

## Luku 15

# Säteilevät systeemit

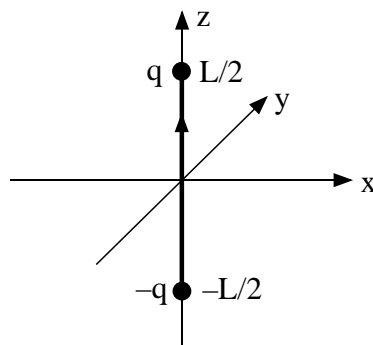
Edellisessä luvussa käsiteltiin vain yhden varauksellisen hiukkasen säteilykenttiä. Nyt tutustutaan esimerkinomaisesti yksinkertaisiin antenneihin ja varausjoukon aiheuttamaan säteilyyn (RMC luku 20).

### 15.1 Värähtelevän dipolin kenttä

Tarkastellaan tyhjässä olevaa sähköistä dipolia, joka muodostuu kahdesta  $z$ -akselilla pisteissä  $z = \pm L/2$  sijaitsevasta pallosta (kuva 15.1). Pallot on yhdistetty johdolla, jonka kapasitanssi voidaan jättää huomiotta. Ylemmän pallon varaus olkoon  $q(t)$ , alemman  $-q(t)$ .

Varauksen säilyminen antaa virrantiheydeksi

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = I(t)\delta(x)\delta(y)\theta(L/2 - z)\theta(z + L/2) \quad (15.1)$$



Kuva 15.1: Yksinkertainen dipoliantenni.

missä  $I = +\dot{q}$ . Lasketaan viivästynyt vektoripotentiaali

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (15.2)$$

jolla on nyt ainoastaan  $z$ -komponentti

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I(z', t - |\mathbf{r} - z'\mathbf{e}_z|/c)}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{e}_z|} dz' \quad (15.3)$$

Lausekkeen yksinkertaistamiseksi oletetaan, että dipolia katsotaan kaukaa  $L \ll r$ , jolloin voidaan kirjoittaa

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{e}_z| = (r^2 - 2z'\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r} + z'^2)^{1/2} \approx r - z' \cos \theta \quad (15.4)$$

missä  $\theta$  on katselupisteen paikkavektorin  $\mathbf{r}$  ja  $z$ -akselin välinen kulma. Vektoripotentiaalin nimittäjässä  $z' \cos \theta$  voidaan jättää huomiotta, kun dipolia katsotaan kaukaa. Viivästystermessä se voidaan jättää huomiotta, jos  $z' \cos \theta/c$  on pieni verrattuna virran muutoksen aikaskaalaan, esimerkiksi harmonisesti oskilloivan virran periodiin  $T$ . Koska  $z' \cos \theta \leq L/2$ , voidaan  $z' \cos \theta/c$  jättää huomiotta vain, jos

$$L/2 \ll cT = \lambda \quad (15.5)$$

Oletetaan, että näin on eli, että syntyvän aallon aallonpituus  $\lambda$  on paljon dipolin pituutta suurempi ja tarkastellaan dipolia kaukaa. Tällöin

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 L}{4\pi r} I(t - r/c) \quad (15.6)$$

Skalaaripotentiaalin laskeminen on yksinkertaisinta käyttäen Lorentzin mittahtoa

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (15.7)$$

mistä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{L}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} I(t - r/c) \right] \\ &= \frac{L}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{z}{r^3} I(t - r/c) + \frac{z}{r^2 c} I'(t - r/c) \right] \end{aligned} \quad (15.8)$$

missä  $I'$  on  $I$ :n  $(t - r/c)$ :n suhteen laskettu derivaatta. Koska toisaalta  $I = +\dot{q}'$ , missä  $q'$  on saman argumentin suhteen otettu derivaatta, saadaan  $\varphi$  integroiduksi

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{L}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[ \frac{q(t - r/c)}{r} + \frac{I(t - r/c)}{c} \right] \quad (15.9)$$

Rajataan tarkastelu harmonisesti oskilloivaan dipoliin

$$\begin{aligned} q(t - r/c) &= q_0 \cos \omega(t - r/c) \\ I(t - r/c) &= I_0 \sin \omega(t - r/c) = -\omega q_0 \sin \omega(t - r/c) \end{aligned} \quad (15.10)$$

Kirjoitetaan  $\mathbf{A}$  pallokoordinaatistossa

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \cos \theta \sin \omega(t - r/c) \\ A_\theta &= -\frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \sin \theta \sin \omega(t - r/c) \\ A_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (15.11)$$

Nyt  $\nabla \times \mathbf{A}$ :lla on vain  $\phi$ -komponentti, joten

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin \theta \left[ \frac{\omega}{c} \cos \omega(t - r/c) + \frac{1}{r} \sin \omega(t - r/c) \right] \end{aligned} \quad (15.12)$$

Sähkökenttä on  $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \varphi$ :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2lI_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\sin \omega(t - r/c)}{r^2 c} - \frac{\cos \omega(t - r/c)}{\omega r^3} \right] \\ E_\theta &= -\frac{lI_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega(t - r/c) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega(t - r/c) \right] \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (15.13)$$

Koska  $\mathbf{B}$  on kaikkialla tangentialinen dipoli keskipisteenä piirretylle pallon pinnalle, kyseessä on TM-moodi (HT: totea, että suurilla  $r$ :n arvoilla  $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r$ ).

Lasketaan sitten dipolin säteilemä energia integroimalla Poyntingin vektorin normaalikomponentti  $R$ -säteisen pallon pinnan yli.

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\mu_0} R^2 \int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi \sin \theta d\theta \quad (15.14)$$

Kun  $R \rightarrow \infty$  ainoastaan  $1/r$ :ään verrannolliset termit antavat nollasta poikkeavan kontribuution. Rajoittumalla näihin tulee energiaavuoksi

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{(I_0 l)^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega(t - r/c) \quad (15.15)$$

Tämä on siis dipolin hetkellisesti säteilemä teho. Integroimalla periodin yli saadaan keskimääräinen säteilyteho

$$\langle P \rangle = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{I_0^2}{2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{I_0^2}{2} \quad (15.16)$$

Tämän tuloksen voi tulkita siten, että vastus  $R$ , jossa kulkee sinimuotoinen virta  $I_0 \cos \omega t$ , kuluttaa energiaa keskimääräisellä teholla  $\langle P \rangle = RI_0^2/2$ . Suuretta

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 789 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (15.17)$$

kutsutaan **säteilyvastukseksi**. Mikäli dipoli ei ole tyhjässä, on permittivisyys ja permeabiliteetti korvattava väliaineen vastaavilla suureilla.

**Magneettinen dipoli** käsitellään aivan samaan tapaan. Se voidaan esittää ympyränmuotoisena silmukkana, jossa kulkee sinimuotoinen sähkövirta. Magneettinen dipoli on puolestaan kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan. Koska virralla on vain  $\phi$ -komponentti on myös vektoripotentiaalin ainoa nollasta poikkeava komponentti

$$A_\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cos \phi d\phi \quad (15.18)$$

missä  $a$  on virtasilmukan säde. Nyt dipoliapproksimaatio edellyttää, että  $r \gg a$  ja  $\omega a \ll c$ . Tästä eteenpäin lasku etenee samalla reseptillä kuin edellä. Erona oskilloivaan sähködipoliin on, että tällä kertaa syntyvän aallon sähkökenttä on dipolikeskisen pallon tangentti eli kyseessä on TE-moodi. Yksityiskohdat jääkööt harjoitustehtäväksi.

**Huom.** Oletettaessa harmoninen aikariippuvuus ( $e^{-i\omega t}$ ) skalaaripotentiaalia ei välttämättä tarvitse laskea. Magneettikenttä määräytyy pelkästään virrasta vektoripotentiaalin kautta. Toisaalta lähdealueen ulkopuolella

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (15.19)$$

josta saadaan

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} \quad (15.20)$$

## 15.2 Puoliaaltoantenni

Edellä saatu tulos ei anna oikeaa säteilytehoa oikealle radioantennille, koska yleensä antenni ei ole lyhyt verrattuna aallonpituuteen eikä sitä yleensä syötetä päistä vaan keskeltä.

Tarkastellaan tasan puolikkaan aallonpituuden mittaista antennia. Tämä on realistinen esimerkki, koska esimerkiksi 100 MHz aallon aallonpituus on 3 m. Antennin voi ajatella koostuvan infinitesimaalisista osista, joihin kuhunkin sopii edellä ollut tarkastelu. Olkoon antenni  $z$ -akselilla välillä  $(-\lambda/4, +\lambda/4)$  ja kulkekoon siinä virta

$$I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cos \left( \frac{2\pi z'}{\lambda} \right) \quad (15.21)$$

Tämä virta on nolla antennin molemmissa päissä. Nyt pisteen  $z'$  ympärillä oleva elementti  $dz'$  tuottaa tyhjöissä sähkökentän  $\theta$ -komponenttiin

$$dE_\theta = I_0 \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R c^2} \omega \cos \omega(t - R/c) \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) dz' \quad (15.22)$$

Tässä  $R$  on etäisyys  $dz'$ :sta katselupisteeseen ja kertalukua  $1/R^2$  olevat termit on jätetty huomiotta. Magneettikenttään tulee puolestaan osuus

$$dB_\phi = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{4\pi R c} \sin \theta \cos \omega(t - R/c) \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) dz' \quad (15.23)$$

$E_\theta$ :n ja  $B_\phi$ :n laskemiseksi on integroitava lauseke

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{R} \cos \omega(t - R/c) \cos u \, du \quad (15.24)$$

missä  $u = 2\pi z'/\lambda$ . Nyt jälleen  $R = r - z' \cos \theta$  ja riittävän suurella  $r$  nimittäjässä voidaan korvata  $R \rightarrow r$ . Kosinitermissä täytyy kuitenkin olla varovainen ja kirjoittaa

$$K = \frac{1}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[\omega(t - r/c) + u \cos \theta] \cos u \, du \quad (15.25)$$

Tämän saa muotoon

$$K = \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left( e^{i\omega(t-r/c)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du e^{iu \cos \theta} \cos u \right)$$

jolloin lopputulos on

$$K = \frac{2}{r} \cos \omega(t - r/c) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \quad (15.26)$$

Sijoittamalla tämä tulos sähkö- ja magneettikenttien lausekkeisiin saadaan

$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r c} \cos \omega(t - r/c) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (15.27)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega(t - r/c) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (15.28)$$

Keskimääräiseksi säteilytehoksi tulee nyt

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta \, d\theta \quad (15.29)$$

Integraalin numeerinen arvo on 1.219 joten puoliaaltoantennin säteilyteho on

$$\langle P \rangle = 73.1 \Omega \frac{I_0^2}{2} \quad (15.30)$$

Tästä eteenpäin antennilaskut käyvät pian hankaliksi. Jo se korjaus, että antennia syötetään usein keskeltä sinimuotoisella virralla tai jännitteellä aiheuttaa teknisiä monimutkaisuuksia. Toisaalta pitkän ohuen antennin rajalla ylläoleva tulos on muutaman prosentin päässä oikeasta.

### 15.3 Liikkuvan varausjoukon aiheuttama kenttä

Tarkastellaan sitten mielivaltaisen varausjoukon säteilyä. Oletetaan, että tarkasteltava varausjoukko on etäällä tarkastelupisteestä siinä mielessä, että varausjoukko pysyy tilavuudessa  $V_1$  sen ajan, mikä SM-aallolta kuluu saavuttaa tarkastelupiste ja  $V_1$ :n dimensiot ovat pienet verrattuna etäisyyteen tarkastelupisteestä (eli  $v \ll c$ ). Oletetaan lisäksi, että tilavuuden pituuskaalat ovat pieniä hallitseviin säteilyn aallonpituuksiin verrattuina ja että varaukset ovat tyhjiössä.

Valitaan origo tilavuuden  $V_1$  sisälle, merkitään varauksien koordinaatteja  $\mathbf{r}'$ :llä, tarkastelupiste olkoon  $\mathbf{r}$  ja  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Nyt

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \quad (15.31)$$

Viivästynyt skalaaripotentiali tarkastelupisteessä on

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr)}{r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/r} dV' \end{aligned} \quad (15.32)$$

Käyttäen binomisarjaa

$$(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)^{-1} = r^{-1} + r^{-2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r) + \dots \quad (15.33)$$

ja Taylorin kehitelmää

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}', t-r/c} + \dots \quad (15.34)$$

saadaan potentiaali muotoon

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V_1} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (15.35)$$

Ensimmäinen integraali antaa jakautuman kokonaisvarauksen, toinen dipolimomentin ja kolmas dipolimomentin aikaderivaatan ja loput ovat korkeampia multipolimomenteja, jotka häviävät etäällä nopeammin. Siispä

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2} \right] \quad (15.36)$$

Viivästynyt vektoripotentiaali on puolestaan

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr)}{r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/r} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_1} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' + \dots\end{aligned}\quad (15.37)$$

Äärelliselle tilavuudelle  $V$  pätee  $\int_V \mathbf{J} dV = d\mathbf{p}/dt$  (HT), jolloin

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \quad (15.38)$$

Olisimme yhtä hyvin voineet johtaa tämän ensin ja laskea sitten  $\varphi$ :n käyttäen Lorentzin mittaehto.

Rajoitutaan jatkossa säteilykenttiin, jotka siis pienenevät etäisyyden funktiona kaikkein hitaimmin ( $r^{-1}$ ). Laskettaessa  $\nabla\varphi$ :ta todetaan, että koska  $\dot{\mathbf{p}}$  on  $(t - r/c)$ :n funktio,  $\partial\dot{\mathbf{p}}/\partial r = -(1/c)\ddot{\mathbf{p}}$ , joten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{c^2 r^3} \mathbf{r} \quad (15.39)$$

Samoin laskettaessa vektoripotentiaalin roottoria täytyy huomioida se, että  $\mathbf{A}$  on  $(t - r/c)$ :n funktio. Pieni vektoriakrobatia (HT) antaa tuloksen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (15.40)$$

Edellä saatu sähkökenttä on (HT)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (15.41)$$

Kaikissa laskuissa dipolimomentin aikaderivaatta on laskettava viivästetyllä ajanhetkellä  $t - r/c$ , joka on sama koko varausjakaumalle pieniksi oletettujen nopeuksien vuoksi.

Säteilykenttä on poikittainen SM-aalto, jonka Poyntingin vektori on

$$\mathbf{S} = \frac{cB^2}{\mu_0 r} \mathbf{r} \quad (15.42)$$

mikä lausuttuna dipolimomentin avulla on

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}})^2 \quad (15.43)$$

Jos  $z$ -akseli valitaan  $\dot{\mathbf{p}}$ :n suuntaiseksi, tämä on

$$\mathbf{S} = \frac{\dot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (15.44)$$

Säteilyn maksimi on kohtisuoraan  $\ddot{\mathbf{p}}$ :tä vastaan. Säteilytehon ( $P_R$ ) laskemiseksi tarkastellaan pallonkuorta, joka on kokonaan säteilyalueessa

$$\begin{aligned} P_R &= \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \\ &= \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^3} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{c^3} \end{aligned} \quad (15.45)$$

Varausjoukko siis säteilee, mikäli siihen liittyvällä dipolimomentilla on ”kiihtyvyyttä”. Edellä käsitelty dipoliantenni on esimerkki tällaisesta tilanteesta. Niinkin voi käydä, että vaikka varausjoukossa olisi kiihtyvässä liikkeessä olevia varauksia, niiden muodostama dipolimomentti voisi olla ajasta riippumaton, mutta varaukset säteilisivät siitä huolimatta. Tällöin edellä olevissa sarjakehitelmissä on mentävä korkeampiin kertalukuihin. Seuraavana tulee kvadrupolitermi ja itseasiassa kvadrupoliantenni on aivan käyttökelpoinen vehje. Sen etuna on se, että säteilykenttä pienenee kuten  $r^{-2}$ , joten säteily ei häiritse kaukana lähteestä olevia vastaanottimia.

Tässä esitetty tarkastelu soveltuu myös yksittäiseen kiihtyvään varaukseen, jolloin  $\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}}$  ja saadaan tuttu Larmorin kaava

$$P_R = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^3} \quad (15.46)$$

Se on voimassa hitaasti liikkuvalla (ei-relativistiselle) kiihtyvälle varaukselle.

## 15.4 Aallon vaimeneminen ja Thomsonin sironta

Säteily vie mukanaan energiaa, joten säteilytehon ylläpitäminen edellyttää työtä, josta vastaa jonkinlainen lähetin. Jos väliaineessa, jonka läpi aalto etenee, on elektroneja, ne vuorovaikuttavat säteilykentän kanssa ja saavat siltä energiaa. Aalto siis vaimenee.

Yhden nopeudella  $v$  liikkuvan elektronin säteilyteho on Larmorin kaavan mukaisesti

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{v}^2}{c^3} \quad (15.47)$$

Tehonhävikkiä kuvaavan voiman ja tehon välinen suhde on

$$F = -\frac{P}{v} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{v}^2}{v} \quad (15.48)$$



Kuvataan tämän suuruista tehon hävikkiä nopeuteen verrannollisella vaimentavalla voimalla  $F = -Gv$ , missä  $G$  antaa oskillaation vaimennuskertoimen  $\gamma = G/m$  (vrt. dispersiivisen väliaineen malli luvussa 12), jolloin

$$\gamma = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \dot{v}^2 \quad (15.49)$$

Oletetaan varauksen värähtelevän,  $v = v_0 \sin \omega t$ , jolloin

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} \quad (15.50)$$

Tämä lauseke on jonkin verran hankala, sillä sen nimittäjä menee nollassi jokaisella jaksolla. Ongelman käsittelemiseksi on tarkasteltava säteilyn reaktiovoimaa, mikä ei ole triviaali asia. Lopputulos on, että tarkasteltaessa keskimääräistä tehoa voidaan osoittajasta ja nimittäjästä ottaa keskiarvo erikseen. Koska

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle \quad (15.51)$$

efektiivinen vaimennuskertoimen on

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (15.52)$$

Ottamalla käyttöön **elektronin klassinen säde**  $R_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2) = 2.81 \cdot 10^{-15}$  m, saadaan vaimennuskertoimen suhde taajuuteen ilmaistua  $R_e$ :n ja aallonpituuden ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ ) suhteena

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_e}{\lambda} \quad (15.53)$$

Tästä saadaan arvioiduksi alaraja SM-aallon vaimenemisesta aiheutuvalla spektriviivan leveydelle. Nyt  $\gamma = \Delta\omega$  ja  $\Delta\omega/\omega = \Delta\lambda/\lambda$ , joten

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi}{3} R_e = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ nm} \quad (15.54)$$

Käytännössä absorptioviivat ovat yleensä selvästi leveämpiä, sillä väliaineessa on usein muitakin säteilyä vaimentavia mekanismeja kuin vuorovaikutus yksittäisten elektronien kanssa. Lisäksi Dopplerin efektistä aiheutuva spektriviivojen leveneminen tulee merkittäväksi esimerkiksi astrofysikaalisia spektrejä katseltaessa.

SM-aallon siroamista yksittäisestä vapaasta elektronista kutsutaan **Thomsonin sironnaksi**. Aallon sähkökenttä aiheuttaa kiihtyvyyden

$$m\dot{v} = eE \quad (15.55)$$

joten Larmorin kaava antaa elektronin säteilemän tehon

$$P = \frac{e^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \quad (15.56)$$

**Thomsonin sironnan vaikutusala**  $\sigma_T$  on  $P$  jaettuna elektroniin kohdistuvalla Poyntingin vektorilla. Koska Poyntingin vektori antaa tehon pinta-alaa kohti, vaikutusalan yksikkö on todellakin  $\text{m}^2$ .

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad (15.57)$$

joten

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \quad (15.58)$$

Thomsonin sironta on tärkeä ilmiö mm. röntgenfysiikassa. Röntgensäteiden taajuus on paljon suurempi kuin useiden väliaineen elektronien resonanssitaajuus (luku 12). Tämän voi myös ilmaista sanomalla, että röntgensäteilyn fotonien energia on paljon suurempi kuin elektronien sidosenergia. Tällaiset elektronit ovat röntgensäteiden kannalta vapaita. Koska Thomsonin sironnan vaikutusala on hyvin pieni atomin kokoon nähden, pääsee röntgensäteily tunkeutumaan syvälle aineeseen ennen vaimenemistaan.

Vapaita elektroneja on myös plasmassa. Esimerkkinä Thomsonin sironnan hyväksikäytöstä on epäkoherentti ionosfääritutka, joka lähettää esimerkiksi noin 1 GHz:n radioaaltoa avaruuteen. Suurin osa signaalista menee ionosfäärin läpi, mutta yksittäiset elektronit kuitenkin sirottavat riittävästi tehoa takaisin, joka voidaan havaita tehokkailla vastaanottimilla. Sironneen signaalin spektri riippuu ionosfäärin fysikaalisista parametreista ja antaa tietoa lähiavaruuden ilmiöistä.