Elektrodynamiikka, kevät 2002

Harjoitus 1 (to 31.1., pe 1.2.)

1. Vektorilaskenta on välttämätöntä elektrodynamiikassa. Tähän on koottu useampi tehtävä asian treenaamiseksi.

   Ristituloja on kätevä puljata permutaatiosymbolin eli Levi-Civitan symbolin ϵ_{ijk} avulla. Se määritellään seuraavasti: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ (parillinen määrä permutaatioita), $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$ (pariton määrä permutaatioita), kaikki muut $\epsilon_{ijk} = 0$.

   a) Osoita, että ristitulon $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ i:s komponentti on $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$. Tässä summataan kahdesti esiintyvien indeksien yli ($j, k = 1, 2, 3$).

   b) Osoita, että $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, missä δ_{ij} on Kroneckerin delta. Vasemmalla puolella summataan kahdesti esiintyvän indeksin k yli.

   c) Todista seuraavat vektori-identiteetit. Huomaa, että lyhyen summausmerkinnän avulla $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_iB_i$.

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{H} - (\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{A}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = 0$$

2. Tee uskottavaksi, että (fysiikassa)

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Käännä →

3. Laske sähkökenttä kahden tasaisesti varatun lähekkäisen yhdensuuntaisen levyn välissä eli levykondensaattorin sisällä ja myös ulkopuolella (approksimoi sopivasti). Levyjen kokonaisvaraukset ovat $+Q$ ja $-Q$ ja kummankin levyn pinta-ala A. Kuinka suurella voimalla levyt vetävät toisiaan puoleensa?

4. Vetyatomin potentiaalin aikakeskiarvo on

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}(1 + \frac{\alpha r}{2})$$

missä q on alkeisvaraus ja $1/\alpha = a_0/2$ (a_0 on Bohrin säde). Laske varaustiheys ja tulkitse fysikaalisesti. Osaisitko perustella potentiaalin lausekkeen perusteella suoraan ilman laskuja, että systeemin kokonaisvaraus on nolla?

5. Tasasivuisen kolmion kärkiin on sijoitettu yhtäsuuret varaukset q. Laske jakautuman monopoli-, dipoli- ja kvadrupolimomentit kolmion keskipisteeseen sijoitetun origon suhteen. Miksi origo kannattaa valita tällä tavalla?

Ratkaisut on palautettava viimeistään tiistaina 29.1. klo 12. Ensimmäiset laskuharjoitukset ovat 31.1. to 8-10 sali D106, 12-14 D117, 1.2. pe 10-12 D106.