

## Luku 3

# Sähkökenttä väliaineessa

Edellä tarkasteltiin sähköstaattista kenttää tilanteissa, joissa oli annettuja varausjakautumia tai vapaita varauksia johdekappaleiden pinnalla. Läheskään kaikki aineet eivät kuitenkaan ole johteita. Hyvän johteen vastakohta on ideaalinen eriste, jossa ei ole lainkaan vapaita varauksia. Aine on kuitenkin koostunut positiivisista atomiytimistä ja negatiivisista elektroneista. Jos eriste asetetaan sähkökenttään, kenttä aiheuttaa voimavaikutuksen eristeen rakenneosasiin. Vaikutuksen suuruus riippuu aineen mikroskooppisista ominaisuuksista. Eristeeseen syntyvää makroskooppista vaikutusta kuvataan eristeen erimerkkisten varausten siirtymänä toistensa suhteen. Aineen sanotaan tällöin polarisoituneen. Sisäisen polarisoituman ja ulkoisen kentän vuorovaikutusketju on usein hyvin monimutkainen, sillä polarisoituma muuttaa puolestaan ulkoista kenttää. Mikäli eristeen lähellä on johdekappaleita, niiden pinnalle indusoituva varausjakautuma muuttuu, mikä puolestaan muuttaa eristeeseen vaikuttavaa ulkoista kenttää.

### 3.1 Sähköinen polarisoituma

Palautetaan ensin mieleen, että sähköstatiikka hallitaan yhtälöillä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.2)$$

Erityisesti on huomattava, että  $\rho$  sisältää *kaikki* varaukset eikä mitään jakoa ”vapaisiin” ja ”muihin” varauksiin tarvitse tehdä. Periaatteessa polarisoituva aine voidaan siis käsitellä varausjakaumien avulla.

Tarkastellaan polarisoituneen aineen pientä tilavuusalkiota  $\Delta V$ , jonka dipolimomentti on  $\Delta \mathbf{p}$ . **Sähköinen polarisoituma** määritellään dipolimomenttitiheytenä

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (3.3)$$

Tämä määritelmä edellyttää, että  $\Delta V$  on makroskooppisessa mielessä pieni. Varsinaisesta raja-arvosta  $\Delta V \rightarrow 0$  ei ole kysymys, koska tilavuusalkiossa täytyy olla monta molekyyliä, jotta polarisaatio ylipäänsä syntyisi. Makroskooppiselta kannalta polarisoitumaa voi kuitenkin tarkastella jatkuvana paikan funktiona. Polarisoituman SI-yksikkö on C/m<sup>2</sup>, joten  $[\mathbf{P}] = [\epsilon_0][\mathbf{E}]$ . Cgs-yksiköissä tyhjän permittiivisyys on  $1/4\pi$ , joten niissä polarisoitumalla on sama yksikkö kuin sähkökentällä.

### 3.2 Polarisoituman aiheuttama sähkökenttä

Tarkastellaan pisteessä  $\mathbf{r}'$  sijaitsevan pienen eristealkion  $dV'$  dipolimomenttia  $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dV'$ . Oletetaan, että korkeampien multipolien vaikutus voidaan jättää huomiotta. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että havaintopiste  $\mathbf{r}$  on niin etäällä, että tämän alkion aiheuttama sähköinen potentiaali saadaan laskemalla pelkän dipolimomentin potentiaali

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.4)$$

Kokonaispotentiaali pisteessä  $\mathbf{r}$  on tämän integraali

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.5)$$

Mikäli polarisoituma tunnetaan, potentiaali voidaan laskea tästä suoraan. Käytännössä sama asia on hyödyllistä ilmaista hieman eri tavalla. Koska

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.6)$$

voidaan potentiaalin integrandi kirjoittaa

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (3.7)$$

Käyttämällä kaavaa  $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$  saadaan

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad (3.8)$$

Tämän avulla ja soveltamalla divergenssiteoremaa potentiaali voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \oint_{S_0} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

missä  $S_0$  on eristeen pinta.

Potentiaali voidaan siis laskea lausekkeista, jotka muistuttavat edellisessä luvussa olleita avaruus- ja pintavaraustiheyden integraaleja. Tämä on käytännön ongelmissa usein näppärin tapa laskea potentiaali. Suureita

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (3.10)$$

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.11)$$

kutsutaan **polarisaatiovaraustiheyyksiksi**. Niiden laatu on varaus/pinta-ala ( $\sigma_P$ ) ja varaus/tilavuus ( $\rho_P$ ) ja ne aiheuttavat eristeen ulkopuolella todellisen potentiaalin  $\varphi$ , josta saadaan sähkökenttä  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Kyse ei ole kuitenkaan oikeista vapaista varauksista, vaan tavasta kuvata eristeen ominaisuuksia varausjakautuman avulla. Tämän vuoksi polarisaatiovarauksia kutsutaan usein näennäisiksi varauksiksi, mikä ei kuitenkaan tee niille täyttä oikeutta. Eriste on kokonaisuudessaan neutraali, joten kokonaisvaraus

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.12)$$

mikä seuraa suoraan divergenssiteoreemasta.

### 3.3 Sähkövuon tiheys

Edellä oletettiin eristeen polarisoituma  $\mathbf{P}$  tunnetuksi. Todellisuudessa näin ei yleensä ole, vaan polarisoituma syntyy vasteena ulkoiseen sähkökenttään. Tarkastellaan eristettä, jonka sisällä on mahdollisesti ulkoisia ("vapaita") varauksia. Sovelletaan Gaussin lakia eristeen sisällä olevalla pinnalla  $S$ , joka sulkee sisäänsä niin ulkoiset varaukset kuin polarisaatiovarauksenkin:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P) \quad (3.13)$$

missä  $Q = \sum_{i=1, \dots, N} q_i$  on ulkoisten varausten summa ja

$$Q_P = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.14)$$

on polarisaatiovaraus. Tässä on implisiittisesti oletettu, että ulkoiset varaukset ovat pistemäisiä. Jos eristeen sisällä olisi makroskooppisia johdekappaleita, niiden pinnoilta tulisi osuus polarisaatiovaraukseen  $Q_P$ . Nämä pintatermit kuitenkin kumoutuisivat muutettaessa tilavuusintegraalit pintaintegraaleiksi.

Saadaan siis

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.15)$$

eli vektorin

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.16)$$

vuon suljetun pinnan läpi on sama kuin pinnan sulkemaan tilavuuteen sijoitettu nettovaraus. Tätä vektoria kutsutaan **sähkövuon tiheydeksi** (electric displacement). Käyttämällä taas divergenssiteoreemaa ja toteamalla, että  $Q = \int_V \rho dV$ , saadaan Gaussin laki eristeessä differentiaalimuotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.17)$$

missä  $\rho$  on nyt *ulkoisten* varausten tiheys ja kokonaisvaraustiheys on  $\rho + \rho_P$ .

**Huom.** Ulkoisia varauksia kutsutaan usein vapaiksi, mutta tämä saattaa aiheuttaa sekaannusta, sillä eristeessä oleva ulkoinen varaus ei ole vapaa samassa mielessä kuin johteen pinnalla oleva varaus.

Sähköstatiikan peruslait on nyt siis puettu muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.19)$$

Etuna tässä on se, että ulkoinen varaus on helpommin hallittavissa kuin polarisaatiovaraus. Kuitenkin sähkökenttä  $\mathbf{E}$  on suure, joka loppujen lopuksi halutaan määrittää. Siksi on vielä tunnettava **rakenneyhtälö**  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ .

### 3.4 Dielektrisyys ja susceptiivisuus

Sähköinen polarisoituma aiheutuu sähkökentästä. Niiden riippuvuus voidaan usein ilmaista **sähköisen susceptiivisuuden**  $\chi(\mathbf{E})$  avulla:

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad (3.20)$$

$\chi(\mathbf{E})$  määräytyy väliaineen mikroskooppisesta rakenteesta. Yleisesti  $\chi(\mathbf{E})$  on tensori, jolloin polarisoituma ei välttämättä ole samansuuntainen kuin sähkökenttä eli eriste voi olla epäisotrooppista. Tällaisia väliaineita ovat esimerkiksi kiderakenteet, joissa epäisotropia aiheuttaa kahtaistaitavuuden. Tällöin eri tavoin polarisoituneet sähkömagneettiset aallot taittavat eri tavoin. Kahtaistaitavuutta tapahtuu myös vapaista varauksista koostuvassa magnetoituneessa plasmassa. Toinen ongelmakenttä ovat väliaineet, joissa  $\chi(\mathbf{E})$  on sähkökentän funktio, jolloin  $\mathbf{P}$  riippuu sähkökentästä epälineaarisesti. Tämä ilmiö esiintyy yleensä vain hyvin voimakkailla sähkökentillä. Kaikissa aineissa ei edes ole suoraa relaatiota  $\mathbf{P}$ :n ja  $\mathbf{E}$ :n välillä. Ferrosähköisissä aineissa on polarisoitumaa myös ilman ulkoista sähkökenttää.

Tarkastellaan nyt vain isotrooppisia eristeitä, joille  $\chi(\mathbf{E})$  on skalaari ja rajoitutaan lineaarisiin väliaineisiin, joille  $\chi$  on sähkökentästä riippumaton

Taulukko 3.1: Eristeiden ominaisuuksia. Tässä annettu ilman läpilyöntikestävyys  $E_{max}$  koskee kuivaa ilmaa, muissa oloissa arvo on pienempi. Lasin suhteellinen permittiivisyys vaihtelee kemiallisesta koostumuksesta riippuen.

aine	$\epsilon_r$	$E_{max}$ [MV/m]
akryyli	3,3	20
eboniitti	2,7	10
kuiva ilma	1,0006	4,7
lasi	5-10	15
kova paperi	5	15
eristyspaperi	5	30
posliini	5,5	35
tislattu vesi	81	30

suure. Tällöin vallitsevat rakenneyhtälöt

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.22)$$

missä **permittiivisyys**  $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$  voi olla paikan funktio. Laadutonta suuretta

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (3.23)$$

kutsutaan väliaineen eristevakioksi, dielektrisyysvakioksi tai **suhteelliseksi permittiivisydeksi**.

Riittävän suuri kenttä repii elektroneja ulos molekyyleistä, jolloin aine alkaa johtaa sähköä. Tätä rajaa kutsutaan aineen dielektriseksi vahvuudeksi tai **läpilyöntikestävydeksi**. Taulukossa 3.1 on joidenkin aineiden eristevakioita ja dielektrisiä vahvuuksia. Ilma on sähköisesti hyvä eriste. Veden eristevakio on taas suuri, mikä merkitsee vahvaa polarisoitumista ja siten kohtuullisen hyvää sähkönjohtokykyä polarisoitumisvarausten kantamana.

### 3.5 Sähkökenttä rajapinnalla

Eristeet ovat usein paljon hankalampia käsiteltäviä kuin johteet. Hyvän johteen ominaisuus on, että sen sisäinen sähkökenttä on nolla ja kaikki varaus kertyy pinnalle. Eristeet sen sijaan polarisoituvat ja erilaiset eristeet polarisoituvat eri tavoin. Eristeongelmissa joudutaan usein tarkastelemaan kenttien ominaisuuksia eri eristeiden tai eristeiden ja johteiden rajapinnoilla.

Tarkastellaan tilannetta kahden **yksinkertaisen** (lineaarinen, isotrooppinen, homogeeninen = LIH) eristeen rajapinnalla ja oletetaan rajapinta

makroskooppisessa mielessä ohueksi. Tämä tarkastelu voidaan ulottaa myös epähomogeenisiin eristeisiin, jos eriste voidaan kuvata eri eristevakiolla varustettuina kerroksina. Merkitään väliaineita indekseillä 1 ja 2 ja olkoon  $\sigma$  pintavaraustiheys rajapinnalla. Tarkastellaan pientä sylinterinmuotoista pillerirasiaa, jonka kannet ovat eri väliaineissa (kuva 3.1).

Sovelletaan Gaussin lakia

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2 + \oint_{\text{vaippa}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.24)$$

Annetaan pillerirasian korkeuden lähestyä nollaa. Tällöin integraali vaipan yli on nolla ja pillerirasian sisällä oleva varaus on pintavaraus kerrottuna pinta-alalla:  $Q = \sigma \Delta S$ , missä  $\Delta S = \Delta S_1 = \Delta S_2$ . Koska  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ , voidaan kirjoittaa **reunaehto** sähkövuon tiheyden normaalikomponentille:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \quad (3.25)$$

tai

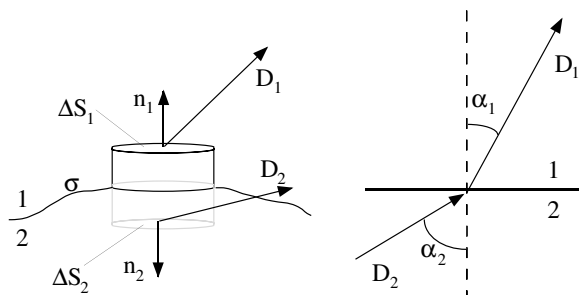
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (3.26)$$

Mikäli kahden eristeen rajapinnalla ei ole ulkoista varausta, sähkövuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi. Koska eristeet polarisoituvat, on tarkasteltava nimenomaan sähkövuon tiheyttä eikä sähkökenttää.

Myös sähköstaattiselle kentälle löytyy reunaehto rajapinnalla. Koska  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , niin viivaintegraali

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.27)$$

pitkin mitä tahansa suljettua silmukkaa. Sovelletaan tätä suorakulmaiseen silmukkaan  $ABCD$  eristeiden rajapinnalla. Olkoot rajapinnan suuntaiset



Kuva 3.1: Pillerirasia kahden väliaineen rajapinnalla ja sähkövuon tiheyden taittumiskulmien määrittelmä.

sivut  $AB$  ja  $CD$  kumpikin eri väliaineessa ja pituudeltaan  $\Delta l$ . Väliaineesta toiseen kulkevat sivut  $BC$  ja  $DA$  oletetaan häviävän lyhyiksi. Tällöin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0 \quad (3.28)$$

joten

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (3.29)$$

eli sähkökentän tangentialikomponentti on jatkuva rajapinnan yli. Tämä tulos on voimassa riippumatta mahdollisesta pintavarauksesta.

Tutkitaan sitten vektorin  $\mathbf{D}$  taittumista rajapinnalla tapauksessa  $\sigma = 0$ . Olkoon  $\alpha_1$  ”rajapinnalle tulevan” vektorin  $\mathbf{D}_1$  ja  $\mathbf{n}_1$ :n välinen kulma ja  $\alpha_2$  ”rajapinnalta lähtevän” vektorin  $\mathbf{D}_2$  ja  $\mathbf{n}_2$ :n välinen kulma. Koska väliaineet on oletettu yksinkertaisiksi, niin

$$D_{1t} = \epsilon_1 E_{1t} ; D_{2t} = \epsilon_2 E_{2t} \quad (3.30)$$

Tällöin

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{D_{2t} D_{1n}}{D_{2n} D_{1t}} = \frac{\epsilon_2 E_{2t}}{\epsilon_1 E_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \quad (3.31)$$

Sähkövuon tiheysvektori taittuu siis pois päin normaalin suunnasta mentäessä huonommasta parempaan eristeeseen. Tämä on sukua aaltojen taittumiselle eri väliaineiden rajapinnalla, johon tutustutaan luvussa 11.

Tarkastellaan sitten potentiaalin reunaehto rajapinnalla. Oletetaan jälleen  $\sigma = 0$ , jolloin  $D_{2n} = D_{1n}$  ja  $\epsilon_{r2}\epsilon_0 E_{2n} = \epsilon_{r1}\epsilon_0 E_{1n}$ . Koska  $E_n = -\partial\varphi/\partial n$ , tulee reunaehdoksi

$$\epsilon_{r2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \epsilon_{r1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \quad (3.32)$$

Tämän lisäksi  $\varphi$  on jatkuva reunan yli. Tämä nähdään tarkastelemalla kahta pistettä  $r_1$  ja  $r_2$  reunan molemmiin puolin. Tällöin

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \rightarrow 0 \quad (3.33)$$

kun  $r_1$  ja  $r_2$  lähestyvät toisiaan eri puolilta rajapintaa sillä fysikaalisella oletuksella, että sähkökenttä on äärellinen rajapinnalla.

### 3.5.1 Eristepallo sähkökentässä

Yksinkertaisessa väliaineessa  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , joten  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ . Ainoa muodollinen ero edellisten lukujen käsittelyyn on korvata  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ . Useissa käytännön ongelmissa eristeessä ei ole ulkoista varausta, joten  $\nabla^2\varphi = 0$  koko eristeessä. Tarkastellaan  $a$ -säteistä eristepalloa homogeenisessa sähkökentässä  $\mathbf{E}_0$ . Ratkaisumenetelmä on samanlainen kuin johdepallon tapauksessa. Valitaan  $z$ -akseli alkuperäisen sähkökentän suuntaiseksi:  $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$ , jolloin

kaukana pallosta  $\varphi = -E_0 r \cos \theta$ . Asetetaan origo pallon keskipisteeseen ja todetaan kiertosymmetria  $z$ -akselin suhteen:  $\varphi = \varphi(r, \theta)$ .  $\epsilon_r$  on vakio eristeessä ja  $\epsilon = \epsilon_0$  muualla. Ilman ulkoisia varauksia  $\rho = 0$  kaikkialla ja Laplacen yhtälö on voimassa eristeessä ja sen ulkopuolella. Kirjoitetaan ratkaisu jälleen vyöhykeharmonisten funktioiden sarjana (2.80):

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta) \quad (3.34)$$

Merkitään termejä pallon ulkopuolella ( $r > a$ ) indeksillä 1 ja sisäpuolella ( $r < a$ ) indeksillä 2. Etäällä pallosta ratkaisu lähenee alkuperäistä potentiaalia  $-E_0 r \cos \theta$ , joten pallon ulkopuolella

$$A_{1n} = 0, \text{ kun } n \geq 2; \quad A_{11} = -E_0$$

jolloin

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) - E_0 r \cos \theta \quad (3.35)$$

Pallon sisällä potentiaalin on oltava äärellinen origossa, joten kaikki kertoimet  $B_{2n}$  ovat nollia ja sisäratkaisu on muotoa

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) \quad (3.36)$$

Käytetään sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Potentiaalin on oltava jatkuva eli  $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$ , joten

$$\begin{aligned} -E_0 a \cos \theta + \frac{B_{10}}{a} + \frac{B_{11}}{a^2} \cos \theta + \frac{B_{12}}{a^3} P_2(\cos \theta) + \dots \\ = A_{20} + A_{21} a \cos \theta + A_{22} a^2 P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Toisaalta potentiaalin derivaatan reunaehdosta

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = \epsilon_r \left. \frac{\partial \varphi_2(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

seuraa

$$\begin{aligned} -E_0 \cos \theta - \frac{B_{10}}{a^2} - \frac{2 B_{11}}{a^3} \cos \theta - \frac{3 B_{12}}{a^4} P_2(\cos \theta) + \dots \\ = \epsilon_r A_{21} \cos \theta + 2 \epsilon_r A_{22} a P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

Koska Legendren polynomit muodostavat ortonormaalin kannan, kunkin  $P_n$ -termin täytyy toteuttaa yhtälöt erikseen. Nyt molemmat yhtälöt (3.37) ja (3.38) toteutuvat vain, jos  $A_{2n} = 0$  ja  $B_{1n} = 0$  kaikilla  $n \geq 2$ . Yhtälön (3.38)



ainoa  $\cos\theta$ :sta riippumaton termi on  $B_{10} = 0$ , joka sijoitettuna yhtälöön (3.37) antaa  $A_{20} = 0$  ja jäljelle jää yhtälöpari

$$-E_0a + \frac{B_{11}}{a^2} = A_{21}a \quad (3.39)$$

$$-E_0 - \frac{2B_{11}}{a^3} = \epsilon_r A_{21} \quad (3.40)$$

joiden ratkaisuna saadaan

$$A_{21} = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}; \quad B_{11} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \quad (3.41)$$

Kaiken kaikkiaan ratkaisu pallon ulkopuolella on

$$\varphi_1(r, \theta) = -\left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 r \cos\theta \quad (3.42)$$

ja pallon sisällä

$$\varphi_2(r, \theta) = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 r \cos\theta = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 z \quad (3.43)$$

Pallon sisällä on siis vakiokenttä  $\mathbf{E}_2 = 3\mathbf{E}_0/(\epsilon_r + 2)$ , mikä on erona johdepalloon, jossa pintavaraukset kumoavat sisäkentän. Koska  $\epsilon_r \geq 1$ , niin kenttä eristeen sisällä on pienempi kuin ulkopuolella. Eristepallon aiheuttama häiriö pallon ulkopuolella on dipolikenttä.

Sähkövuon tiheydellä ei ole lähteitä, vaan kaikki kenttäviivat jatkuvat pallon läpi. Sitä vastoin polarisoitumisesta johtuva pintavarauskate aiheuttaa sen, että sähkökentällä on lähteitä ja nieluja pallon pinnalla ja osalla kenttäviivoista pää on pallon pinnalla. Siksi kenttäviivat eivät myöskään ole kohtisuorassa pallon pintaa vastaan (HT: piirrä kuva). Tämä osoittaa, että polarisaatiovarauksen kutsuminen näennäiseksi on kyseenalaista.

### 3.5.2 Pistevaraus eristepinnan lähellä

Jakakoon  $xy$ -taso avaruuden kahteen homogeeniseen eristealueeseen: ( $z > 0, \epsilon_1$ ) ja ( $z < 0, \epsilon_2$ ). Asetetaan varaus  $q$  pisteeseen  $(0, 0, d)$  alueeseen 1. Oletetaan, ettei rajapinnalla ole ulkoisia varauksia. Tehtävänä on laskea potentiaali koko avaruudessa. Helpoimmalla päästään kuvalähteiden avulla. Maadoitetun johdetason tapauksessa ongelma ratkesi peilikuvavarauksella  $-q$  pisteessä  $(0, 0, -d)$ . Eristeenkin tapauksessa potentiaali alueessa 1 yritetään esittää varauksen  $q$  ja jonkin alueessa 2 sijaitsevan kuvavarauksen  $q'$  avulla. Sivistynyt arvaus on sijoittaa kuvavarauksen  $q'$  pisteeseen  $z = -d$ , jolloin potentiaali alueessa 1 on sylinterikoordinaateissa lausuttuna Poissonin yhtälön toteuttava

$$\varphi_1(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) \quad (3.44)$$

Kiertosymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, mutta tehtävä ratkeaisi sujuvasti myös karteesisessa koordinaatistossa.

Alue 2 on eriste, joten johdetilanteesta poiketen sielläkin on kenttä. Koska alueessa 2 ei ole varauksia, potentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön. Aina-kin laskennallisesti kelvollinen ratkaisu alueessa 2 saadaan *alueessa 1* sijaitsevan kuvavarauksen  $q''$  avulla, joka viisaasti sijoitetaan pisteeseen  $z = d$ . Tällöin potentiaali *alueessa 2* on

$$\varphi_2(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \quad (3.45)$$

Mikäli kuvavarausten suuruudet saadaan sovitettua siten, että reunaehdot toteutuvat, niin ongelma on ratkaistu. Reunaehtojen mukaan sähkövuon tiheyden  $z$ -komponentti on jatkuva rajapinnalla (ei pintavarausta) samoin kuin sähkökentän  $r$ -komponentti. Jälkimmäinen on yhtäpitävää sen kanssa, että potentiaali on jatkuva. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2}q'' \end{aligned} \quad (3.46)$$

Kuvavaraukset ovat siten

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \end{aligned} \quad (3.47)$$

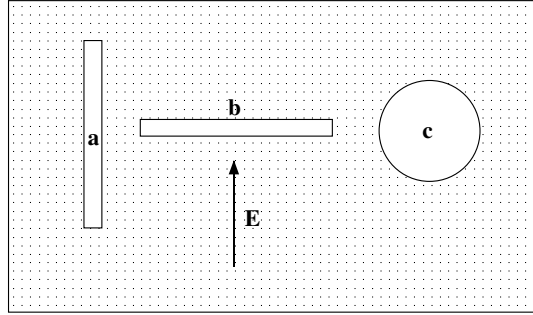
HT: Laske polarisoitumaan liittyvä varaustiheys aineiden rajapinnalla. Jos väliaine 2 on johde, niin ratkaisu saadaan muodollisesti asettamalla  $\epsilon_2$  äärettömäksi, jolloin potentiaali alueessa 2 häviää ja  $q' = -q$ .

Viimeistään reunaehtoja sovellettaessa tuli selväksi, että kuvalähteet kannatti sijoittaa nimenomaan pisteisiin  $z = -d$  ja  $z = d$ . Paikkariippuvuudet supistuvat silloin pois reunaehtoyhtälöistä. Kuvalähteet ovat vain kuvitteellisia apuvälineitä, jotka eivät oikeasti sijaitse missään. Kun ratkaisu on löydetty, kuvalähteet voidaan unohtaa ja todeta saaduista lausekkeista, että kaikki vaadittavat yhtälöt reunaehtoineen toteutuvat.

### 3.6 Molekulaarinen polarisoituvuus

Tarkastellaan yksinkertaista väliainetta, jossa yksittäisen molekyylin dipolimomentti  $\mathbf{p}_m$  on verrannollinen polarisoivaan sähkökenttään  $\mathbf{E}_m$ :

$$\mathbf{p}_m = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}_m \quad (3.48)$$



Kuva 3.2: Sähkökentän määrittäminen erilaisissa onkaloissa.

Suuretta  $\alpha$  kutsutaan polarisoituvuudeksi (yksikkö  $m^3$ ). Oletetaan, ettei molekyylillä ole pysyvää dipolimomenttia. Tavoitteena on lausua molekyylin polarisoituvuus makroskooppisesti mitattavien suureiden avulla. Polarisoiva sähkökenttä on kenttä, jonka aiheuttavat kaikki ulkoiset lähteet ja väliaineen polarisoituneet molekyylit lukuunottamatta tarkasteltavaa molekyyliä itseään. Poistetaan makroskooppisesti pieni, mutta mikroskooppisesti suuri palanen ainetta molekyylin ympäriltä ja lasketaan kenttä jäljelle jäävässä onkalossa. Kenttä molekyylin kohdalla on silloin

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{near} \quad (3.49)$$

Tässä  $\mathbf{E}$  on keskimääräinen kenttä koko kappaleessa,  $\mathbf{E}_p$  onkalon pinnan polarisaatiovarauksen aiheuttama kenttä ja  $\mathbf{E}_{near}$  on onkalossa olevien kaikkien muiden molekyylin aiheuttama kenttä. Aivan tarkasteltavan molekyylin kohdalla on siis otettava huomioon aineen yksityiskohtainen rakenne.

Kenttä  $\mathbf{E}_{near}$  on nolla esimerkiksi säännöllisen kuutiohilan hilapisteissä, jos molekyylin dipolimomenttivektorit ovat identtisiä (HT). Samoin voidaan olettaa  $\mathbf{E}_{near}$  nolaksi nesteissä ja kaasuissa, joissa molekyylit ovat täysin satunnaisesti jakautuneita. Useista molekyylityypeistä koostuvissa aineissa se voi kuitenkin poiketa nolasta. Jatkossa oletetaan, että  $\mathbf{E}_{near} = 0$ .

Kenttä  $\mathbf{E}_p$  riippuu onkalon muodosta (kuva 3.2). Jos se on kapean suorakaiteen muotoinen ja pitkä sivu on kentän  $\mathbf{E}$  suuntainen (a), niin kenttä on onkalossa sama kuin väliaineessa kentän tangentialikomponentin jatkuvuuden perusteella. Jos suorakaidetta käännetään 90 astetta (b), niin onkalossa  $\mathbf{E}_b = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0$  sähkövuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuuden vuoksi (pinnoilla on polarisaatiovarausta, mutta ei vapaata varausta).

Luonnolliselta tuntuva vaihtoehto on olettaa onkalo palloksi (c). Kenttä onkalossa saadaan vähentämällä tasaisesti polarisoituneen pallon kenttä kentästä  $\mathbf{E}$ . Voidaan käyttää hyväksi analogiaa tilanteeseen, jossa tasaisesti polarisoituneen pallon sisällä on vakiokenttä  $-\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$  (HT), ja onkalossa

$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)$ . Tämä on jonkinlainen välimuoto suorakaiteen muotoisten onkaloiden kentistä.

Jos molekyylien lukumäärätiheys on  $n$ , polarisoituma on määritelmän mukaan  $\mathbf{P} = n\mathbf{p}_m$ , joten

$$\mathbf{P} = n\alpha\epsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)) \quad (3.50)$$

Toisaalta  $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$ , joten saadaan Clausiuksen ja Mossottin yhtälö

$$\alpha = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{n(\epsilon_r + 2)} \quad (3.51)$$

jossa  $\epsilon_r$  ja  $n$  ovat makroskooppisia suureita. Voidaan esimerkiksi mitata kaasun  $\epsilon_r$  ja  $n$ , jolloin saadaan  $\alpha$  laskettua. Jos polarisoitumismekanismi on samanlainen myös nesteessä, voidaan tunnettujen tiheyksien avulla ennustaa sen suhteellinen permittiivisyys. Näin saadaan varsin hyviä tuloksia esimerkiksi aineille  $CS_2$ ,  $O_2$  ja  $CCL_4$ . Vedelle tulisi vastaavalla tavalla ennusteeksi negatiivinen permittiivisyys, joten pysyvästi polarisoituneelle aineelle esitetty malli ei päde.

Pysyvän polarisaation  $\mathbf{P}_0$  tapauksessa ulkoisen kentän ollessa nolla  $\mathbf{E}_m = \mathbf{P}_0/(3\epsilon_0)$ , joten on oltava  $n\alpha = 3$ . Useimmilla aineilla  $n\alpha/3 < 1$ , joten ne käyttäytyvät kuten tavalliset eristeet. Jotkin kristallirakenteiset kiinteät aineet kuitenkin toteuttavat ehdon ja niitä kutsutaan ferroelektriksi materiaaleiksi. Esimerkiksi  $BaTiO_3$  on ferroelektristä alle  $120^\circ$  C:n lämpötilassa (Feynman Lectures, osa II, luku 11-7).

Pysyvästi polarisoitunut kappale (elektretti) on kestopolarmagneetin sähköinen vastine. Se eroaa kuitenkin magneetista ratkaisevasti, koska elektretin pinnalle "sataa" vähitellen väliaineesta varauksia, jotka neutralisoivat polarisaatiopintavarauksen. Ferroelektrisyydelle ominainen pysyvä polarisoituvuus aiheuttaa **hystereesi-ilmiön**. Kun aine on kerran polarisoitu tasolle  $P$ , niin polarisaatio ei katoa viettäessä sähkökenttä nolnaan, vaan vasta selvästi nollan alapuolella. Kasvatettaessa negatiivista sähkökenttää polarisaatio saavuttaa uudelleen uuden tason  $-P$ , josta ei puolestaan päästä eroon kasvattamalla sähkökenttä nolnaan, vaan kenttää on kasvatettava riittävän paljon nollan yläpuolelle. Polarisaation ja sähkökentän välinen yhteys ei ole yksikäsitteinen. Vastaavaan ilmiöön tutustutaan myöhemmin ferromagnetismin yhteydessä.