Vektoripotentiaalin multipolikehitelmä

Esitetään tässä vaihtoehtoinen menetelmä vektoripotentiaalin multipolikehitelmän laskemiseksi (Jackson). Luennoissa tutkitaan virtasilmukkaa, mutta tässä oletetaan yleinen divergenssitön virrantiheys $\mathbf{J}$, joka poikkeaa nollasta vain äärellisessä tilavuudessa V.

Koska vektoripotentiaalin integraaliesitys on samaa muotoa kuin sähköisen skalaaripotentiaalin, voidaan suoraan kirjoittaa vektoripotentiaalin komponentille A_l

$$A_l(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\int J_l(\mathbf{r})\ dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int \mathbf{r}' J_l(\mathbf{r})\ dV'\ + ...\right) \tag{1}$$

Integraalien laskemiseksi käytetään seuraavaa aputulosta:

$$\nabla\cdot(fg\mathbf{J}) = f\mathbf{J}\cdot\nabla g + g\mathbf{J}\cdot\nabla f \tag{2}$$

missä f ja g ovat vapaasti valittavia funktioita. Tässä myös käytettiin oletusta $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$. Integroimalla tilavuuden V yli saadaan

$$\int(f\mathbf{J}\cdot\nabla g + g\mathbf{J}\cdot\nabla f) = 0 \tag{3}$$

($\nabla\cdot(fg\mathbf{J})$:n sisältävä integraali voidaan ulottaa yli koko avaruuden, koska alueen V ulkopuolella virrantiheys on nolla. Muunnos pintaintegraaliksi antaa silloin nollan.)

Integroitaessa multipolikehitelmän ensimmäistä termiä valitaan yksinkertaisesti $f = 1$ ja $g = x_l$, jolloin $\int \mathbf{J}\ dV = 0$ eli monopolitermiä ei magneettikentän tapauksessa ole.

Seuraava eli dipolitermi käsitellään valitsemalla $f = x_l, g = x_n$, jolloin

$$\mathbf{r}\cdot\int \mathbf{r}' J_l\ dV' = x_n\int x_n'\ J_l\ dV' = -\frac{1}{2}x_n\int(x_l' J_n - x_n' J_l)\ dV' \tag{4}$$

missä summataan kahdesti esiintyvän indeksin n yli ja käytettiin kaavaa 3. Integrandi muistuttaa vektoritulon komponenttia, ja pienen tarkastelun jälkeen huomataan, että

$$\mathbf{r}\cdot\int \mathbf{r}' J_l\ dV' = -\frac{1}{2}\epsilon_{lnp}x_n\int(\mathbf{r}'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}'))_p\ dV' \tag{5}$$

missä ϵ_{lnp} on permutaatiosymboli ja summaus on nyt myös yli indeksin p. Lauseke sieventyy muotoon

$$\mathbf{r}\cdot\int \mathbf{r}' J_l\ dV' = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\int \mathbf{r}'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')\ dV')_l = (\mathbf{m}\times\mathbf{r})_l \tag{6}$$

missä $\mathbf{m}$ on virtajärjestelmän magneettimomentti.