

Luku 11

Aaltojen heijastuminen ja taittuminen

Tässä luvussa käsitellään sähkömagneettisten aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnalla. Rajoitutaan monokromaattisiin aaltoihin ja oletetaan väliaineet lineaarisiksi ja magnetoitumattomiksi ($\mu = \mu_0$), ellei toisin mainita.

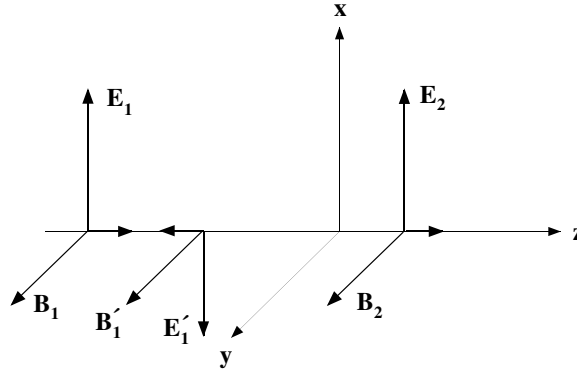
11.1 Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle

Tarkastellaan ensin heijastumista kahden eristeen rajapinnalla (xy -taso), kun aalto saapuu kohtisuoraan pintaa vastaan (kuva 11.1). $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ kuvaa $+z$ -akselin suuntaan etenevää **saapuvaa** aaltoa, $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{B}'_1)$ $-z$ -akselin suuntaan etenevää **heijastunutta** aaltoa ja $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ rajapinnan **läpäissyttä** aaltoa. Oletetaan, että aallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut x -akselin suuntaan, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{e}_x E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_x E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (11.1)$$

missä $k_1 = n_1 \omega / c$, $k_2 = n_2 \omega / c$. Magneettikenttä saadaan Faradayn laista seuraavasta relaatiosta $\mathbf{B} = (n/c) \mathbf{u} \times \mathbf{E}$, missä $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z$ tulevalle ja läpäisseelle aallolle ja $\mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$ heijastuneelle aallolle. Magneettikenttä on y -akselin suuntainen:

$$\begin{aligned} c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}'_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{e}_y n_2 E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (11.2)$$



Kuva 11.1: Heijastuminen ja läpäisy kohtisuoraan xy -tasolle saapuvalla aal-
lolle.

Kaikilla aalloilla on oltava sama kulmataajuus ω , jotta reunaehdot rajapin-
nalla toteutuisivat kaikilla ajanhetkillä t . Sähkökentän tangentialikompo-
nentti on jatkuva, joten

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \quad (11.3)$$

Sama pätee epämagneettisessa väliaineessa ($\mu = \mu_0$) myös magneettikentälle.
Jatkuvuusehdoksi saadaan

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x} \quad (11.4)$$

Oletetaan saapuvan aallon amplitudi E_{1x} tunnetuksi ja ratkaistaan hei-
jastuneen ja läpäisseen aallon amplitudit:

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}; \quad E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \quad (11.5)$$

Määritellään **Fresnelin kertoimet** kohtisuoraan tulevalle aalolle:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (11.6)$$

$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (11.7)$$

missä r viittaa heijastumiseen (reflection) ja t läpäisyyn (transmission).
Käytännön ongelmissa mitataan yleensä kunkin osa-aallon mukana kulke-
vaa keskimääräistä energiavuota eli **intensiteettiä**. Se saadaan Poyntingin
vektorista luvun 10.3 mukaisesti:

$$\langle S \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2) \quad (11.8)$$

Tässä käsiteltävässä tapauksessa on $E_p = E_x$ ja $E_s = 0$. Määritellään **heijastussuhde** R_n ja **läpäisysuhde** T_n (n viittaa normaalin suuntaiseen saapumiseen) seuraavasti:

$$R_n = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = r_{12}^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (11.9)$$

$$T_n = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = \frac{4n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2} \quad (11.10)$$

Mille hyvänsä eristeparille $R_n + T_n = 1$, mikä ilmaisee energian säilymisen.

Elliptiselle polarisaatiolle on tarkasteltava erikseen x - ja y -komponentteja. x -komponenteille pätee yllä oleva tarkastelu sellaisenaan ja y -komponenteille tulee samat Fresnelin kertoimet. Myös y -komponentit pysyvät samassa vaiheessa keskenään, vaikka ne ovatkin eri vaiheessa kuin x -komponentit. Heijastus- ja läpäisysuhteet pysyvät ennallaan, sillä intensiteetti $\langle S \rangle$ on eri polarisaatiokomponenttien intensiteettien summa.

Esimerkkejä

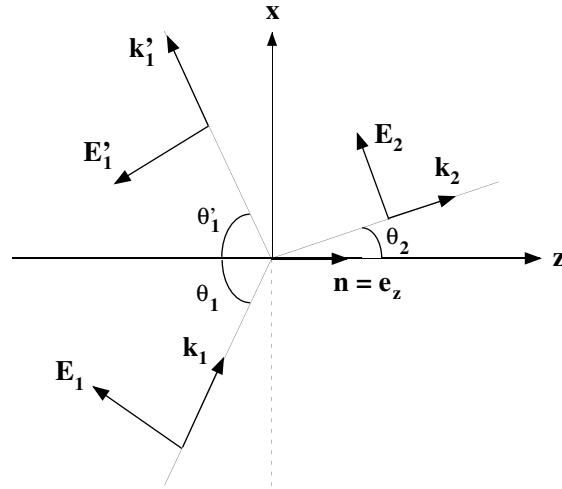
1. Ilman ($n_1 = 1$) ja lasin ($n_2 = 1.5$) rajapinnalla $R_n = 0.04$ ja $T_n = 0.96$.
2. Puhtaan veden taitekerroin näkyvän valon aallonpituudella on $n_2 = 1.33$, joten $R_n = 0.02$. Kun ω on alle 10^{11} s^{-1} , veden suhteellinen permittiivisyys on kuitenkin suuri (81), joten $n_2 = 9$ ja $R_n = 0.64$. Vesi siis heijastaa huomattavasti tehokkaammin radioaaltoja kuin valoa. Paremmiin sähköä johtavalle suolaiselle merivedelle heijastussuhde on paljon suurempi.

11.2 Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa

Tarkastellaan sitten mielivaltaista saapumiskulmaa. Kuvan 11.2 tilanteessa rajapinta on xy -tasossa ja saapuvan aallon aaltovektori xz -tasossa (**saapumistasossa**). Valitaan jokaiselle osa-aallolle jälleen $\{\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u}\}$ -kanta, jolloin kuvan tilanteessa kullakin aallolla on vain sähkökentän p -komponentti.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{p}_1 \hat{E}_{1p} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= \mathbf{p}'_1 \hat{E}'_{1p} e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{p}_2 \hat{E}_{2p} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (11.11)$$

Koska kunkin osa-aallon magneettikenttä on kohtisuorassa sekä \mathbf{k} - että \mathbf{p} -vektoreihin nähden, magneettikentällä on vain s -komponentti ja se on tässä geometriassa kaikilla osa-aalloilla y -akselin suuntainen. Vaikka kuva 11.2 näyttää erikoistapaukselta, kyseessä on toinen kahdesta perustilanteesta.



Kuva 11.2: Heijastuminen ja taittuminen p -polarisaatiolle.

Olkoon $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ rajapinnan yksikkönormaali. Jotta aaltokenttä olisi jatkuva rajapinnalla, täytyy aaltojen taajuuden lisäksi myös vaiheiden olla samat missä hyvänsä rajapinnan pisteessä \mathbf{r}_0 , joten

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \quad (11.12)$$

Tästä on helppo (HT) näyttää, että

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}'_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}_2 \quad (11.13)$$

Siis kaikki \mathbf{k} -vektorit ja \mathbf{n} ovat kohtisuorassa vektoria $(\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1)/|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1| = \mathbf{e}_y$ kohtaan, joten kaikkien osa-aaltojen aaltovektorit ovat samassa tasossa.

Muistisääntönä p -komponentti viittaa saapumistasossa olevaan komponenttiin (parallel). Tällaisesta polarisaatiosta käytetään nimitystä **p -polarisaatio**. Radioaaltojen yhteydessä tätä kutsutaan myös **vertikaaliseksi polarisaatioksi**, sillä tarkasteltaessa radioaallon heijastumista ionosfääristä näin polarisoituneen aallon sähkökentällä on pystykomponentti.

Toinen peruspolarisaatio on **s -polarisaatio** tai **horisontaalinen polarisaatio**, jossa sähkökentällä on vain s -komponentti. s viittaa saksankielen sanaan senkrecht (kohtisuora). Tällöin puolestaan osa-aaltojen magneettikentillä on erisuuntaiset p -komponentit. Koska kaikki muut polarisaatiotilat voidaan ilmaista eri vaiheissa värähtelevien s - ja p -polarisoituneiden aaltojen summana, riittää tarkastella näitä kahta perustapausta

Ehdosta (11.12) seuraa kaksi muutakin tärkeää tulosta. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} &= k_1 \cos \theta_1 \\ \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n} &= -k'_1 \cos \theta'_1 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} &= k_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (11.14)$$

joten

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| &= k_1 \sin \theta_1 \\ |\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}| &= k'_1 \sin \theta'_1 \\ |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}| &= k_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (11.15)$$

Niinpä on oltava

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (11.16)$$

Koska saapuva ja heijastunut aalto etenevät samalla taajuudella samassa väliaineessa, $k_1 = k'_1$ ja saadaan **heijastuslaki**

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad \text{eli} \quad \theta_1 = \theta'_1 \quad (11.17)$$

Aaltolukuja eri väliaineissa puolestaan sitoo dispersioyhtälö $k = n\omega/c$, mistä seuraa **Snellin laki**

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (11.18)$$

Huom. Näissä relaatioissa ei ole käytetty Maxwellin yhtälöistä seuraavia reunaehtoja, vaan ne riippuvat aaltoliikkeen yleisistä geometrisista ominaisuuksista ja Snellin lain osalta väliaineen taitekertoimesta.

Fresnelin kertoimet määritetään kenttien tangentiaalikomponenttien jatkuvuusehdoista. Normaalikomponenttien jatkuvuusehdot toteutuvat automaattisesti. Vektorikenttä voidaan hajottaa normaali- ja tangentiaalikomponentteihin kirjoittamalla $\mathbf{E} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$. Tangentiaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa, että

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (11.19)$$

Magneettikentälle puolestaan (kun $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_2 \quad (11.20)$$

Jos aaltovektorin suuntainen yksikkövektori on \mathbf{u} , niin $\mathbf{B} = (n/c)\mathbf{u} \times \mathbf{E}$, joten magneettikentän jatkuvuus edellyttää, että

$$n_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}'_1 \times \mathbf{E}'_1) = n_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{E}_2) \quad (11.21)$$

Kirjoittamalla vektorikolmitulot auki ja tarkastelemalla s -komponenttia saadaan osa-aallolle \mathbf{E}_1 yhtälö

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{1s}) = -\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} \quad (11.22)$$

ja vastaavasti muille osa-aalloille. Näin (11.21) saadaan muotoon

$$n_1 (\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} - \cos \theta'_1 \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} \quad (11.23)$$

Koska $\theta_1 = \theta'_1$, tämä sievenee muotoon

$$n_1 \cos \theta_1 (\mathbf{E}_{1s} - \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} \quad (11.24)$$

Sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuudesta saadaan suoraan s -komponenteille ehto

$$\mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}'_{1s} = \mathbf{E}_{2s} \quad (11.25)$$

Näistä yhtälöistä saadaan Fresnelin kertoimet s -polarisaatiolle:

$$\mathbf{E}'_{1s} = r_{12s} \mathbf{E}_{1s}, \quad \mathbf{E}_{2s} = t_{12s} \mathbf{E}_{1s} \quad (11.26)$$

missä

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (11.27)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (11.28)$$

p -polarisaatio näyttää geometrialtaan hankalammalta, koska sähkökenttä ei ole rajapinnan tasossa. Nyt kannattaa tarkastella magneettikenttää, joka on rajapinnan tasossa. Näin saadaan yhtälöpari

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\mathbf{B}_{1s} - \mathbf{B}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \mathbf{B}_{2s} \quad (11.29)$$

$$\mathbf{B}_{1s} + \mathbf{B}'_{1s} = \mathbf{B}_{2s} \quad (11.30)$$

ja Fresnelin kertoimet tulevat ehdosta

$$\mathbf{B}'_{1s} = r_{12p} \mathbf{B}_{1s}, \quad \mathbf{B}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p} \mathbf{B}_{1s} \quad (11.31)$$

missä

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (11.32)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (11.33)$$

Koska Snellin laki sitoo taitekertoimet saapumis- ja taittumiskulmiin

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (11.34)$$

voidaan taittumiskulma eliminoida Fresnelin kertoimista.

Intensiteettien väliset relaatiot saadaan keskimääräisten Poyntingin voiden avulla, mutta nyt täytyy käsitellä s - ja p -polarisaatiot erikseen:

$$R_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad T_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (11.35)$$

$$R_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} \quad T_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (11.36)$$

jotka Fresnelin kertoimien avulla saavat muodon

$$R_s = r_{12s}^2 \quad T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (11.37)$$

$$R_p = r_{12p}^2 \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (11.38)$$

ja lisäksi $R_s + T_s = 1$ ja $R_p + T_p = 1$.

Käyttämällä hyväksi Snellin lakia Fresnelin kertoimet voi muuntaa puhtaasti trigonometrisiksi (HT):

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (11.39)$$

$$t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (11.40)$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (11.41)$$

$$t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (11.42)$$

Tarkastellaan näiden avulla paria esimerkkiä.

Brewsterin kulma

Millä kulmilla aalto ei lainkaan heijastu rajapinnalta? Molemmilla polarisaatioilla tämä tapahtuu, kun $\theta_1 = \theta_2$, mutta tämä ei ole mielenkiintoinen tapaus, koska silloin molemmilla väliaineilla on oltava sama taitekerroin. p -polarisaation kyseessä ollen myös tapaus $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ tekee heijastuskertoimesta nollan. Taittuneen ja heijastuneen säteen välinen kulma on silloin suora. Merkitään sisääntulokulmaa θ_B ja kirjoitetaan $\theta_2 = \pi/2 - \theta_B$, jolloin Snellin laista saadaan ratkaistuksi **Brewsterin kulma**

$$\tan \theta_B = n_2/n_1 \quad (11.43)$$

Koska tämä ehto on voimassa vain p -polarisaatiolle (vertikaaliselle polarisaatiolle), sen avulla voidaan tuottaa polarisoitunutta valoa. Esimerkiksi ilman ($n = 1$) ja lasin ($n = 1.5$) rajapinnalla $\theta_B = 56^\circ$ ja tässä kulmassa rajapinnalle tulevasta polarisoitumattomasta (tai mielivaltaisesti polarisoituneesta) valosta heijastuu vain s -polarisoitunut komponentti.

Kokonaisheijastus

Aalto heijastuu kokonaan, jos $\theta_2 = \pi/2$. Sitä vastaava sisääntulokulma saadaan jälleen Snellin laista

$$\sin \theta_c = n_2/n_1 \quad (11.44)$$

Tätä kutsutaan **kriittiseksi kulmaksi**. Se on reaalinen vain, jos $n_2 < n_1$. Tarkastellaan jälleen lasin ja ilman rajapintaa, mutta nyt lasin suunnasta, jolloin $\theta_c = 42^\circ$. Jos kulma on tätä suurempi, Snellin laki antaa ehdon

$$\sin \theta_2 > 1 \quad (11.45)$$

jolla ei ole reaalisia ratkaisuja. Tarkastelemalla kompleksisia Fresnelin kertoimia voidaan näyttää, että $R_s = R_p = 1$ kaikille $\theta_1 \geq \theta_c$. Kriittistä kulmaa suuremmilla saapumiskulmilla kaikki aallon energia heijastuu. Tästä on hyötyä käytännön optiikassa, kuten prismakiikareissa ja valokaapeleissa.