Lorentz-muunnos

(Lähde: K. ja R. Kurki-Suonio, Vuorovaikuttavat Kappaleet)

Liikkukoon koordinaatisto K' koordinaatiston K suhteen vakionopeudella $\mathbf{v}$. Havaitsijat O ja O' havaitsevat saman tapahtuman ja määrittävät sen paikan ja hetken: (x, y, z, t) ja (x', y', z', t'). Lisäksi oletetaan, että heillä yhteinen fysikaalisiin ilmiöihin perustuva standardi, jonka perusteella he käyttävät samoja mittayksiköitä.

Etsitään havaintojen välinen yhteys käyttäen neljää yleistä ehtoa.

Ehto 1. Aika ja avaruus ovat homogeenisia. Kahden infinitesimaalisen lähekkäisen tapahtuman siirtymien ja aikavälien välinen muunnos $(\mathbf{dr}, dt) \leftrightarrow (\mathbf{dr}', dt')$ on silloin sama aina ja kaikkialla eli niiden välillä on lineaarinen yhteys. Tästä seuraa, että myös koordinaattien välinen yhteys on lineaarinen:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + e_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + e_2 \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + e_3 \\ t' &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t + e_4 \end{aligned}$$

missä kertoimet a_i, b_i, c_i, d_i ovat vakioita.

Yleisyyttä rajoittamatta voidaan sopia, että koordinaatistojen origot yhtyvät kummankin nollahetkellä. Voidaan myös sopia, että koordinaattiakselit ovat samansuuntaisia ja että K' liikkuu K:n x-akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Tällöin yhtälöryhmä yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= hx + kt \end{aligned}$$

Ehto 2. Koordinaatistojen suhteellinen nopeus on kummankin havaitsijan mielestä sama. Tällöin K':n origossa hetkellä t' sattuva tapahtuma havaitaan K:ssa hetkellä t pisteessä $x = vt$ tapahtuvaksi: $(vt, t) \leftrightarrow (0, t')$. Vaaditun symmetrian mukaan pätee vastaavasti $(0, t) \leftrightarrow (-vt', t')$. Sijoittamalla muunnoskaavoihin saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= avt + bt \\ t' &= hvt + kt \\ -vt' &= bt \\ t' &= kt \end{aligned}$$

Muunnos siis pelkistyy muotoon

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= k(t - \alpha x) \end{aligned}$$

missä $\alpha = h/k$.

Ehto 3. Valon nopeus c on absoluuttinen. Tämä on ratkaiseva ero klassiseen Galilei-muunnokseen verrattuna. Ajatellaan, että yhteisellä nollahetkellä yhteisessä origossa tapahtuu valonvälähdys. Valon saapuminen mielivaltaisessa pisteessä olevaan ilmaisimeen havaitaan hetkillä t ja t'. Tapahtumien vastaavuus on $(x = ct, t) \leftrightarrow (x' = ct', t')$, koska c on sama kummankin havaitsijan mielestä. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} ct' &= k(ct - vt) \\ t' &= k(t - \alpha ct) \end{aligned}$$

ja voidaan ratkaista $\alpha = v/c^2$.

Ehto 4. Käänteismuunnos saadaan symmetrisesti vaihtamalla nopeuden etumerkki eli molempien inertiaalikoordinaatistojen on oltava samassa asemassa (vrt. ehto 2). Tällöin

$$\begin{aligned} x &= k(x' + vt') \\ t &= k(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

Näin voidaan ratkaista $k = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Lorentz-muunnoskaavat ovat siis

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned}$$

ja kääntäen

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned}$$