\nabla R(t') = -c\nabla t'$ . Derivoidaan viivästyneen ajan lauseketta 14.10 puolittain, jolloin esimerkiksi gradientin  $x$ -komponentti on

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x_q - c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)(\partial t'/\partial x)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} \quad (14.13)$$

Tässä on käytetty derivoinnin ketjusääntöä  $\partial/\partial x = (\partial t'/\partial x)(\partial/\partial t')$ . Nyt voidaan ratkaista

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{x - x_q}{c(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})} \quad (14.14)$$

joten

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})} \quad (14.15)$$

ja

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.16)$$

Tarvitaan myös  $\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})$ . Lasketaan taas  $x$ -komponentti:

$$(\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}))_x = \beta_x + \frac{\partial t'}{\partial x}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q) \quad (14.17)$$

Täten

$$\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) = \boldsymbol{\beta} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q)\nabla t' = \frac{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} + (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.18)$$

Kokoamalla tulokset saadaan skalaaripotentialin gradientiksi

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{R} - (R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} - (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right] \quad (14.19)$$

Vektoripotentialia varten täytyy laskea  $\partial R/\partial t = c(1 - \partial t'/\partial t)$ . Nyt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (14.20)$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.21)$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{cR\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (14.22)$$

Vektoripotentialin lausekkeessa esiintyvä aikaderivaatta on siis

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right] = \left[ \frac{R(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (R\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} + c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R} - cR\beta^2)\boldsymbol{\beta}}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right] \quad (14.23)$$

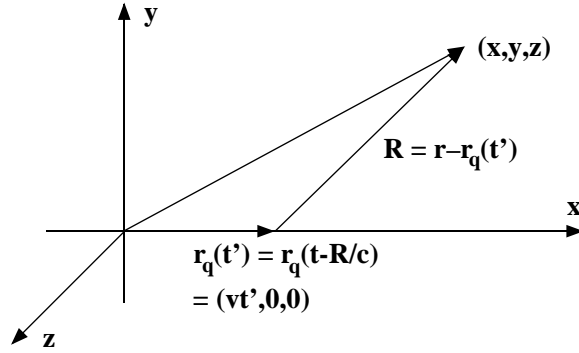
Sähkökentäksi saadaan lopulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R} \times ((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})/c}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right]_{ret} \quad (14.24)$$

Samanlaisten veivausten (luonnollisesti HT) jälkeen saadaan magneettikenttä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left[ \frac{\mathbf{R}}{R} \right]_{ret} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (14.25)$$

Välittömästi todetaan, että staattisen varauksen ( $\boldsymbol{\beta} = 0$ ) sähkökenttä on Coulombin kenttä. Silloin sähkökenttä on yhdensuuntainen vektorin  $\mathbf{R}$  kanssa, joten staattinen varaus ei odotetusti aiheuta magneettikenttää. Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä on selvästi tekemisissä Lorentzin muunnoksen kanssa. Säteilykentäksi kutsutaan kiihtyvyyteen  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  verrannollista termiä, joka pienenee kaukana varauksesta kuten  $1/R$  eli kertalukua hitaammin kuin Coulombin kenttä. Tarkastellaan näitä tilanteita seuraavassa yksityiskohtaisemmin.



Kuva 14.2: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen kentän laskeminen

### 14.2.1 Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä

Liénardin ja Wiechertin potentiaalien myötä olemme tulleet hyvin lähelle suhteellisuusteoriasta tuttuja Lorentzin muunnoksia. Tarkastellaan tätä var-  
ten kuvan 14.2 mukaisesti  $x$ -akselia pitkin vakionopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvan va-  
rauksen kenttää. Kenttä pisteessä  $(x, y, z)$  lasketaan hetkellä  $t$ , jolloin varaus  
on ehtinyt pisteeseen  $(vt, 0, 0)$  (varaus on ohittanut origon hetkellä  $t = 0$ ).

Koska  $R = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2} = c(t - t')$ , niin viivästynyt aika  $t'$   
saadaan lausekkeesta

$$(1 - \beta^2)t' = t - \beta x/c - (1/c)\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (14.26)$$

jolloin

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]_{ret} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (14.27)$$

Skalaaripotentialiaali voidaan nyt esittää muodossa

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} \quad (14.28)$$

missä  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Vektoripotentialilla on vain  $x$ -komponentti

$$A_x(x, y, z, t) = \beta\varphi(x, y, z, t)/c \quad (14.29)$$

Näin on päädytty Maxwellin yhtälöistä lähtien hyvin lähelle Lorentz-  
muunnosta. Varauksen lepokoordinaatistossa potentiaalilla on tuttu lauseke

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (14.30)$$

Liikkuvan varauksen potentiaali saadaan (melkein) koordinaattimuunnoksella, jossa  $y$  ja  $z$  pysyvät ennallaan ja  $x$ :stä tulee  $\gamma(x - vt)$ . Vielä jää mietittäväksi, mistä tekijä  $\gamma$  ilmestyy kertomaan potentiaalia. Lisäksi täytyisi selvittää, mistä vektoripotentiaali saadaan, kun se on nolla lepokoordinaatissa. Tähän palataan suhteellisuusteoriassa, jossa  $\mathbf{A}$ :n ja  $\varphi$ :n osoitetaan yhdessä muodostavan nelivektorin.

Kentät saadaan derivoimalla (tällä kertaa helposti):

$$E_x(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - vt)}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.31)$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.32)$$

$$E_z(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.33)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}(x, y, z, t) \quad (14.34)$$

Nämä lausekkeet pätevät kaikilla nopeuksilla. Kaukana varauksesta kenttä heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön. Suurellakaan nopeudella liikkuva hiukkanen ei siis säteile.

Kenttää on mukavinta tarkastella varauksen kulloisenkin paikan suhteen. Kohtisuorassa suunnassa ( $x - vt = 0$ ) sähkökentän voimakkuus on

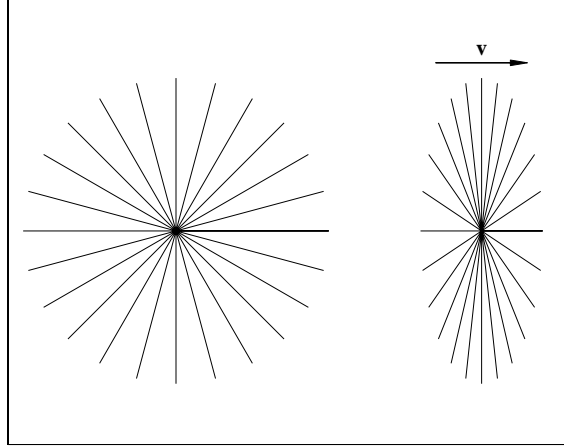
$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{y^2 + z^2} \quad (14.35)$$

Tämä on Coulombin kenttä tekijällä  $\gamma$  suurennettuna (aina  $\gamma \geq 1$ ). Varauksen edessä ja takana  $y = z = 0$  ja

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2(x - vt)^2} \quad (14.36)$$

Tämä on puolestaan Coulombin kenttä tekijällä  $1/\gamma^2$  pienennettynä.

Kenttäviivat saadaan piirtämällä ensin staattisen varauksen kenttäviivat ja sitten liikuttamalla kuviota suurella nopeudella silmien ohi, jolloin havaitaan Lorentz-kontraktio (ei onnistu kotioloissa kovin helposti). Vaihtoehtoisesti puristetaan  $x$ -akselia kasaan tekijän  $\gamma$  verran (kuva 14.3). Kannattaa kuitenkin muistaa, että kenttäviivat eivät ole todellisia fyysikaalisia olioita. Magneettikentän hahmottaminen jää lukijan mietittäväksi kuten hitaasti liikkuvan varauksen magneettikentän osoittaminen samaksi kuin luvussa 5.



Kuva 14.3: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen sähkökentän kenttäviivat. Vasemmalla staattinen varaus, oikealla liikkuva varaus.

### 14.2.2 Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä

Vakionopeudella liikkuva varaus ei siis säteile ympäristöönsä. Mikäli varauksen nopeus muuttuu, Liénardin ja Wiechertin potentiaaleja ei voi enää ilmaista varauksen tarkasteluhetken paikan funktioina vaan viivästymisen on otettava huomioon eksplisiittisesti eli laskettaessa kenttiä on huomioitava derivaattamuuttujien riippuvuus viivästymisestä.

Tarkastellaan aluksi epärelativistista rajaa ( $\beta \ll 1$ ), jolloin  $1/R$ -säteilykentiksi tulee

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})/R \quad (14.37)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}/R \quad (14.38)$$

missä  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Näistä saadaan Poyntingin vektoriksi

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}|^2}{R^5} \mathbf{R} \quad (14.39)$$

missä  $Z_0$  on tyhjän impedanssi  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ .

Säteilyteho avaruuskulmaan  $d\Omega$  on nyt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \quad (14.40)$$

missä  $\theta$  on  $\dot{\mathbf{v}}$ :n ja  $\mathbf{n}$ :n välinen kulma. Suorittamalla kulmaintegroinnit saadaan Larmorin kaava

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (14.41)$$

Relativistisille hiukkasille  $t$ :n ja  $t'$ :n välinen ero on tärkeä. Aikavälillä  $t_1 = t'_1 + R(t'_1)/c \dots t_2 = t'_2 + R(t'_2)/c$  säteilty energia on

$$W = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{ret} dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'} dt' \quad (14.42)$$

On siis mielekästä määritellä hiukkasen säteilyn intensiteetti  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dt/dt' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$  sen omassa ajassa ja omassa paikassa:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \quad (14.43)$$

Kun  $\beta \rightarrow 1$ , niin  $dP/d\Omega$ :n nimittäjän merkitys kasvaa ja säteilykeila alkaa venyä hiukkasen liikkeen suuntaan. Maksimi-intensiteetti saavutetaan, kun  $\theta_{max} \rightarrow 1/(2\gamma)$  ja keilan leveys on  $\approx 1/\gamma$ . Koska laskuissa ei ole tehty oletuksia kiihtyvyyden suunnasta, saadut kaavat kuvaavat sekä jarrutussäteilyä että syklotroni- ja synkrotronisäteilyä. Säteilyn kokonaisteho saadaan integroimalla kulmien yli (siis ei helposti) tai tekemällä Larmorin kaavalle Lorentzin muunnos (jos osataan suhteellisuusteoriaa). Lopputulos on

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 (\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2) \quad (14.44)$$