

## Luku 10

# Sähkömagneettiset aallot

Sähkömagneettisten aaltojen spektri on erittäin laaja. Esimerkkejä löytyy hyvin matalista taajuuksista aina gammasäteisiin, joiden taajuudet ovat suuruusluokkaa  $10^{20} - 10^{22}$  Hz. Aaltoliikkeen merkityksen ymmärtäne vilkaisemalla ympärilleen (HT). Vaikka nyt ollaankin klassisen fysiikan kursilla, viimeistään tässä vaiheessa on erittäin tärkeää kerrata omatoimisesti aaltohiukkasdualismi.

HT: Onko mielekästä kysyä, onko valo aaltoliikettä vai hiukkasia?

### 10.1 Tasoallot eristeessä

Eristeellä tarkoitetaan tässä yhteydessä niin huonosti johtavaa väliainetta, ettei sähkönjohtavuutta  $\sigma$  tarvitse huomioida ( $\omega\epsilon \gg \sigma$ ). Tutkitaan aaltoyhtälön ratkaisua monokromaattiselle aallolle, jolla on nimensä mukaisesti vain yksi taajuus. Tämä tarkoittaa olennaisesti samaa kuin tarkastella aallon Fourier-komponentteja erikseen. Tällöin on hyödyllistä käyttää kompleksilukuesitystä ja kirjoittaa aikariippuvuus muodossa  $e^{-i\omega t}$ , esimerkiksi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (10.1)$$

Etuna on aikaderivaatan korvautuminen tekijällä  $-i\omega$ . Kirjallisuudessa on yleisesti käytössä myös aikariippuvuus  $e^{+i\omega t}$ . Esitykseen liittyy sopimus, että fysikaalinen suure on kompleksisuureen reaaliosa (voitaisiin myös käyttää imaginaariosaa).

Aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.2)$$

monokromaattiselle aallolle on

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.3)$$

Tämä Helmholtzin yhtälö kuvaa aallon muutosta paikan funktiona. Oletetaan, että kenttä on riippumaton  $x$ - ja  $y$ -koordinaateista. Tällöin

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(z) = 0 \quad (10.4)$$

Tämä on harmonisen värähtelijän yhtälö, jolla on ratkaisuna

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm ikz} \quad (10.5)$$

missä  $\mathbf{E}_0$  on vakio ja  $k = \omega/c$  on **aaltoluku**. Aaltoyhtälöllä on siis ratkaisuna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp kz)} \quad (10.6)$$

jonka reaaliosa on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \mp kz) = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t \mp z/c) \quad (10.7)$$

Kyseessä on joko  $+z$ - tai  $-z$ -akselin suuntaan nopeudella  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  etenevä siniaalto. Aaltoluku esitetään yleisemmin vektorina  $\mathbf{k}$ , jolloin aallon paikkariippuvuus on  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ . Aaltoyhtälön ratkaisu ei välttämättä toteuta Maxwellin yhtälöitä, vaan niistä seuraa lisäehtoja, joihin palataan kohta.

**Kulmataajuuden**  $\omega$  yksikkö on radiaania sekunnissa. Vastaava **värähtelytaajuus** on  $f = \omega/2\pi$ , jonka yksikkö on puolestaan hertsi (Hz). Aaltoluvun yksikkö on  $\text{m}^{-1}$  ja vastaava **aallonpituus** on  $\lambda = 2\pi/k$ . Aallon **vaihenopeus** on  $v_p = \omega/k$ , joka tyhjiössä on sama kuin valon nopeus.

Mikäli väliaineen  $\mu$  ja  $\epsilon$  poikkeavat tyhjän suureista, vaihenopeus on

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} \quad (10.8)$$

Tällöin taajuuden ja aaltoluvun välinen relaatio eli **dispersioyhtälö** on

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{n}{c}\omega \quad (10.9)$$

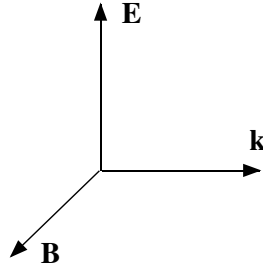
missä on määritelty väliaineen **taitekerroin**

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad (10.10)$$

Taitekerroin on tärkeä parametri tarkasteltaessa aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnoilla.

Muotoa  $e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$  olevia Maxwellin yhtälön ratkaisuja kutsutaan **tasoaalloiksi**. Mikäli yhtälöillä voidaan olettaa olevan tasoaaltoratkaisuja, voidaan myös paikkaderivaatat korvata seuraavasti:

$$\begin{aligned} \nabla &\rightarrow i\mathbf{k} \\ \nabla \cdot &\rightarrow i\mathbf{k} \cdot \\ \nabla \times &\rightarrow i\mathbf{k} \times \end{aligned}$$



Kuva 10.1: Sähkömagneettisen tasoaallon sähkökenttä  $\mathbf{E}$  ja magneettikenttä  $\mathbf{B}$  ovat toisiaan ja etenemissuunnan ilmaisevaa aaltolukuvektoria  $\mathbf{k}$  vastaan kohtisuorassa ja muodostavat oikeakätisen kolmikon  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ .

Tasoaallolle löytyy suunta, jota vastaan kohtisuoralla, mutta muuten mielivaltaisella tasolla aallon vaihe on annetulla hetkellä sama kaikissa tason pisteissä. Kyseisillä tasoilla sähkö- ja magneettikentät ovat vakioita. Vaihenopeus tarkoittaa puolestaan vakiovaiheen ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{vakio}$ ) etenemisnopeutta.

Oletetaan, ettei väliaineessa ole vapaita varauksia eikä virtoja. Tasoaalloille saadaan Maxwellin yhtälöistä yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Tasoaallon kenttävektoreita merkitään joskus lisäämällä niiden päälle hatu ( $\hat{\mathbf{E}}$ ), mutta tässä ei ole sekaannuksen vaaraa muistaen, että nyt aika- ja paikkariippuvuudet ovat eksponenttifunktiossa. Jos on tarpeen erotella tasoaallon vektori vektorista  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , kirjoitetaan edellinen mieluummin  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  tai  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$ . Myös  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  on yleisesti kompleksivektori.

Oletetaan väliaine lineaariseksi ja kirjoitetaan  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ . Käytännössä kaikilla lineaarisilla väliaineilla  $\mu = \mu_0$  on hyvä approksimaatio. Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (10.12)$$

Vektorit  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja aaltoa kutsutaan **poikittaiseksi** (transversaaliseksi) (kuva 10.1).

Sähkö- ja magneettikentän välinen suhde seuraa Faradayn lakia vastaavasta yhtälöstä:  $B = (k/\omega)E$ . Aaltoluvun itseisarvo saadaan laskemalla

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (10.13)$$

Toisaalta  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E}$ , joten

$$-\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \quad (10.14)$$

eli dispersioyhtälö saa muodon

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c} = n \frac{\omega}{c} \quad (10.15)$$

Oikea aalto ei välttämättä ole monokromaattinen. Jos aalto koostuu joukosta diskreettejä taajuuksia  $\omega_m$ , Maxwellin yhtälöiden lineaarisuuden vuoksi kokonaissähkökenttä voidaan esittää summana (kertaa FYMM I:stä)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{E}(\mathbf{k}_m, \omega_m) \exp[-i(\omega_m t - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r})] \quad (10.16)$$

Vektoreita  $\mathbf{E}(\mathbf{k}_m, \omega_m)$  kutsutaan aallon Fourier-komponenteiksi. Jos  $\mathbf{k}$  ja  $\omega$  käsitellään jatkuvina, funktio  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  on  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ :n Fourier-muunnos.

## 10.2 Aaltojen polarisaatio

Peruskurssilta tuttu lineaarinen polarisaatio on helppo käsittää, mutta ympyräpolarisaatio kannattaa miettiä huolellisesti läpi. Asiaa ei lainkaan helppota, että vasen- ja oikeakätisyys määritellään eri lähteissä eri tavoin.

Vektorit  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  ja  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$  ovat kompleksivektoreita. Kirjoitetaan  $\mathbf{E}$  oikeakätisessä reaalisessa kannassa, jonka yksikkövektorit ovat  $(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u})$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u} \quad (10.17)$$

missä hattu viittaa kompleksilukuun. Valitaan  $\mathbf{u}$  tasoallon etenemissuunnaksi, jolloin sähkökenttä on joka hetki  $ps$ -tasossa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \quad (10.18)$$

Ilmaistaan vielä komponentit kompleksitason vaihekulman  $\phi$  avulla:

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p} ; \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (10.19)$$

missä  $E_p$  ja  $E_s$  ovat reaalilukuja. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan asettaa  $\phi_s$  nolaksi, ja merkitä  $\phi_p = \phi$ . Niinpä  $(\mathbf{k}, \omega)$ -avaruuden sähkökenttä on

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s} \quad (10.20)$$

ja sitä vastaava  $(\mathbf{r}, t)$ -avaruuden kenttä puolestaan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (10.21)$$

Fysikaalinen sähkökenttä on tämän reaaliosa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (10.22)$$

Kentällä on kaksi komponenttia, joiden reaaliset amplitudit  $E_p$  ja  $E_s$  voivat olla eri suuria. Lisäksi komponentit voivat värähdellä eri vaiheessa vaiheeron ollessa  $\phi$ . Tarkastellaan muutamaa erikoistapausta pisteessä  $\mathbf{r} = 0$ . HT: Piirrä kuva kaikista tapauksista.

**1. Komponentit samassa vaiheessa** ( $\phi = 0$ ). Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t \quad (10.23)$$

Sähkökenttä värähtelee  $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ :sta  $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ :een osoittaen koko ajan suuntaan  $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$ . Tämä on **lineaarinen polarisaatio**. Myös 180 asteen vaihe-ero antaa lineaarisen polarisaation ( $E_p \rightarrow -E_p$ ).

**2. Vaihe-ero**  $\phi = \pm\pi/2$ . Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = \pm E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \quad (10.24)$$

Sähkökenttävektori pyörii  $ps$ -tasossa piirtäen ellipsin joko myötä- tai vastapäivään riippuen katselusuunnasta. Tämä on **elliptinen polarisaatio**.

**3. Vaihe-ero**  $\phi = \pm\pi/2$  ja  $E_p = E_s$ . Tällöin ellipsi palautuu ympyräksi ja kyseessä **ympyräpolarisaatio**.

Jos vaihe-ero on jotain muuta kuin  $\phi = \pm\pi/2$ , kyseessä on aina elliptinen polarisaatio (mahdollisesti surkastunut lineaariseksi).

Tarkastellaan sähkökentän pyörimissuuntaa ympyräpolarisaatiossa. Jos yllä  $\phi = +\pi/2$ , pyörii aallon sähkökenttä myötäpäivään, kun katsotaan kohti saapuvaa aaltoa. Optiikassa tätä kutsutaan **oikeakätisesti polarisoituneeksi** aalloksi. Jos pyörimistä tarkastellaan aallon etenemissuuntaan, se kuitenkin näyttää toteuttavan vasemman käden kiertosäännön. Tarkasteltaessa sähkömagneettisten aaltojen ominaisuuksia magnetoituneessa johdattavassa väliaineessa (kuten plasmassa) tällaista aaltoa kutsutaankin **vasenkätisesti polarisoituneeksi**. Tämä valinta on sikäli johdonmukainen, että näin polarisoitunut aalto muodostaa avaruudessa vasenkätisen ruuvin. Aallolla sanotaan olevan negatiivinen helisiteetti ja voidaan puhua negatiivisesti polarisoituneesta aallosta. Vastaavasti  $\phi = -\pi/2$  antaa päinvastaiset nimitykset. Tällä kurssilla ei tarvitse murehtia oikea- tai vasenkätisyyksien sekamelskasta, mutta asia on hyvä tietää vastaisen varalta.

Mielivaltainen elliptinen polarisaatio voidaan hajottaa eri vaiheissa värähtelevien oikea- ja vasenkätisesti polarisoituneiden aaltojen summaksi. Esimerkiksi lineaarinen polarisaatio on summa kahdesta eri suuntiin pyörivästä samanamplitudisesta komponentista.

### 10.3 Sähkömagneettisen aallon energia

Kompleksisen kentän reaali-osa on fysikaalinen mitattava kenttä. Koska Maxwellin yhtälöt ovat lineaariset kenttien suhteen ja toteutuvat siten erikseen reaali- ja imaginaariosille, tästä ei tullut edellä ongelmia. Kenttien energiat ja Poyntingin vuo ovat kuitenkin vektoreiden tuloja, jolloin reaali- ja imaginaariosat sekoittuvat toisiinsa. Koska  $\text{Re}(A \cdot B) \neq \text{Re} A \cdot \text{Re} B$ , on syytä ottaa ensin suureiden reaali-osat ja kertoa ne vasta sitten keskenään.

Pisteessä  $\mathbf{r} = 0$  kenttä  $\mathbf{E}(0, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t)$  ja

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2(\omega t) \quad (10.25)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (10.26)$$

Koska  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , on  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ , ja tasoaallon energiatiheys on

$$u_w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{n}{c} \right)^2 E^2 \quad (10.27)$$

Toisaalta  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH \mathbf{u}$ , joten Poyntingin vektori osoittaa aallon etenemissuuntaan ja on suuruudeltaan

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (10.28)$$

Tasoaaltojen energiatiheys ja energiavuo saavat siis hyvin yksinkertaiset lausekkeet ja lisäksi

$$S = \frac{c}{n} u_w \quad (10.29)$$

Jos vaihenopeutta käsitellään aallon etenemissuuntaisena vektorina  $\mathbf{v}_p$ , voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{S} = u_w \mathbf{v}_p \quad (10.30)$$

Tasoaallon Poyntingin vuo voidaan siis tulkita energiatiheyden etenemisenä vaihenopeuden mukana. Kentällä on energian lisäksi liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Aallot kuljettavat myös näitä suureita mukanaan.

Tasoaallon energiatiheys  $u_w$  ja energiavuo  $\mathbf{S}$  ovat verrannollisia suureeseen  $E^2$ . Ympyräpolarisoituneelle aallolle ( $\phi = \pm\pi/2$ )

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2 \quad (10.31)$$

joka on vakio. Lineaarisesti polarisoituneella aallolla puolestaan

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t \quad (10.32)$$

vaihtelee nollan ja maksiminsa välillä kaksi kertaa aallon taajuudella.

Energiaa tarkastellaan usein korkeataajuisten aaltojen tapauksessa. Tällöin  $E^2$ :n aikakeskiarvo on tärkeämpi suure kuin sen ajallinen vaihtelu. Koska  $\cos^2(\omega t - \phi)$ :n keskiarvo yhden jakson aikana on  $1/2$ , kaikilla polarisatioilla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2) \quad (10.33)$$

Tämän voi kirjoittaa myös kompleksisen  $\mathbf{E}$ -vektorin avulla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \quad (10.34)$$

missä \* viittaa kompleksikonjugaattiin. Ongelma voidaan siis käsitellä alusta loppuun kompleksisena, mutta silloin mitattavat suureet on käsiteltävä jakson yli otettuina keskiarvoina.

## 10.4 Tasoaallot johteessa

Yksinkertaisessa väliaineessa ( $\mu$ ,  $\epsilon$  ja  $\sigma$  vakioita), jossa ei ole vapaita varauksia aaltoyhtälöt ovat (HT)

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (10.35)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (10.36)$$

Muistutetaan taas, että nämä ovat seurausta Maxwellin yhtälöistä. Niillä on myös ratkaisuja, jotka eivät toteuta Maxwellin yhtälöitä, joten ratkaisujen fysikaalisuus on tarkastettava erikseen käytännön ongelmissa.

Sähkökentän aaltoyhtälöä kutsutaan lennätinyhtälöksi. Se on perusmerkki osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta Fourier-muunnosten avulla. Oikaistaan nyt olettamalla suoraan tasoaaltoratkaisu ja lähtemällä liikkeelle Maxwellin yhtälöistä, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H} \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} \end{aligned} \quad (10.37)$$

Koska  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$  ja  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , niin aalto on jälleen poikittainen.

Valitaan koordinaatisto siten, että  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_x$  ja  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$ . Tällöin

$$\begin{aligned} kE_x &= \omega\mu H_y \\ ikH_y &= -(\sigma - i\omega\epsilon)E_x \end{aligned} \quad (10.38)$$

Tästä (tai suoraan aaltoyhtälöstä) saadaan dispersioyhtälö  $k = k(\omega)$ :

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + i \omega \sigma \mu \quad (10.39)$$

Aaltoluku  $k$  on nyt kompleksiluku, joka voidaan kirjoittaa muodossa  $k = |k|e^{i\alpha}$  ja dispersioyhtälöstä voidaan ratkaista

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\mu \omega \sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right) \end{aligned} \quad (10.40)$$

Numeerisia laskentaohjelmistoja käytettäessä ei useinkaan tarvitse kirjoittaa erikseen aaltoluvun reaali- ja imaginaariosia, vaan voi käyttää kompleksilukua  $k = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu + i \omega \sigma \mu}$ . Neliöjuuren vaiheen oikea valinta on kuitenkin syytä tarkastaa huolellisesti.

Lennätinyhtälön ratkaisu harmonisille aalloille on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \mathbf{e}_x e^{i(\operatorname{Re}(k)z - \omega t)} e^{-\operatorname{Im}(k)z} \\ &= E_0 \mathbf{e}_x \exp[i(|k|z \cos \alpha - \omega t)] \exp[-|k|z \sin \alpha] \end{aligned} \quad (10.41)$$

Tässä valitaan  $\alpha$ :n vaihe siten, että  $\operatorname{Im}(k) > 0$  eli  $\sin \alpha > 0$  (HT: piirrä kuva kompleksitasossa). Tällöin aalto vaimenee edetessään väliaineeseen (tekijä  $e^{-|k|z \sin \alpha}$ ), mikä on fysikaalisesti mielekäs ratkaisu. Matka, jolla aallon amplitudi vaimenee tekijällä  $e$ , on väliaineen **tunkeutumissyvyys** (skin depth):

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{Im}(k)} = \frac{1}{|k| \sin \alpha} \quad (10.42)$$

Väliaineen **impedanssi** (aaltovastus) määritellään

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu \omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} \exp\left[-\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)\right] \quad (10.43)$$

Impedanssin yksikkö on sama kuin resistanssilla:  $[Z] = \Omega$  (kertaa impedanssin, admittanssin ja reaktanssin käsitteet esimerkiksi KSII:sta).

**Esimerkki: hyvä johde.** Siirrosvirtatermi on mitätön:  $\sigma \gg \omega \epsilon \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ ;  $\delta = \sqrt{2}/(\omega \mu \sigma)$ ,  $v_p = \delta \omega \tan \alpha = \delta \omega$

$$\text{Kuparille: } \begin{cases} f = 50 \text{ Hz} & \delta \approx 1 \text{ cm} & v_p \approx 3 \text{ m/s} \\ f = 50 \text{ MHz} & \delta \approx 10 \mu\text{m} & v_p \approx 3 \times 10^3 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{-i\pi/4} \Rightarrow 45^\circ \text{ vaihe-ero } \mathbf{E}\text{:n ja } \mathbf{H}\text{:n välillä.}$$

**Esimerkki: eriste.**  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\mu = \mu_0 \Rightarrow \alpha = 0$  eli aalto ei vaimene tunkeutuessaan eristeeseen.  $Z = \sqrt{\mu_0/\epsilon} \equiv Z_0 \sqrt{\epsilon_0/\epsilon}$ , missä  $Z_0$  on **tyhjän impedanssi**:  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376,73 \Omega$ .



Fourier-komponenttien yhtälöryhmästä saadaan aaltoluvun ja kenttien välille yhteydet

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \hat{\epsilon}_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (10.44)$$

missä  $\hat{\epsilon}_r$  on kompleksinen suhteellinen dielektrisyysvakio ( $\mu = \mu_0$ )

$$\hat{\epsilon}_r = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (10.45)$$

Nyt myös taitekerroin kannattaa määritellä kompleksilukuna

$$\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}_r \quad (10.46)$$

jolloin aaltoluku  $k$  toteuttaa yhtälön  $k^2 = \hat{n}^2 \omega^2 / c^2$ .

## 10.5 Druden ja Lorentzin oskillaattorimalli

**Dispersiivisessä väliaineessa** dispersioyhtälö on yksinkertaista lineaarista relaatiota  $\omega = (c/n)k$  monimutkaisempi. Aineen eristeominaisuudet voivat riippua taajuudesta ja aaltoluvusta:  $\epsilon = \epsilon(\omega, \mathbf{k})$ . Tarkastellaan väliainetta, jossa ei ole vahvoja sisäisiä voimia, ja jätetään aineen magneettiset ominaisuudet huomiotta ( $\mu = \mu_0$ ). Kuvataan klassisen fysiikan mukaisesti yhtä elektronia, joka on sidottu atomiin harmonisella voimalla

$$\mathbf{F}_h = -m\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (10.47)$$

missä  $\mathbf{r}$  on poikkeama tasapainoasemasta. Oletetaan lisäksi, että elektronin liikettä vastustaa voima

$$\mathbf{F}_d = -m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (10.48)$$

missä alaindeksi  $d$  (damping) viittaa siihen, että voima vaimentaa harmoniseen voimaan liittyvää värähtelyä. Ulkoisessa sähkökentässä  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  liikeyhtälöksi tulee

$$m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right) = -e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (10.49)$$

Oletetaan harmoninen aikariippuvuus ( $\propto \exp(-i\omega t)$ ), jolloin liikeyhtälön ratkaisu on

$$\mathbf{r} = \frac{-e \mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (10.50)$$

Elektronin poikkeama tasapainoasemasta aiheuttaa dipolimomentin  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (10.51)$$

Olkoon yksikkötilavuudessa  $n$  molekyyliä ja jokaista molekyyliä kohti  $Z$  elektronia. Oletetaan, että  $f_j$  kappaleella jokaisen molekyylin elektroneista on ominaistajuus  $\omega_{0j}$  ja vaimennustekijä  $\gamma_j$ . Tekijöitä  $f_j$  kutsutaan **oskillaattorivoimakkuuksiksi** ja ne normitetaan elektronien lukumäärään:  $\sum_j f_j = Z$ . Nyt sähköinen polarisoituma (dipolimomenttien tiheys) on

$$\mathbf{P} = \frac{ne^2\mathbf{E}}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (10.52)$$

Yksinkertaisessa aineessa sähkövuon tiheydestä  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  saadaan

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) \quad (10.53)$$

Siis permittiivisyys on taajuudesta riippuva kompleksiluku.

Oletetaan sitten, että aineessa on jonkin verran vapaita elektroneja ( $f_0$  kappaletta molekyyliä kohti), mutta että muuten väliaine on samanlainen kuin edellä. Vapaille elektroneille  $\omega_{00} = 0$ , jolloin

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \right) - \frac{ne^2}{m\omega} \frac{f_0}{\omega + i\gamma_0} \quad (10.54)$$

Merkitään oikean puolen ensimmäistä termiä  $\epsilon_b$  ja käytetään Ohmin lakia ( $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ ). Tällöin Maxwellin neljännessä laista saadaan

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon_b)\mathbf{E} \equiv -i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (10.55)$$

joten

$$\epsilon = \epsilon_b + i\sigma/\omega \quad (10.56)$$

Vertaamalla tätä lausekkeeseen (10.54) saadaan

$$\sigma = \frac{f_0 ne^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \quad (10.57)$$

Johtavuus  $\sigma$  on nyt taajuuden kompleksiarvoinen funktio. Jos  $\gamma_0 \gg |\omega|$  ja  $f_0 = 1$ , tästä tulee luvusta 5 tuttu staattisen johtavuuden lauseke

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\gamma_0} \quad (10.58)$$

missä  $\gamma_0$  on törmäysajan  $\tau$  käänteisluku.

Esimerkiksi kuparilla on huoneen lämpötilassa ominaisuudet  $\sigma = 5,6 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ ,  $n = 8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $f_0 = 1$ , jolloin  $\gamma_0 = 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ . Oletus staattisesta johtavuudesta on siis hyvä taajuuksilla  $|\omega| \ll 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ , joka on varsin korkea verrattuna esimerkiksi tyypilliseen radioasemaan, jolle  $\omega = 96,2 \text{ MHz} \cdot 2\pi \approx 6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ .

Taajuuksia  $\omega_{0j}$  kutsutaan **resonanssitajuuksiksi**. Monissa käytännön ongelmissa  $\gamma_j \ll \omega_{0j}$ , joten  $\epsilon(\omega)$  on melkein reaalinen paitsi resonanssitajuuksien lähellä eli

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j \neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \quad (10.59)$$

Dispersiota kutsutaan **normaaliksi**, jos  $d(\text{Re } \epsilon(\omega))/d\omega > 0$  ja **anomaaliseksi**, jos  $d(\text{Re } \epsilon(\omega))/d\omega < 0$ . Normaalin dispersioon alueella permittiivisyys kasvaa taajuuden myötä. Anomaalista dispersiota ilmenee ainoastaan lähellä resonanssikohtaa, missä  $\text{Im } \epsilon$  poikkeaa nolasta (HT: piirrä kuva).

Tarkastellaan energiabudjettia resonanssikohtan lähellä. Sähkövirta on nyt polarisaatiovirtaa  $\mathbf{J}_P = \partial \mathbf{P} / \partial t$  ja sähkökentän tekemän työn tehoteiheyttä

$$W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_P = \mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{P} / \partial t \quad (10.60)$$

Yhden jakson keskimääräinen tehoteiheyttä on

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \cdot (-i\omega \mathbf{P})^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(i\omega(\epsilon^* - \epsilon_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{\omega}{2} |\mathbf{E}|^2 \text{Im } \epsilon(\omega) \quad (10.61)$$

Jos  $\text{Im } \epsilon > 0$ , energia siirtyy sähkökentältä elektroneille eli aalto vaimenee. Tätä kutsutaan **resonanssiabsorptioksi**. Tässä mallissa  $\text{Im } \epsilon > 0$ , kun  $\omega > 0$ . On olemassa tärkeitä fysikaalisia prosesseja, joissa aalto saa energiaa hiukkasilta, mutta tämä malli ei sovellu niihin tapauksiin. Tässä yhteydessä on opettavaista todeta merkinvalinnan vaikutus. Jos aikariippuvuudeksi valittaisiin  $\exp(+i\omega t)$ , muuttuisi  $\text{Im } \epsilon$ :n merkki. Tilanteen fysiikka on tietenkin riippumatonta merkkisopimuksista.

Väliaineen taitekerroin ja aallon aaltoluku ovat

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \quad (10.62)$$

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \frac{\omega}{c} \quad (10.63)$$

Tästä saadaan vaihenopeus

$$v_p = \omega/k = c/n(\omega) \quad (10.64)$$

Energian etenemisnopeuden dispersiivisessä väliaineessa antaa **ryhmänopeus**, joka määritellään  $v_g = d\omega/dk$  ja on siten (ks. *Jackson*)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (10.65)$$

Samaan aikaan lähtevät eritaajuiset aallot saavuttavat vastaanottajan eri aikaan, mikäli ne etenevät dispersiivisessä väliaineessa.

## 10.6 Palloaallot<sup>1</sup>

Tasoaalto on erittäin käyttökelpoinen matemaattinen idealisaatio. Todellisuudessa sähkömagneettinen aalto kuitenkin synnytetään esimerkiksi äärellisen kokoisella antennilla. Antennin lähellä kenttien rakenne on monimutkainen ja riippuu antennin geometriasta. Kun aalto etenee avaruuteen, se laajenee ja tarkasteltaessa aaltorintamaa riittävän pienellä alueella se näyttää tasoaaltorintamalta. Joskus on tarpeen ottaa huomioon aaltorintaman globaali muoto. Tarkastellaan esimerkkinä origosta joka suuntaan eteneviä pallonmuotoisia aaltorintamia. Periaatteessa ongelma ratkaistiin luvussa 9, jossa johdettiin viivästyneet potentiaalit ja palloaallon Greenin funktio. Kenttiä ei laskettu, sillä derivointi viivästyneistä potentiaaleista on aika työlästä.

Tyhjössä etenevän aallon sähkökentän aaltoyhtälö on

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.66)$$

josta monokromaattiselle aallolle tulee vektorimuotoinen Helmholtzin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (10.67)$$

Ongelmana on termin  $\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$  kirjoittaminen pallokoordinaateissa. Termin  $-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$  radiaali- ja kulmakomponenteissa ovat mukana kaikki pallokoordinaatiston muuttujat. Saadaan kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön ryhmä, joissa kaikissa ovat mukana kaikki sähkökentän komponentit. Vektorimuotoinen Laplaceen yhtälö separoituu kunkin muuttujan erillisiksi differentiaaliyhtälöiksi vain karteesisissa koordinaateissa.

Tarkastellaankin skalaarimuotoista Helmholtzin yhtälöä

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0 \quad (10.68)$$

<sup>1</sup>Tämä luku kuuluu yleissivistykseen

Suoraviivainen harjoitustehtävä on osoittaa, että

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (10.69)$$

on (10.67):n ratkaisu, ja  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Faradayn laista

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (10.70)$$

saadaan magneettikenttä

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (10.71)$$

HT: Tarkasta, että loput Maxwellin yhtälöt toteutuvat tyhjässä.

Voitaisiin myös lähteä liikkeelle  $\mathbf{B}$ -kentän aaltoyhtälöstä, jolloin

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (10.72)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (10.73)$$

Ratkaisuparissa  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  sähkökenttä on jokaisessa pisteessä tangentialinen origokeskisen pallon pinnan kanssa. Tätä aaltoa kutsutaan joskus transversaaliseksi sähköiseksi (TE) moodiksi. Ratkaisuparissa  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  magneettikentällä on puolestaan sama ominaisuus ja aaltoa kutsutaan transversaaliseksi magneettiseksi (TM) moodiksi (HT: piirrä kuvat).

Vielä on löydettävä  $\psi$  Helmholtzin skalaariyhtälön ratkaisuna. Käytetään Laplacen yhtälön ratkaisemisesta tuttua muuttujien separointia pallokoordinaatistossa (luku 2). Ratkaistava yhtälö on pallokoordinaateissa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (10.74)$$

Erona Laplacen yhtälöön on siis termi  $k^2 \psi$ .

Sijoitetaan separointiyrite  $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$  ylläolevaan yhtälöön. Jaetaan tulos  $\psi$ :llä ja kerrotaan tekijällä  $r^2 \sin^2 \theta$ , jolloin

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (10.75)$$

$\phi$ -riippuvuuden osalta separointi antaa tutun yhtälön

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (10.76)$$

$\theta$ - ja  $r$ -riippuvat yhtälöt ovat puolestaan

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_{lm} = 0 \quad (10.77)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - k^2 r^2] R_l = 0 \quad (10.78)$$

Yhtälön (10.76) ratkaisut ovat muotoa  $\Phi_m = e^{\pm im\phi}$  ja yhtälön (10.77) ratkaisut ovat tutut Legendren liittofunktiot (luku 2). Termi  $k^2\psi$  muuttaa siis ainoastaan radiaalista yhtälöä (10.78), josta muuttujanvaihdolla  $\xi = kr$  ja sijoituksella  $R_l = \xi^{-1/2}Z_l$  saadaan Besselin yhtälö

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - [(l + 1/2)^2 - \xi^2] Z_l = 0 \quad (10.79)$$

Ratkaisuina ovat Besselin ja Neumannin funktiot  $J_{l+1/2}(kr)$  ja  $N_{l+1/2}(kr)$ . Pallokoordinaatistossa näistä muodostetaan pallobesseleitä

$$j_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{l+1/2}(kr) \quad (10.80)$$

$$n_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} N_{l+1/2}(kr) \quad (10.81)$$

Ne ovat alkeisfunktioita, joten niitä ei tarvitse pelätä: esimerkiksi  $j_0(r) = \sin r/r$ ,  $n_0(r) = -\cos r/r$  (enempi pohdiskelu jää FYMM II:lle).

Nyt on koossa yleinen ratkaisu skalaarimuotoiselle Helmholtzin yhtälölle muodossa

$$\psi_{lm} = \sqrt{\pi/2kr} Z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) e^{\pm im\phi} \quad (10.82)$$

Yksinkertaisin fysikaalisesti mielenkiintoinen valinta on

$$\psi_{10} = \frac{1}{kr} e^{ikr} \left[ 1 + \frac{i}{kr} \right] \cos \theta \quad (10.83)$$

josta saadaan TE-moodille

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi_{10} = -E_0 e^{ikr} \left[ \frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right] \sin \theta \mathbf{e}_\phi \quad (10.84)$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -i \frac{1}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{i}{\omega} E_0 e^{ikr} \left\{ \left[ \frac{1}{kr^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right] 2 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[ \frac{i}{r} - \frac{1}{kr^2} - \frac{i}{k^2 r^3} \right] \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right\} \end{aligned} \quad (10.85)$$

Tämä on itse asiassa magneettisen dipoliantennin säteilemä aaltokenttä.