Laplacen yhtälön ratkaisu laatikossa

(Löytyy myös Jacksonin kirjasta.)

Perusesimerkki Laplacen yhtälön yhtälön ratkaisemisesta on laatikko, jossa yhtä sivua lukuunottamatta potentiaali reunoilla on nolla. Olkoon nyt laatikkona alue $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$ ja potentiaali nolla muilla reunoilla paitsi yläkannella ($z = c$), jossa se on tunnetuksi oletettu funktio $V(x, y)$. Tehtävänä on laskea potentiaali φ laatikon sisällä.

Laplacen yhtälölle karteesisissa koordinaateissa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

etsitään ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

Yleinen ratkaisu on tällaisten ratkaisujen summa. Valitsemalla sopivasti separointivakiot α, β, γ saadaan

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \\ Y(y) &= B_1 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \\ Z(z) &= C_1 \sinh(\gamma z) + C_2 \cosh(\gamma z) \end{aligned} \tag{3}$$

missä yleisesti kompleksiarvoiset vakiot A_i, B_i, C_i ja α, β, γ määräytyvät ongelman reunaehdoista ja $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

Tässä on tietoisesti valittu trigonometriset funktiot x- ja y-suunnissa ja hyperboliset funktiot z-suunnassa. Reunaehtoja soveltamalla nähdään heti, että voidaan valita $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, kun separointivakiot α ja β toteuttavat seuraavat ehdot (reunaehdoista sivuilla $x = a$ ja $y = b$):

$$\begin{aligned} \alpha &= m\pi/a \\ \beta &= n\pi/b \end{aligned} \tag{4}$$

missä m, n ovat kokonaislukuja, ja ne voidaan rajoittaa lisäksi positiviisiksi. Myös kolmas separointivakio saa silloin vain diskreettejä arvoja:

$$\gamma = \gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \tag{5}$$

Tähän mennessä on siis saatu ratkaisuksi

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn} z) \tag{6}$$

On helppo tarkastaa, että tämä toteuttaa Laplacen yhtälön ja antaa potentiaaliksi nollan vaadituilla reunoilla. Tuntemattomat kertoimet A_{mn} saadaan asettamalla $z = c$:

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn} c) \tag{7}$$

Loppu onkin Fourier-kertoimien määrittämistä. Olettamalla, että funktio $V(x, y)$ on riittävän siisti, kertoimet saadaan laskettua ortogonaalisuusintegraalien avulla. Tämä lienee tuttua FYMM I:ltä.

Edellä ei mietitty sitä mahdollisuutta, että jokin tai jotkin separointivakioista olisivat voineet olla nollia. Huolellinen lukija tutkikoon erikseen tämän tilanteen. Lyhyemmin voidaan kuitenkin todeta, että löydetty ratkaisu on selvästi kelvollinen ja yksikäsitteisyyslauseen mukaan ongelma on sillä selvä.