Luku 17

Varatun hiukkasen liike SM-kentässä

Tarkastellaan tässä luvussa varatun hiukkasen liikettä sähkömagneettisessa kentässä. Asiaa on käsitelty RMC:n luvussa 14 ja CL käsittelee Hamiltonin formalismia luvussa 8.4. Liikeyhtälö on tullut esiin useaan otteeseen kurssin aikana aiemminkin.

Yleisesti asetettuna tehtävänä on ratkaista relativistinen liikeyhtälö

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{17.1}$$

missä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Lisäksi muistetaan, että kenttä tekee työtä teholla $dW/dt = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$. Liikeyhtälö on hankala integroitava yleisille ajasta ja paikasta riippuville kentille ja se on usein ratkaistava numeerisesti. Jos aika- ja paikkariippuvuuksien voi olettaa olevan riittävän hitaita ja laakeita, on mahdollista käyttää häiriöteoriaa lähtien vakiokentistä ja tehdä niihin pieniä korjauksia.

17.1 Säteilyhäviöiden vaikutus

Liikeyhtälön käsittelyyn sisältyy hyvin vaikea ongelma. Jos hiukkasella on kiihtyvyyttä, sen säteilee ja säteily kuljettaa mukanaan energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Varatun hiukkasen säteilyä kuitenkin tarkastellaan tyypillisesti kaksivaiheisesti. Ensin ratkaistaan liikeyhtälöstä hiukkasen rata annetussa ulkoisessa kentässä. Sen jälkeen lasketaan säteilyhäviöt olettaen, että hiukkanen pysyy ratkaistulla radallaan. Käytännössä monessa tilanteessa säteilyn vaikutus voidaankin jättää huomiotta.

Säteilyn merkitystä voidaan arvioida tutkimalla tilannetta, jossa hiukkasella (varaus q) kiihtyvyys on suuruusluokkaa a ajan T verran. Jos nopeus on paljon valon nopeutta pienempi, niin Larmorin kaavan perusteella hiukkasen säteilemä energia on

$$W_{rad} \sim \frac{q^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{17.2}$$

Jos kyseessä on levosta lähtenyt hiukkanen, niin silloin sen liike-energia on luokkaa $W_{kin} \sim m(aT)^2$. Siten

$$\frac{W_{rad}}{W_{kin}} \sim \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3 T} = \frac{\tau}{T} \tag{17.3}$$

missä $\tau = q^2/(6\pi\epsilon_0 mc^3 T)$ on karakteristinen aika. Varauksellisista hiukkasista se on suurin elektroneille ($\sim 10^{-23}$ s), missä ajassa valo etenee matkan $c\tau \sim 10^{-15}$ m. Jos taas kyseessä on jaksollinen liike amplitudilla d ja kulmataajuudella ω, niin $W_{kin} \sim m\omega^2 d^2$, $a \sim \omega^2 d$ ja $T \sim 1/\omega$. Silloin

$$\frac{W_{rad}}{W_{kin}} \sim \omega\tau \tag{17.4}$$

Yhteenvetona voi todeta, että säteilyhäviöt ovat lyhytkestoisessa liikkeessä merkittäviä vain, jos hiukkasen liike muuttuu ulkoisten voimien takia merkittävästi aikaskaalassa τ tai pituusskaalassa $c\tau$. Pitkäkestoisessa liikkeessä kumuloituvat säteilyhäviöt on puolestaan aina otettava huomioon.

17.2 Homogeeninen ja staattinen B

Oletetaan aluksi, että $\mathbf{E} = 0$ ja $\mathbf{B} =$ vakio. Rajoitutaan lisäksi epärelativistiseen tapaukseen $v << c$, jolloin

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{17.5}$$

Ottamalla tästä pistetulo $\mathbf{v}$:n kanssa saadaan

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0 \tag{17.6}$$

Hiukkasen liike-energia ja nopeuden itseisarvo ovat siis vakioita. Valitaan koordinaatisto siten, että $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Tällöin

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \tag{17.7}$$

Magneettikentän suuntainen nopeus on siis vakio ($v_\parallel$). Ratkaistaan liikeyhtälö alkuehdoilla $\mathbf{r}(t = 0) = 0$ ja $\mathbf{v}(t = 0) = (v_0, 0, v_\parallel)$. Derivoimalla poikittaisia komponentteja toisen kerran ajan suhteen saadaan yhtälöt

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \ ; \quad \ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y \tag{17.8}$$

missä ω_c on **pyörähdystaajuus**, **syklotronitaajuus** tai **Larmorin taajuus**

$$\omega_c = qB/m \tag{17.9}$$

Koska $\ddot{y} = -\omega_c \dot{x}$, niin integroimalla ja alkuehdot huomioimalla saadaan $v_y = -\omega_c x$. Tällöin yhtälöstä $\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$ seuraa

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \tag{17.10}$$

ja sama yhtälö y-koordinaatille. Saadut yhtälöt kuvaavat harmonisia värähtelijöitä, joiden kulmataajuus on ω_c. Ratkaisemalla hiukkasen rata nähdään, että ratakäyrän projektio $xy-$tasossa on ympyrä, jonka säde on

$$r_L = \frac{v_\perp}{|\omega_c|} = \frac{mv_\perp}{|q|B} \tag{17.11}$$

Tässä $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ on hiukkasen nopeus kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä kutsutaan **pyörähdyssäteeksi** (Larmorin säteeksi). Pyörimisliikkeen keskipistettä kutsutaan **johtokeskukseksi** (guiding center, GC). Yhteen kierrokseen kuluva aika, **pyörähdysperiodi** (Larmorin aika), on

$$\tau_L = \frac{2\pi}{|\omega_c|} \tag{17.12}$$

Katsottaessa magneettikentän suuntaan myötäpäivään pyörivän hiukkasen varaus on negatiivinen (HT).

Näin hiukkasen liike on jaettu kahteen komponenttiin: vakionopeus $v_\parallel$ kentän suuntaan ja pyörimisliike $v_\perp$ kenttää vastaan kohtisuoraan. Näiden summa on ruuviviiva. Ruuviviivan **nousukulma** määritellään kaavalla

$$\tan\alpha = v_\perp / v_\parallel \tag{17.13}$$

joten

$$\alpha = \arcsin(v_\perp/v) = \arccos(v_\parallel/v) \tag{17.14}$$

Koordinaatistoa, jossa $v_\parallel = 0$ kutsutaan **johtokeskuskoordinaatistoksi** (GCS) ja hiukkasen liikkeen jakamista GC:n liikkeeseen ja pyörimisliikkeeseen GC:n ympäri kutsutaan **johtokeskusapproksimaatioksi**.

GCS:ssä varaus aiheuttaa sähkövirran $I = q/\tau_L$, johon liittyvä **magneettinen momentti** on

$$\mu = I\pi r_L^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2 r_L^2 B}{m} = \frac{1}{2}\frac{mv_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B} \tag{17.15}$$

Vektorimuodossa magneettinen momentti on

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\, q\, \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_\perp \tag{17.16}$$

Koska pyörähdyssädevektorissa on mukana varauksen merkki, $\boldsymbol{\mu}$:n suunta on varauksesta riippumatta vastakkainen taustan magneettikentälle eli vapaat varatut hiukkaset muodostavat tässä mielessä diamagneettisen systeemin.

Myös relativistinen liikeyhtälö on tässä tapauksessa helppo ratkaista. Koska liike-energia on vakio, niin γ on vakio. Liikeyhtälön komponentit ovat siis

$$\begin{aligned} \gamma m \dot{v}_x &= qBv_y \\ \gamma m \dot{v}_y &= -qBv_x \\ \gamma m \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \tag{17.17}$$

eli vakiotekijää γ lukuunottamatta samat kuin edellä. Pyörähdystaajuus on nyt $\omega_c = qB/(\gamma m)$.

17.3 Homogeeniset ja staattiset B ja E

Oletetaan nyt, että vakiomagneettikentän lisäksi hiukkasiin vaikuttaa myös sähkökenttä $\mathbf{E}$ = vakio. Magneettikentän suuntaiseksi epärelativistiseksi liikeyhtälöksi tulee

$$m\dot{v}_\parallel = qE_\parallel \tag{17.18}$$

Tämä kuvaa kiihdytystä magneettikentän suuntaan. Tarkastellaan sitten poikittaista sähkökenttää ja valitaan se x-akselin suuntaiseksi, jolloin

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x \end{aligned} \tag{17.19}$$

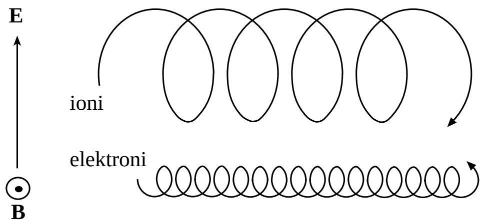
Ottamalla jälleen toinen aikaderivaatta saadaan

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) \end{aligned} \tag{17.20}$$

Sijoittamalla $v'_y = v_y + E_x/B$ saadaan yhtälöryhmä (17.8). Tässäkin tapauksessa hiukkanen kieppuu GC:n ympäri, mutta nyt GC kulkeutuu y-akselin suuntaan nopeudella E_x/B. Vektorimuodossa kulkeutumisnopeus on

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \tag{17.21}$$

Tätä kutsutaan **sähköiseksi kulkeutumiseksi** tai $E \times B$-kulkeutumiseksi (kuva 17.1). Kulkeutumisnopeus ei riipu varauksesta eikä hiukkasen massasta!



Kuva 17.1: Sähköinen kulkeutuminen.

Edelläolevassa laskussa tehtiin itseasiassa Lorentzin muunnos sähkökentälle hiukkasen mukana liikkuvaan koordinaatistoon

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{17.22}$$

Koska tässä koordinaatistossa **E**' = 0, $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ja ratkaisemalla tästä $\mathbf{v}$ saadaan (17.21). Tämä koordinaatiston muunnos voidaan tehdä kaikille riittävän heikoille ei-magneettisille voimille $\mathbf{F}_\perp$. Vektorimuodossa

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{F}_\perp}{m} \tag{17.23}$$

Olettamalla, että $\mathbf{F}_\perp$ aiheuttaa kulkeutumisen $\mathbf{v}_D$, tehdään muunnos $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}'_\perp + \mathbf{v}_D$:

$$\frac{d\mathbf{v}'_\perp}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}'_\perp \times \mathbf{B}) + \frac{q}{m}(\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{F}_\perp}{m} \tag{17.24}$$

GCS:ssä kahden viimeisen termin on kumottava toisensa, joten

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B}}{qB^2} \tag{17.25}$$

Tämä temppu edellyttää, että $F/qB \ll c$. Jos $F > qcB$, ei johtokeskusapproksimaatiota yksinkertaisesti voi tehdä.

Sijoittamalla ylläolevaan $\mathbf{F}_\perp = q\mathbf{E}$ saadaan tietenkin E×B-kulkeutuminen. Gravitaatiokenttä puolestaan johtaa kulkeutumiseen

$$\mathbf{v}_g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad \propto \frac{m}{q} \tag{17.26}$$

Gravitaatiokenttä separoi siis hiukkaset niiden m/q:n mukaan, muttei gravitaation suuntaan vaan kohtisuoraan sitä ja magneettikenttää vastaan!

17.4 Liikeyhtälö kanonisessa formalismissa

Hiukkasliikkeen käsittely voidaan tehdä elegantisti käyttäen mekaniikan kurssilta (toivottavasti) tuttua kanonista formalismia. Koska elektrodynamiikan esitietoina ei oleteta mekaniikan kurssia, tämä luku jää yleissivistäväksi (tärkeäksi) tiedoksi.

Sijoitetaan sähkö- ja magneettikentät Lorentzin voiman lausekkeeseen skalaari- ja vektoripotentiaalien avulla:

$$\mathbf{F} = q(-\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \tag{17.27}$$

Muunnetaan tämä kanoniseen muotoon ilmaisemalla se riippumattomien muuttujien $\mathbf{r}$ ja $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ avulla. Käytetään seuraavassa merkintöjä $\partial/\partial r_i = \partial_i = \nabla_i$ ja oletetaan summaus toistetun indeksin yli. Suorilla laskuilla nähdään

$$[\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \dot{r}_j \partial_i A_j - \dot{r}_j \partial_j A_i = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

Yhtälöiden $d\mathbf{A}/dt = \partial_t \mathbf{A} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ ja $\dot{r}_j \partial_i A_j = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$ avulla voiman lausekkeesta saadaan

$$\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \nabla(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt}\mathbf{A}\right] \tag{17.28}$$

Koska φ ei riipu nopeudesta, voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}A_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(-\varphi + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\right)$$

minkä avulla voiman i:s komponentti saadaan muotoon

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial r_i}(q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(-q\varphi + q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\right) \tag{17.29}$$

Lorentzin voima on nyt ilmaistu Lagrangen mekaniikassa *yleistetyn* potentiaalin

$$U = q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \tag{17.30}$$

avulla

$$m\ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}_i} \tag{17.31}$$

Lagrangen funktion $L = m\,\dot{\mathbf{r}}^2/2 - U$ avulla liikeyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0 \tag{17.32}$$

Nämä **Lagrangen liikeyhtälöt** ovat toista kertalukua. Niistä voidaan muodostaa ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä siirtymällä **kanonisiin muuttujiin** r_i (kanoninen koordinaatti) ja $\pi_i = \partial L/\partial \dot{r}_i = m\dot{r}_i + qA_i$ (kanoninen liikemäärä). Muodostetaan näiden muuttujien **Hamiltonin funktio**

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{r}, t) &= \dot{r}_i \pi_i - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \dot{r}_i \pi_i - \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \end{aligned} \tag{17.33}$$

Kanoniset liikeyhtälöt ovat nyt

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \frac{1}{m}(\pi_i - qA_i) \tag{17.34}$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -q\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} + \frac{q}{m}\boldsymbol{\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} - \frac{q^2}{m}\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} \tag{17.35}$$

joista alkuperäisen liikeyhtälön johtaminen on suoraviivainen HT.

Kvanttimekaniikan Schrödingerin yhtälö voidaan ilmaista Hamiltonin funktion avulla yleistämällä se kvanttimekaaniseksi operaattoriksi. Kun elektrodynamikkaa viedään kvanttitasolle, se tehdään nimenomaan tässä formalismissa, missä olennaista on kappaleen mekaanisen liikemäärän $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ korvaaminen sen sähkömagneettisella liikemäärällä $m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$.