

Luku 1

Johdanto

It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.

R. P. Feynman

1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on kuuden opintoviikon paketti elektrodynamiikkaa, joka voidaan sisällyttää joko fysiikan laudatur-oppimäärään tai teoreettisen fysiikan cum laude-oppimäärään. Muutamana viime vuonna nämä aikanaan erilliset kurssit on luennoitu yhdessä. Kahden lähestymistavoiltaan erilaisen kurssin yhdistäminen ei ole ollut aivan helppo asia osin erilaisen oppimateriaalin, mutta myös opiskelijoiden erilaisen taustan ja mielenkiinnon kohteiden vuoksi.

Tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaan tulevilla tilanteissa. Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtäminen kuuluu jokaisen fyysikon yleissivistykseen. Se on opiskelijalle ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä on ratkaiseva osa. Toisaalta sähkömagnetismi on keskeisessä osassa niin kaikkialla fysiikassa kuin arkipäivässäkin. Parempaa syytä elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Tavoitteena on saada sähkö- ja magnetostatiikka sekä induktiolaki käsiteltyä ensimmäisen puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää pääasiassa dynaamisia ilmiöitä, jolloin samalla mennään syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön.

Kurssin lähtötasoksi sähkömagnetismin osalta oletetaan fysiikan peruskurssien hallinta. Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa ovat Kaarle ja Riitta Kurki-Suonion oppikirjat *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet* (KSII) ja *Aaltoliikkeestä dualismiin* (KSIII). Joillakin

opiskelijoilla saattaa olla taustalla peruskurssin sijasta fysiikan approbatur, mikä tietenkin hyvin opiskeltuna riittää sekin.

Yksi elektrodynamiikan opiskelun vaikeuksista on varsin vaativien matemaattisten apuneuvojen tarve. Tällä kurssilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MAPU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Myös FYMM II olisi hyödyllinen, mutta koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat suorittavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä, tätä ei varsinaisesti edellytetä. **FYMM II:n opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on kuitenkin erittäin suositeltavaa.** Tärkeimpiä matemaattisia apuneuvoja kerrataan myös laskuharjoituksissa.

Laskuharjoitustehtävien ratkaiseminen on olennainen osa oppimista. Vaikeimpien ongelmien kohdalla aktiivinen ryhmätyö on erittäin hyödyllistä, kuten myös kirjallisuuden käyttö. Physicumin kirjasto tarjoaa loistavat mahdollisuudet tähän. On myös täysin luvallista kysyä vihjeitä luennoitsijalta ja assistenteilta.

1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti formaalisesti nykyasunsa vuonna 1864, kun *James Clerk Maxwell* julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan ”*Treatise on Electricity and Magnetism*”. Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen teoreettinen rakennelmänsä perustui aiempien fyysikoiden töille, joista mainittakoon 1700-luvulta vaikkapa *Cavendish*, *Coulomb*, *Franklin*, *Galvani*, *Gauss* ja *Volta* sekä aiemmalta 1800-luvulta *Ampère*, *Arago*, *Biot*, *Faraday*, *Henry*, *Savart* ja *Ørsted*.

Tärkeimpiä Maxwellin teorian ennustuksia oli valon nopeudella etenevä sähkömagneettinen aaltoliike, jonka *Heinrich Hertz* onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suureen murroskauteen. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksia olivat esimerkiksi liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri tällaisia ongelmia selittämään *Albert Einstein* kehitti suppeamman suhteellisuusteoriaansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian perusteet voikin olla havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria. Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korrektisti muotoilluksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi myös kvanttifysiikan kehitys. Se aiheutti paljon enemmän elektrodynamiikkaan liittyviä ongelmia, sillä ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi

riittävän yleinen myös mikromaailmassa. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset muotoilut, kuten Schrödingerin yhtälö, ovat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennen kuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan **kvanttielektrodynamiikaksi** (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat *Julian Schwinger*, *Richard Feynman*, *Sin-itiro Tomonaga* ja *Freeman Dyson*. Nykyään elektrodynamiikka QED:n klassisena rajana on osa menestyksestä **standardimallia**, jonka uskotaan olevan oikea tapa yhdistää sähkömagneettinen, heikko ja vahva perusvuorovaikutus. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on perusta paljon pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle!

HT: Kertaa perusvuorovaikutukset.

HT: Kertaa aaltohiukkasdualismi.

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka on tullut osaksi kvanttimaailman ihmeellisyyttä, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä aina ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Se on keskeistä materiaalfysiikassa, hiukkasfysiikassa, röntgenfysiikassa, elektronikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta myös menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Elektrodynamiikan perusongelmia ovat

1. Varauksellisten hiukkasten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän määrittäminen.
2. Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.
3. Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.
4. Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.
5. Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päätyen **Maxwellin yhtälöihin** ikäänkuin olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei ole aivan totta enää tällä kurssilla, vaan käytännössä kaikki ovat jo tutustuneet ainakin päällisin puolin Maxwellin yhtälöihin ja tietävät yhtä ja toista

elektrodynamiikan rakenteesta. Pohditaan jo kurssin aluksi hieman, mistä on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt ”tyhjömuodossaan”:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Sähkökentän \mathbf{E} ja magneettikentän (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden) \mathbf{B} aiheuttajina ovat sähkövaraukset ρ ja sähkövirrat \mathbf{J} . Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein kenttien \mathbf{D} ja \mathbf{H} avulla, mihin palataan myöhemmin.

Yllä ϵ_0 on tyhjän sähköinen permittiivisyys ja μ_0 on tyhjän magneettinen permeabiliteetti. Näiden ja valon nopeuden c välillä on yhteys $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. Koska valon nopeus tyhjössä on vakio, sille annetaan nykyään *tarkka* arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Koska sekunti määritellään tietyn Ce-133 siirtymäviivan avulla, tulee metristä johdannaissuure, joka on aika tarkkaan samanmittainen kuin Pariisissa säilytettävä platinatanko. Myös μ_0 määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

joten myös tyhjän permittiivisyydelle tulee tarkka arvo $\epsilon_0 = (c^2 \mu_0)^{-1}$, jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Nopeudella \mathbf{v} liikkuvaan varaukseen q vaikuttaa **Lorentzin voima**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

Tämä on suureen määrään kokeita perustuva **empiirinen laki**, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä perustavammasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan ”nähdä”, ne ovat fysikaalisia olioita. Niillä on energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mikroskooppisessa kuvailussa QED:n tasolla sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Tähän

ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratoriokokeissa, mikä käy ilmi seuraavista esimerkeistä (HT: tarkasta lukuarvot peruskurssien tietojen avulla):

- Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on suunnilleen 50 V/m. Tämä merkitsee 10^{15} näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.
- Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Vastavaan fotonin liikemäärä on $2,2 \cdot 10^{-34}$ Ns. Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.
- Varausten diskreettisyyttä ei myöskään tarvitse yleensä huomioida. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan 10^{15} alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljetukseen tarvitaan $6,2 \cdot 10^{12}$ varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin päätellä, että riippuvuus on ainakin lähes tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa $1/r^{2+\varepsilon}$, voidaan mittauksilla etsiä rajoja ε :lle. *Cavendish* päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen $|\varepsilon| \leq 0,02$. Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$, ja nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen $|\varepsilon| \leq (2,7 \pm 3,1) \cdot 10^{-16}$.

Teoreettisesti voi perustella, että $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus on yhtäpitävää fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin *Cavendishin* menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa $1,6 \cdot 10^{-50}$ kg. Geomagneettisilla mittauksilla yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi: $1,4 \cdot 10^{-51}$ kg. Fotonin massattomuus ja sähköisen voiman $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus ovat erittäin hyvin todennettuja *kokeellisia* tosiasioita. Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin kävi selväksi, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

1.4 Pari sanaa laskennasta

Elektrodynamiikassa on osattava laskea sujuvasti. Osa menetelmistä on tuttuja ennestään mapuilta ja vastaavilta kursseilta. Osa opitaan FYMM II:lla ja/tai tällä kurssilla. Sähköstatiikassa ja vähän myöhemmin magnetostatiikassa tulee vastaan vektorilaskenta, johon kuuluu erinäinen kokoelma derivointi- ja integrointitaitoja. Ne on syytä opetella heti kunnolla, koska niitä tarvitaan ihan oikeasti (jopa myöhemmin esimerkiksi tutkijan työssä). Erikoisfunktioista ei pidä hermostua, koska ne ovat vain funktioita. Muuta perustarvikkeistoa ovat esimerkiksi Fourier-sarjat ja kompleksiluvut. Ek-

soottisinta lienee tensorilaskenta, jota tarvitaan suhteellisuusteoriassa. Sen perusteet opetellaan tällä kurssilla myös riippumattomasti.

Kokeissa on syytä ”laskennallisissa” tehtävissä kirjoittaa lyhyt sanallinen perustelu. Oikein ymmärretystä fysiikasta voi herua irtopisteitä, vaikka laskenta olisi epäonnistunut. Sanattomat kaavailut puolestaan eivät ole ansiokkaita.

1.5 Kirjallisuutta

- Cronström, C., ja P. Lipas, Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan, Limes ry., 2000 (jatkossa viite CL).

Uudistettu laitos TFO:n monivuotisesta luentomonisteesta. Suositeltavaa oheislukemistoa.

- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, The Feynman lectures on physics, vol. II, Addison-Wesley, 1964.

Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa sisältäen erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua ilman hankalaa laskennallista käsittelyä.

- Griffiths, D. J., Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 1999.

Suosittu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.

- Jackson, J. D., Classical electrodynamics, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.

Klassisen elektrodynamiikan piplia. Harjoitustehtävät ovat riittävän vaikeita. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.

- Kurki-Suonio, K. ja R., Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet ja Aaltoliikkeestä dualismiin, Limes ry., useita painoksia.

Erittäin fysikaalista tekstiä selvällä suomen kielellä. Tukee erityisen hyvin sähkö- ja magnetostatiikkaa ja aaltoliikkeen perusteita.

- Lindell, I., Sähkötekniikan historia, Otatiето, 1994.

Sähkömagnetismin historiaa ammoisista ajoista 1900-luvun alkuun.

- Lindell, I. ja A. Sihvola, Sähkömagneettinen kenttäteoria. 1. Staattiset kentät, Otatiето, 1999. Sihvola, A. ja I. Lindell, Sähkömagneettinen kenttäteoria. 2. Dynaamiset kentät, Otatiето, 2000. Sihvola, A., Sähkömagneettisen kenttäteorian harjoituskirja, Otatiето, 2001.

Elektrodynamiikkaa suunnilleen vastaava kokonaisuus TKK:lla. Hieman erilainen lähestymistapa, mutta tutustumisen arvoinen.