Luku 4

Sähköstaattinen energia

Voiman, työn ja energian käsitteet ovat keskeisiä fysiikassa. Sähkö- ja magneettikenttiä mitataan voimavaikutuksen kautta. Kun voima vaikuttaa varaukselliseen hiukkaseen, se tekee työtä ja hiukkasen energia muuttuu. Kuten mekaniikassa, myös elektrodynamiikassa energia voidaan jakaa liike- ja potentiaalienergiaan. Sähköstaattinen energia on potentiaalienergiaa. Kun varaus q siirtyy pisteestä A pisteeseen B sähköstaattisessa kentässä, kenttä tekee työn

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A) \tag{4.1}$$

Työn ja energian SI-yksikkö on joule (J), joka on sama kuin wattisekunti (Ws). Työ on myös varaus kertaa sähköinen potentiaali, jonka yksikkö on CV tai elektronivoltti (eV). Koska elektronin varaus on $1,6022 \cdot 10^{-19}$ C, on 1 eV $= 1,6022 \cdot 10^{-19}$ J.

4.1 Varausjoukon potentiaalienergia

Varausjoukon sähköstaattisella energialla tarkoitetaan systeemin potentiaalienergiaa verrattuna tilanteeseen, jossa kaikki varaukset ovat äärettömän kaukana toisistaan. Energia saadaan laskemalla yhteen työ, kun kukin varaus tuodaan yksitellen paikalleen varausjoukkoon. Koska alunperin tarkasteltavassa systeemissä ei ole varauksia, ensimmäinen varaus q_1 saadaan pisteeseen $\mathbf{r}_1$ ilman työtä, $W_1 = 0$. Toisen varauksen q_2 tuominen merkitsee työntekoa voimaa $\mathbf{F} = q_1\mathbf{r}_1/4\pi\epsilon_0|r_1|^3$ vastaan, joten varauksen sijoittamiseksi pisteeseen $\mathbf{r}_2$ on tehtävä työtä

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} \tag{4.2}$$

Kolmannelle varaukselle

$$W_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right)$$

ja niin edelleen kaikille N kappaleelle varauksia. Koko systeemin sähköstaattinen energia U on

$$U = \sum_{j=1}^{N} W_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \tag{4.3}$$

Summaus voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left({\sum_{k=1}^{N}}' \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \tag{4.4}$$

missä $\sum'$ merkitsee, että termit $j = k$ jätetään pois. Energia voidaan siis ilmaista varaukseen j vaikuttavien kaikkien muiden varausten potentiaalin

$$\varphi_j = {\sum_{k=1}^{N}}' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \tag{4.5}$$

avulla:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} q_j \varphi_j \tag{4.6}$$

4.2 Varausjakautuman sähköstaattinen energia

Tarkastellaan seuraavassa jatkuvia varausjakautumia. Osa varauksista voi olla johteiden pinnalla ja lisäksi systeemissä saa olla eristeitä, mutta ne on oletettava lineaarisiksi. Syy tähän on, että epälineaarisilla eristeillä varaussysteemin kokoaminen riippuu tiestä, jota pitkin varaukset tuodaan äärettömyydestä tarkastelualueeseen.

Suoraviivaisimmin energian lausekkeen saa yleistämällä diskreettien varausjakautumien tulokset jatkuville jakautumille eli muuttamalla summa integraaliksi:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dV \tag{4.7}$$

Tässä ei ole kirjoitettu erikseen näkyviin mahdollisia pintavarauksia tai diskreettejä pistevarauksia. Johdekappaleet on käytännöllistä käsitellä erikseen, sillä niiden varaukset Q_j ovat kokonaan pinnoilla S_j ja kunkin johteen potentiaali φ_j on vakio:

$$U = \frac{1}{2} \int_{S_j} \sigma\varphi \, dS = \frac{1}{2} Q_j \varphi_j \tag{4.8}$$

Varausjakautuman sähköstaattinen energia on kaiken kaikkiaan

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j \tag{4.9}$$

missä jälkimmäisessä termissä summataan yli kaikkien johdekappaleiden.

Koska johdekappaleen pinnalla on suuri määrä varauksia, ei johdekappaleita summattaessa kappaleen omaa osuutta (itseisenergiaa) voida jättää huomiotta, kuten tehtiin yksittäisten varausten tapauksessa edellisessä luvussa. Pistevarausten itseisenergia voidaan jättää huomiotta makroskooppisissa tarkasteluissa, mutta aikoinaan muotoiltaessa kvanttitason elektrodynamiikkaa tästä aiheutui ongelmia.

4.3 Sähköstaattisen kentän energia

Edelläoleva tarkastelu edellyttää potentiaalin tuntemista koko systeemissä. Usein tunnetaan kuitenkin sähkökenttä ja halutaan määrittää sen avulla sähköstaattinen energia. Eristeissä $\rho = \nabla\cdot\mathbf{D}$ ja johteiden pinnalla $\sigma = \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}$, jolloin

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varphi\nabla\cdot\mathbf{D}\, dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{4.10}$$

Tilavuusintegraali lasketaan alueessa, jossa $\nabla\cdot\mathbf{D} \neq 0$ ja pintaintegraali on johteiden pintojen yli. Muotoillaan tilavuusintegraalin integrandia kirjoittamalla $\varphi\nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\varphi\mathbf{D}) - \mathbf{D}\cdot\nabla\varphi$. Tässä oikean puolen jälkimmäinen termi on $+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$ ja ensimmäisen termin tilavuusintegraali voidaan muuttaa Gaussin lauseen avulla pintaintegraaliksi, jolloin saadaan

$$U = \frac{1}{2}\int_{S+S'} \varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{4.11}$$

Tässä pinta $S + S'$ on koko tilavuutta V rajoittava pinta, joka muodostuu johteiden pinnoista S ja tilavuuden V ulkopinnasta S'. Molemmissa tapauksissa $\mathbf{n}'$ osoittaa ulospäin tilavuudesta V. Viimeisen integraalin $\mathbf{n}$ puolestaan osoittaa johdekappaleista ulospäin eli tilavuuden V sisään. Integraalit johdekappaleiden yli kumoavat siis toisensa.

Pinnan S' yli laskettava integraali häviää, kun pinta viedään kauas varausjakautumasta. Kaukana $\varphi \propto 1/r$ ja $D(\mathbf{r}) \propto 1/r^2$ ja pinta-alkiolle puolestaan pätee $dS \propto r^2$. Tällöin $|\varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}' dS| \propto 1/r$ eli integraali katoaa. (**Huom.** Tämä pätee vain staattisille kentille. Myöhemmin tutustutaan säteilykenttiin, jotka kuljettavat energiaa mukanaan äärettömyyksiin.)

Energian lauseke on siis

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dV \tag{4.12}$$

Tässä V on koko avaruus sisältäen myös johdekappaleet, joiden sisällä $\mathbf{E} = 0$. Lausekkeen integrandi on **sähköstaattinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \tag{4.13}$$

Koska on oletettu lineaarinen väliaine, tämä voidaan kirjoittaa myös

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon} \tag{4.14}$$

Huom. Sovellettaessa tätä formalismia systeemiin, jossa on pistevarauksia, niiden ääretön itseisenergia on vähennettävä eksplisiittisesti.

HT: Laske homogeenisen varauspallon sähköstaattinen energia kolmella eri tavalla: kokoamistyöllä, energiatiheyttä integroimalla, potentiaalin ja varaustiheyden tuloa integroimalla.

HT (vaikea): Kuuluuko sähköstaattinen energia hiukkasille vai kentälle?

Toinen tapa johtaa tulos (4.13) on esitetty yksityiskohdittain CL:n luvussa 5.2. Lähdetään liikkeelle varausjakautumasta $\rho(\mathbf{r})$ ja tehdään siihen pieni häiriö $\delta\rho$. Häiriöön liittyy työ

$$\delta U = \int_V \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, dV \tag{4.15}$$

ja siirtymäkenttä $\delta\mathbf{D}$, jolle $\nabla \cdot (\delta\mathbf{D}) = \delta\rho$, joten osittaisintegroimalla lauseketta (4.15) saadaan

$$\delta U = \int_V (\nabla \cdot \delta\mathbf{D})\varphi\, dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}\, dV \tag{4.16}$$

Nyt voidaan kirjoittaa muodollisesti

$$U = \int_V dV \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} \tag{4.17}$$

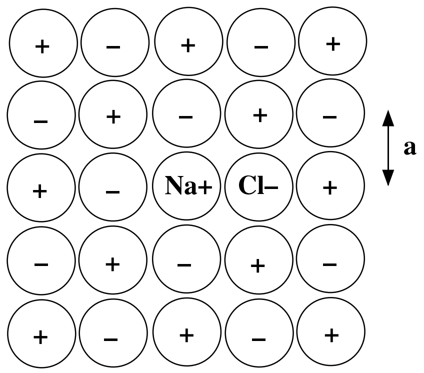
missä integrointi $\mathbf{D}$:n suhteen riippuu integroimistiestä. Yksinkertaiselle väliaineelle

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\, \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \tag{4.18}$$

joten

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dV \tag{4.19}$$

Tässä on oletettu, että tarkasteltava systeemi on mekaanisesti jäykkä, joten yksinkertaisellekin väliaineelle energiatiheyden lauseke (4.13) on vain approksimaatio. Epälineaarisille väliaineille energia on laskettava suoraan lausekkeesta (4.17). Tämä liittyy jälleen hystereesi-ilmiöön.



Kuva 4.1: $NaCl$-kiteen poikkileikkaus.

Esimerkki. Ionikiteen sähköstaattinen energia

Tarkastellaan tavallista ruokasuolaa ($NaCl$, kuva 4.1). Kokeellisesti tiedetään, että suolan hajottaminen Na^+ ja Cl^--ioneiksi vaatii energiaa 7,92 eV molekyyliä kohti. Lasketaan, onko tämä sama kuin yhden molekyylin sähköstaattinen potentiaalienergia kaikkien muiden kiteen ionien kentässä.

Yhden Na^+-ionin potentiaalienergia on

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{4.20}$$

missä q_i on $\pm e$ (e = alkeisvaraus) ja r_i on kunkin ionin etäisyys origoon sijoitetusta Na^+-ionista. N voidaan turvallisesti olettaa äärettömäksi makroskooppisille kiteille. Koska halutaan yhden molekyylin potentiaalienergia U, on laskettava summa $U = 2U_1$:

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{4.21}$$

Röntgendiffraktiokokeista tiedetään, että ionit ovat kuutiohilassa, jossa kuution sivun pituus a on noin $2,82 \cdot 10^{-10}$ m. Koska $e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx 5,1$ eV, niin suuruusluokan puolesta ollaan oikeilla jäljillä. Energian lauseke voidaan kirjoittaa summana

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{4.22}$$

missä ei pidä ottaa mukaan termiä $m = n = p = 0$. Numeerisesti saadaan $U \approx -1,747e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx -8,91 eV$. Tämä on hieman liian suuri arvo, koska edellä ei otettu huomioon hyvin lähellä toisiaan olevien ionien välillä vallitsevaa poistovoimaa. Sen vaikutus pienentää molekyylin hajottamiseen tarvittavaa energiaa. Lisäksi pieni korjaus tulisi ottamalla huomioon kidevärähtelyistä johtuva liike-energia.

Esimerkki. Eristekappaleen energia

Oletetaa että muuten tyhjässä avaruudessa on varausjakauman $\rho_0(\mathbf{r})$ aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}_0$. Tuodaan avaruuteen yksinkertaisesta aineesta muodostuva eristekappale V_1 (permittiivisyys ϵ_1) siten, että alkuperäisen kentän $\mathbf{E}_0$ aiheuttava varausjakauma ei muutu. Ennen eristekappaleen tuontia sähköstaattinen energia on

$$U_0 = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 \, dV \tag{4.23}$$

missä $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Kappaleen tuonnin jälkeen energia on

$$U_1 = \frac{1}{2}\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV \tag{4.24}$$

Energioiden erotus $U = U_1 - U_0$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$U = \frac{1}{2}\int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) \, dV + \frac{1}{2}\int (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) \, dV \tag{4.25}$$

Jälkimmäisessä integraalissa voidaan kirjoittaa $\mathbf{E} + \mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi$. Integrandiksi tulee osittaisintegroinnin jälkeen lauseke $\varphi\nabla\cdot(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)$. Tämä on nolla, koska alkuperäinen varausjakauma ρ_0 oletetaan muuttumattomaksi. Energian muutos on siis

$$U = \frac{1}{2}\int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) \, dV \tag{4.26}$$

Huomataan vielä, että integroimisalue on ainoastaan V_1, sillä sen ulkopuolella $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Integrandiksi tulee siis $-\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$ polarisoituman määritelmän perusteella. Ulkoiseen kenttään $\mathbf{E}_0$ tuodun eristekappaleen energiatiheys on siten $u = -\frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$. Tuloksen avulla voidaan päätellä, mihin suuntaan kappale pyrkii liikkumaan (HT).

4.4 Sähkökentän voimavaikutukset

Sähkökenttä määriteltiin alunperin operatiivisesti voimavaikutuksen kautta. Johdetaan nyt sähköstaattisesta energiasta voimavaikutus. Oletetaan eristetyn systeemin kaikki energia sähköstaattiseksi energiaksi. Voiman $\mathbf{F}$ tekemä työ systeemin pienessä siirroksessa $d\mathbf{r}$ on

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4.27}$$

Koska systeemi on eristetty, tämä työ on tehtävä sähköstaattisen energian U kustannuksella:

$$dW = -dU \tag{4.28}$$

Näistä seuraa, että voima on energian gradientin vastaluku:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \tag{4.29}$$

Jos voima puolestaan kiertää systeemiä kulman $d\boldsymbol{\theta}$ verran (vrt. väkipyörä), tehty työ on

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \tag{4.30}$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on vääntömomentti, joka saadaan siis energian negatiivisena gradienttina kiertymäkulman suhteen:

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big|_Q \tag{4.31}$$

Koska systeemi on eristetty, gradientit lasketaan olettaen varaus Q vakioksi.

Käytännössä sähköstaattiset systeemit eivät useinkaan ole eristettyjä, vaan muodostuvat esimerkiksi johdekappaleista, jotka pidetään kiinteässä potentiaalissa ulkoisen energialähteen (pariston) avulla. Siirtyköön osa systeemistä jälleen sähköisten voimien vaikutuksesta. Nyt

$$dW = dW_b - dU \tag{4.32}$$

missä dW_b on paristosta peräisin oleva työ. Johdekappaleiden energia on $U = (1/2)\sum \varphi_j Q_j$. Koska ulkoinen paristo pitää johdekappaleet samassa potentiaalissa, saadaan

$$dU = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j dQ_j \tag{4.33}$$

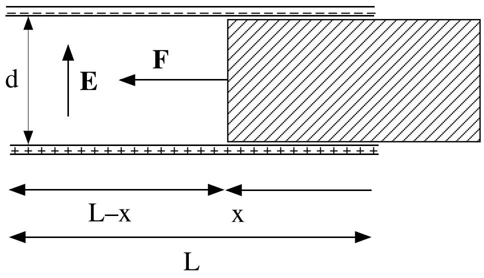
Toisaalta paristosta saatava työ on yhtä suuri kuin työ, joka tarvitaan siirtämään varauksen muutos dQ_j nollapotentiaalista johdekappaleen potentiaaliin:

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j = 2dU \tag{4.34}$$

eli voima on

$$\mathbf{F} = (\nabla U)_\varphi \tag{4.35}$$

Alaindeksi φ viittaa siihen, että ulkoinen energialähde pitää johdekappaleiden potentiaalit vakioina siirroksen $d\mathbf{r}$ ajan.



Kuva 4.2: Eristepalkki levykondensaattorin sisällä.

Esimerkki. Levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin vaikuttava voima

Olkoon kondensaattorin levyjen sisällä koko kondensaattorin täyttävä eristepalkki, jonka permittiivisyys on ϵ (kuva 4.2). Kondensaattorin levyjen etäisyys on d, niiden pituus L ja leveys w. Ulkoinen virtalähde pitää kondensaattorin jännitteen vakiona $\triangle\varphi$. Lasketaan, kuinka suuri voima vetää palkkia kondensaattoriin.

Kondensaattorissa on sekä ilmassa että eristeessä sama sähkökenttä $E = \triangle\varphi/d$, joten sen energiasisältö on

$$U = \frac{1}{2}\int_V \epsilon E^2 \, dV \tag{4.36}$$

jättämällä kondensaattorin reunavaikutukset huomiotta. Systeemin energia kuvan tilanteessa on

$$U(x) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\triangle\varphi}{d}\right)^2 wxd + \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\triangle\varphi}{d}\right)^2 w(L-x)d \tag{4.37}$$

Voima

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2}\, w\, \frac{(\triangle\varphi)^2}{d} = \frac{\epsilon_r - 1}{2}\,\epsilon_0 E^2 wd \tag{4.38}$$

osoittaa kasvavan x:n suuntaan vastustaen ulosvetämistä. HT: miten tämän voi selittää eristepalkkiin indusoituvien varausten avulla?

4.5 Maxwellin jännitystensori sähköstatiikassa

Tutustutaan lopuksi tyylikkääseen tapaan laskea voimavaikutukset jännitystensorin avulla. Oletetaan, että muuten tyhjässä avaruudessa on staattinen sähkökenttä $\mathbf{E}$ ja äärellisessä alueessa V varausjakautuma ρ. Alueeseen V vaikuttava kokonaisvoima on Coulombin lain mukaan

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV \tag{4.39}$$

missä $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}$ on voimatiheys eli voima tilavuusalkiota kohti. Jälleen kerran pyritään muuttamaan tilavuusintegraali pintaintegraaliksi.

Todetaan ensin, että

$$f_x = \epsilon_0 (\frac{1}{2} \partial_x (E_x^2) + \partial_y (E_y E_x) + \partial_z (E_z E_x) - E_y \partial_y E_x - E_z \partial_z E_x) \tag{4.40}$$

Koska sähköstaattinen kenttä on pyörteetön eli $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, niin

$$\partial_x E_y = \partial_y E_x, \partial_y E_z = \partial_z E_y, \partial_z E_x = \partial_x E_z \tag{4.41}$$

Saadaan

$$f_x = \epsilon_0 (\partial_x (E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2) + \partial_y (E_y E_x) + \partial_z (E_z E_x)) \tag{4.42}$$

ja vastaava tulos muille komponenteille (HT).

Vektorilaskennasta tunnetaan divergenssiteoreeman sukuinen tulos

$$\int_V \nabla \psi \; dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \; \psi \; dS \tag{4.43}$$

Tämän avulla saadaan kokonaisvoiman x-komponentiksi

$$F_x = \int_V f_x(\mathbf{r}) dV = \epsilon_0 \int_S (n_x (E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2) + n_y E_y E_x + n_z E_z E_x) \; dS \tag{4.44}$$

ja koko vektoriksi

$$\mathbf{F} = \int_S (\epsilon_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{n} \mathbf{E}^2) \; dS \tag{4.45}$$

Alueeseen V vaikuttava kokonaisvoima $\mathbf{F}$ voidaan siis korvata vain alueen pintaan S kohdistuvalla pintavoimalla $\mathbf{F}^S$, jonka pintatiheyden $\mathbf{f}^S$ komponentti i on

$$f_i^S = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} n_j \tag{4.46}$$

missä on määritelty **Maxwellin jännitystensori**

$$T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2) \tag{4.47}$$

Voimatiheys voidaan esittää tensorin divergenssinä:

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j T_{ij} \tag{4.48}$$

Voimien $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{F}^S$ ekvivalenssin toteamiseksi on vielä osoitettava niiden momenttien yhtäsuuruus mielivaltaisen pisteen suhteen. On siis näytettävä, että $\mathbf{N} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} \; dV$ on sama kuin $\mathbf{N}^S = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{f}^S \; dS$. Laskennallisesti suoraviivainen todistus perustuu jännitystensorin ja permutaatiosymbolin käyttöön (HT). Jännitystensoriin palataan magnetostatiikassa analogisella tavalla ja se tulee vastaan myös liikemäärän säilymislain yhteydessä.

Esimerkki. Johdepalloon vaikuttava sähköstaattinen voima

Asetetaan ohut johtava pallonkuori (säde a) homogeeniseen sähkökenttään $\mathbf{E}_0$. Sähkökenttä määritettiin jo luvussa 2. Pallon pinnalla sähkökentällä on vain radiaalinen komponentti $E_r(r = a) = 3E_0 \cos\theta$. Harjoitustehtävänä on osoittaa jännitystensorin avulla tai muulla tavalla päättelemällä, että staattisessa sähkökentässä olevaan johdekappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\int_S \sigma_s \mathbf{E} dS \tag{4.49}$$

missä σ_s on varaustiheys johteen pinnalla S. Symmetrian perusteella pallon ylempään puoliskoon ($0 < \theta < \pi/2$) vaikuttava voima on z-akselin suuntainen ($F_+\mathbf{e}_z$) ja alempaan puoliskoon ($\pi/2 < \theta < \pi$) vaikuttava voima on $\mathbf{F}_- = -\mathbf{F}_+$. Koska pallon pinnalla $\sigma_s = \epsilon_0 E_r(a)$, niin

$$\begin{aligned} F_+ &= \int \mathbf{e}_z \cdot \frac{1}{2}\epsilon_0 E_r^2(a)\mathbf{e}_r dS = \\ \frac{9\epsilon_0 E_0^2 a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos^3\theta &= \frac{9\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2}{4} \end{aligned} \tag{4.50}$$