

RLC-piiri

Kerrataan RLC-piirien perusasioita induktion ja sähkömagneettisen energian havainnollistamiseksi. Asia lienee sinänsä tuttua peruskurssilta. Tarkastellaan yksinkertaista virtapiiriä, jossa on sarjaan kytkettynä vastus (resistanssi R), käämi (induktanssi L) ja kondensaattori (kapasitanssi C) (kuva 1). Lisäksi piirissä on jännitelähde $V(t)$.

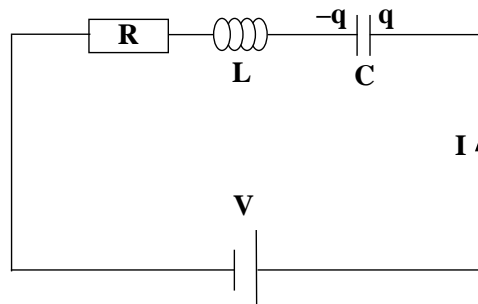
Valitaan kondensaattorin varauksen merkki ja virran positiivinen suunta kuvan mukaisesti, jolloin Kirchhoffin säännöstä saadaan

$$V - L \frac{d^2 I}{dt^2} = RI + q/C \quad (1)$$

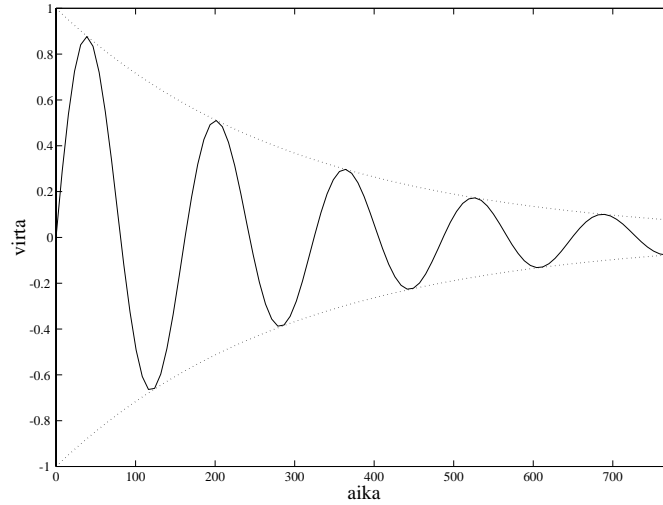
Derivoimalla ajan suhteen ja käyttämällä yhteyttä $dq/dt = I$ saadaan virralle toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{V}{L} \quad (2)$$

Tarkastellaan ensin ideaalista tapausta, jossa piirin resistanssi on häviävän pieni (LC-piiri). Oletetaan, ettei piirissä myöskään ole jännitelähdettä V . Kyseessä on siis varatun kondensaattorin purkaminen käämin kautta. Tällöin yhtälö 1 on mekaniikasta tuttu harmonisen värähtelijän likeyhtälö, ja värähtelyn kulmataajuus on $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Jos kondensaattorin varaus on aluksi Q , niin ajan funktiona se muuttuu sinimuotoisesti: $q(t) = Q \cos \omega t$ ja virta on $I(t) = -\omega Q \sin \omega t$. Systemin sähkömagneettinen energia on $U(t) = LI^2/2 + q^2/(2C) = Q^2/(2C)$ eli koko ajan sama kuin kondensaattorin sähköstaattinen energia aluksi. Kokonaisenergia siis säilyy, se vain jakautuu sähkö- ja magneettikentän energiaksi (säteilöhäviöitä ei tässä oteta huomioon).



Kuva 1: Yksinkertainen RLC-piiri. Kondensaattorin sen levyn varaus on $+q$, johon positiivinen virta tuo varausta, jolloin $I = dq/dt$.



Kuva 2: Vaimeneva värähtely RLC-piirissä. Katkoviivoilla on piirretty vaimennusfunktion $\pm \exp(-Rt/2L)$ kuvaaja.

Kondensaattorin varaus alkaa aluksi purkautua käänin kautta. Itseinduktion takia tämä ei tapahdu silmänräpäyksessä. Induktiovirta kulkee myös sen hetken jälkeen, jolloin kondensaattorin varaus on nolla. Virta kulkee niin kauan samaan suuntaan, että levyjen varaukset ovat alkutilaan nähden vastakkaismerkkiset. Sen jälkeen kondensaattorin varaus alkaa taas purkautua jne.

Todellisessa piirissä on aina jonkin verran resistanssia. Tilanteen laskennallinen tarkastelu on suoraviivaista differentiaaliyhtälöiden käsittelyä eikä sitä käydä tässä läpi. Mainitaan vain esimerkiksi tilanne, jossa piiriin kytetään tasajännite V hetkellä $t = 0$, ja kondensaattori on alkuhetkellä varaukseton. Piirin virta on silloin

$$I(t) = (V_0/\omega L)e^{-Rt/(2L)} \sin \omega t \quad (3)$$

missä $\omega = \sqrt{1/LC - (R/(2L))^2}$. Kulmataajuus ω voi tässä tapauksessa olla imaginaarinen, mutta joka tapauksessa piirin virta vaimenee eksponentiaalisesti. Kuvassa 2 on esitetty tilanne, jossa ω on reaalin.