Pistevaraus eristepinnan lähellä

(Löytyy myös Jacksonin kirjasta.)

Tarkastellaan tilannetta, jossa xy-taso jakaa avaruuden kahteen homogeeniseen eristealueeseen: $(z > 0, \epsilon_1)$ ja $(z < 0, \epsilon_2)$. Asetetaan varaus q pisteeseen $(0, 0, d)$ alueeseen 1. Tehtävänä on laskea potentiaali koko avaruudessa. Oletetaan, ettei aineiden rajapinnalla ole varauksia.

Tehtävän voisi ratkaista suoraan Poissonin yhtälöä käyttäen, mutta helpommalla päästään kuvalähdemenetelmän avulla. Otetaan mallia tilanteesta, jossa varaus on maadoitetun johdetason yläpuolella. Silloin ongelma ratkeaa peilikuvavarauksella $-q$ pisteessä $(0, 0, -d)$. Eristeenkin tapauksessa potentiaali alueessa 1 voidaan yrittää esittää varauksen q ja jonkin *alueessa 2* sijaitsevan kuvavarauksen q' avulla. Yksinkertaisin arvaus on sijoittaa kuvavaraus pisteeseen $z = -d$, jolloin potentiaali *alueessa 1* on sylinterikoordinaateissa lausuttuna Poissonin yhtälön toteuttava

$$\varphi_1(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}}\right) \tag{1}$$

(Kiertosymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, mutta tehtävä ratkeaa sujuvasti myös karteesisessa koordinaatistossa.)

Alue 2 on eriste, joten johdetilanteesta poiketen sielläkin on kenttä. Koska alueessa 2 ei ole varauksia, potentiaali toteuttaa siellä Laplacen yhtälön. Ainakin laskennallisesti kelvollinen ratkaisu alueessa 2 saadaan *alueessa 1* sijaitsevan kuvavarauksen q'' avulla, joka viisaasti sijoitetaan pisteeseen $z = d$. Tällöin potentiaali *alueessa 2* on

$$\varphi_2(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \tag{2}$$

Mikäli kuvavarausten suuruudet saadaan sovitettua siten, että reunaehdot toteutuvat, niin ongelma on ratkaistu. Reunaehtojen mukaan sähkövuon tiheyden z-komponentti on jatkuva rajapinnalla (ei pintavarausta) samoin kuin sähkökentän r-komponentti. Jälkimmäinen on yhtäpitävää sen kanssa, että potentiaali on jatkuva. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2}q'' \end{aligned} \tag{3}$$

Kuvavaraukset ovat siten

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\, q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\, q \end{aligned} \tag{4}$$

Lukijalle jää harjoitustehtäväksi laskea polarisoitumaan liittyvä varaustiheys aineiden rajapinnalla. Jos väliaine 2 onkin johde, niin ratkaisu saadaan muodollisesti asettamalla ϵ_2 äärettömäksi, jolloin potentiaali alueessa 2 häviää ja $q' = -q$.

Viimeistään reunaehtoja sovellettaessa tuli selväksi, että kuvalähteet kannatti sijoittaa nimenomaan pisteisiin $z = -d$ ja $z = d$. Paikkariippuvuudet supistuvat silloin reunaehtoyhtälöistä kokonaan.

Lopuksi kannattaa muistuttaa, että kuvalähteet ovat vain kuvitteellisia apuvälineitä, jotka eivät oikeasti sijaitse missään. Kun ratkaisu on löydetty, kuvalähteet voidaan vaikka unohtaa ja todeta suoraan saaduista lausekkeista, että kaikki vaadittavat yhtälöt reunaehtoineen toteutuvat.