

## Luku 12

# Aaltoputket ja resonanssikaviteetit

Tässä luvussa tutustutaan ohjattuun aaltoliikkeeseen. Kerrataan ensin ajasta riippuvan sähkömagneettisen kentän käyttäytyminen ideaalijohteessa ja sen pinnalla. Äärettömän hyvän johteen sisällä ei ole sähkökenttää, koska vapaasti liikkuvat varaukset luovat pinnalle sellaisen varauskatteen  $\sigma_S$ , että kokonaiskenttä johteen sisällä on nolla. Samoin ajasta riippuva magneettikenttä häviää ideaalijohteen sisällä. Varaukset liikkuvat pinnalla luoden sellaisen pintavirran  $\mathbf{K}$ , että kokonaiskenttä on nolla johteessa. Muut reunaehdot ovat  $\mathbf{B}$ :n normaalikomponentin ja  $\mathbf{E}$ :n tangentialikomponentin jatkuvuus. Koska  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{E}$  ovat nollia ideaalijohteessa, niin aivan johteen ulkopuolella sähkökenttä on kohtisuorassa ja magneettikenttä yhdensuuntainen pintaan nähden. Todellisuudessa ideaalijohteita ei ole, mutta malli antaa kuitenkin hyvän peruskäsityksen aaltoputkista. Käytännön esimerkki aaltoputkesta on optinen kuitu ja resonanssikaviteetista mikroaaltouuni.

### 12.1 Sylinteriputki

Tarkastellaan onntoa poikkileikkaukseltaan mielivaltaista metallisylinteriä, jonka seinämät oletetaan ideaalijohteiksi. Sylinterin sisällä aine oletetaan johtamattomaksi (permittiivisyys  $\epsilon_0$ , permeabiliteetti  $\mu_0$ ). Kenttien aika-riippuvuus olkoon harmoninen ( $e^{-i\omega t}$ ). Maxwellin yhtälöt sylinterin sisällä ovat

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = 0 \quad (12.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} + i\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 0 \quad (12.4)$$

Kenttien Helmholtzin yhtälöt ovat

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E} = 0, \quad (\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{B} = 0 \quad (12.5)$$

Valitaan koordinaatisto siten, että  $z$ -akseli osoittaa aallon etenemissuuntaan. Sylinterigeometrian vuoksi tehdään yrittreet

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.6)$$

( $z$ -akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto  $e^{-ikz}$  käsitellään vastaavalla tavalla.) On huomattava, että nyt ei enää yleensä ole  $k = \omega/c$ . Sijoittamalla yrittreet aaltoyhtälöihin saadaan

$$(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{E} = 0, \quad (\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{B} = 0 \quad (12.7)$$

missä

$$\nabla_t = \nabla - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12.8)$$

Jaetaan kentät pitkittäiseen ja poikittaiseen osaan, esimerkiksi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t \quad (12.9)$$

missä

$$\mathbf{E}_z = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z \quad (12.10)$$

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_z$$

Nyt Maxwellin yhtälöt saadaan muotoon (HT)

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = -\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ikE_z \quad (12.11)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = -ikB_z \quad (12.12)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z \quad (12.13)$$

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \nabla_t E_z - ik\mathbf{E}_t = i\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_t \quad (12.14)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -\frac{i\omega}{c^2} E_z \quad (12.15)$$

$$\nabla_t B_z - \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} = \nabla_t B_z - ik\mathbf{B}_t = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (12.16)$$

Jos  $B_z$  ja  $E_z$  tunnetaan, voidaan poikittaiset kentät ratkaista yhtälöistä 12.14 ja 12.16. Yhtälöitä 12.11-12.16 ei pidä opetella ulkoa, vaan on ymmärrettävä käsittelyn perusideat.

**TEM-moodit**

TEM-moodit (transverse electromagnetic modes) ovat sähkömagneettisia aaltoja, joiden kentät ovat kohtisuorassa etenemissuuntaan nähden (siis  $B_z = 0$ ,  $E_z = 0$ ). Tällöin yhtälöistä 12.11-12.16 seuraa  $\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0$ ,  $\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = 0$ ,  $\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$ ,  $\nabla_t \times \mathbf{B}_t = 0$  ja kenttien laskeminen palautuu muodollisesti kaksiulotteiseksi statiikan ongelmaksi:

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t = 0, \nabla_t^2 \mathbf{B}_t = 0 \quad (12.17)$$

Havaitaan seuraavat seikat:

1) Aaltoluku  $k$  on

$$k = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad (12.18)$$

2) Kentillä on 12.16:n mukaan samanlainen yhteys kuin tyhjän tasoaalloissa:

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (12.19)$$

3) TEM-moodi ei voi edetä, jos sylinteri on ontto (sähkökenttä sisällä on täsmälleen nolla). Jos sylinteripintoja on useampia kuten koaksiaalikaapelissa, TEM-moodit voivat edetä.

4) TEM-moodilla ei ole **katkaisutaajuutta** (cut-off frequency) eli taajuutta, jolla aaltoluku häviäisi.

**TM- ja TE-moodit**

Tarkastellaan onttoa sylinteriä, jossa ei siis ole TEM-moodeja. Oletetaan nyt, että kentillä on etenemissuuntaiset ( $z$ -)komponentit. Kentät voidaan jakaa kahteen toisistaan riippumattomaan moodiin:

1) TM-moodit (transverse magnetic modes):

$$B_z = 0 \text{ kaikkialla}$$

$$E_z = 0 \text{ sylinterin pinnalla}$$

2) TE-moodit (transverse electric modes):

$$E_z = 0 \text{ kaikkialla}$$

$$\partial B_z / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla_t B_z = 0 \text{ sylinterin pinnalla (HT).}$$

**Huom.** Kirjallisuus on moodien nimityksessä varsin sekava.

Tarkastellaan ensin TM-moodeja ja oletetaan  $z$ - ja  $t$ -riippuvuus  $e^{i(kz - \omega t)}$ . Lausutaan  $\mathbf{B}_t$  ja  $\mathbf{E}_t$   $E_z$ :n avulla (vrt. 12.11, 12.14, 12.16):

$$\mathbf{B}_t = \frac{\omega}{kc^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (12.20)$$

ja

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t E_z \quad (12.21)$$

missä on merkitty

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (12.22)$$

$E_z$  ratkaistaan yhtälöstä 12.7:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)E_z = 0 \quad (12.23)$$

Samalla tavalla käsitellään TE-moodeja, ja saadaan (HT)

$$\mathbf{E}_t = \frac{\omega}{k} \mathbf{B}_t \times \mathbf{e}_z \quad (12.24)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t B_z \quad (12.25)$$

missä  $B_z$  toteuttaa yhtälön 12.7:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)B_z = 0 \quad (12.26)$$

Suureen  $\gamma^2$ :n on oltava positiivinen, jotta  $E_z$  ja  $B_z$  ovat värähteleviä ja reunaehdot voivat toteutua. Yhtälöiden ratkaisuja vastaa joukko ominaisarvoja  $\gamma_p$ , joita puolestaan vastaavat aaltoluvut  $k_p$ . Katkaisutaajuus saadaan määritelmän mukaan asettamalla  $k^2$  nolaksi, jolloin

$$\omega_p = c\gamma_p = \gamma_p / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (12.27)$$

Aaltoluku on tällöin

$$k_p = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad (12.28)$$

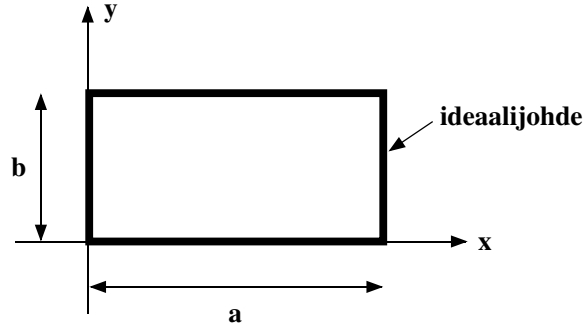
Jos taajuus on alle katkaisutaajuuden, aaltomoodi on eksponentiaalisesti vaimeneva, eikä siis etene.

## 12.2 Suorakulmainen aaltoputki

Erikoistapauksena tutkitaan suorakulmaisessa aaltoputkessa eteneviä TE-moodeja (kuva 12.1). Ratkaistaan ensin  $B_z$ :n Helmholtzin yhtälö

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)B_z = 0 \quad (12.29)$$

reunaehdoin  $\partial B_z / \partial n = 0$ , kun  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ .



Kuva 12.1: Aaltoputki, jonka poikkileikkaus on suorakaide.

Sähköstatiikan menetelmiä muistellen tehdään separointiyrite  $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$ , jolloin saadaan

$$X'' + p^2X = 0, Y'' + q^2Y = 0 \quad (12.30)$$

missä  $p^2$  on separointivakio ja  $q^2 = \gamma^2 - p^2$ . Ratkaisu on

$$B_z(x, y) = B_0(e^{ipx} + Ce^{-ipx})(e^{iqy} + De^{-iqy}) \quad (12.31)$$

missä  $B_0$ ,  $C$  ja  $D$  ovat vakioita. Reunaehdot toteutuvat, jos

$$\begin{aligned} C &= D = 1 \\ \sin pa = 0 &\Rightarrow p = m\pi/a, m = 0, 1, 2, \dots \\ \sin qb = 0 &\Rightarrow q = n\pi/b, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12.32)$$

Yhtälön ominaisarvot ovat siis

$$\gamma_{mn}^2 = p^2 + q^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2) \quad (12.33)$$

joita vastaavat ratkaisut ovat

$$B_{z,mn}(x, y) = B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (12.34)$$

Katkaisutaajuudet ovat

$$\omega_{mn} = c\gamma_{mn} = \pi c \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2} \quad (12.35)$$

Jos  $a > b$ , niin matalin katkaisutaajuus on  $\omega_{10} = \pi c/a$ . Tämän  $TE_{10}$ -moodin  $B_z$ -komponentti on

$$B_z = B_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.36)$$

ja muut komponentit saadaan yhtälöistä 12.24 ja 12.25:

$$\mathbf{B}_t = -\frac{ika}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_x \quad (12.37)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{i\omega a}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_y \quad (12.38)$$

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{10}^2}}{c} \quad (12.39)$$

Vastaavalla tavalla käsitellään  $z$ -akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto ( $e^{-ikz}$ ).

### 12.3 Resonanssikaviteetit

Tarkastellaan äärellisen pituisia sylinterimäisiä aaltoputkia (kaviteetteja, onkaloita), joiden päissä on täydellisesti johtavat seinät. Sisällä oleva aine on johtamatonta sähkömagneettisin parametrein  $\mu_0, \epsilon_0$ . Resonanssikaviteetti on onkalo, jonka pituus on jonkin aaltoputken moodin aallonpituuden monikerta. Kenttien  $z$ -riippuvuus on muotoa  $A \sin kz + B \cos kz$  (seisovat aallot eli  $e^{+ikz}$  ja  $e^{-ikz}$ -aaltojen summa). Jos päädyt ovat tasoilla  $z = 0$  ja  $z = d$ , niin reunaehdot voivat sekä TM- että TE-moodeille toteutua vain, jos  $k = \pi p/d$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  Silloin

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \quad (12.40)$$

eli jokaisella  $p$  ominaisarvoa  $\gamma_q$  vastaa ominaistajuus  $\omega_{qp}$ :

$$\omega_{qp}^2 = c^2 \left( \gamma_q^2 + \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \right) \quad (12.41)$$

Ominaisarvot määräytyvät systeemin geometriasta. Havaitaan seuraava ero aaltoputkien ja resonanssikaviteettien välillä: aaltoputkissa taajuus  $\omega$  voi saada minkä tahansa katkaisutaajuutta suuremman arvon. Kaviteetissa taajuus saa vain diskreettejä arvoja.

TM- ja TE-moodit voidaan käsitellä käyttämällä suoraan aaltoputkille saatuja tuloksia laskemalla sopivasti yhteen  $e^{+ikz}$ - ja  $e^{-ikz}$ -aaltoja. Esimerkiksi TM-moodilla sähkökentän tangentialikomponentin häviäminen pinoilla  $z = 0$  ja  $z = d$  vaatii, että

$$E_z = \psi(x, y) \cos \frac{\pi p z}{d} \quad (12.42)$$

koska silloin

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\pi p}{\gamma^2 d} \sin \frac{\pi p z}{d} \nabla_t \psi(x, y) \quad (12.43)$$

Funktio  $\psi$  toteuttaa Helmholtzin yhtälön

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi(x, y) = 0 \quad (12.44)$$

Magneettikenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{B}_t = \frac{i\omega}{\gamma^2 c^2} \cos \frac{\pi pz}{d} \mathbf{e}_z \times \nabla_t \psi(x, y) \quad (12.45)$$

Hyödyllinen HT on osoittaa, että nämä lausekkeet toteuttavat kaikki Maxwellin yhtälöt. Reunaehdoista seuraa puolestaan lisäehtoja  $\psi$ :lle.

Esimerkkinä tarkastellaan ympyräsylinteriä (säde  $R$ ). TM-moodissa  $E_z$ :n on hävittävä sylinterin pystyreunoilla eli sylinterikoordinaateissa  $\psi(R, \phi) = 0$ . Separointimenetelmällä saadaan fysikaalisesti kelvolliseksi ratkaisuksi

$$\psi(r, \phi) = \psi_{mn}(r, \phi) = AJ_m(\gamma_{mn}r)e^{\pm im\phi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12.46)$$

missä  $J_m$  on Besselin funktio ja  $\gamma_{mn} = x_{mn}/R$  ja  $x_{mn}$  on yhtälön  $J_m(x) = 0$   $n$ :s juuri. Ominaistaajuudet ovat nyt

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left( \frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \right) \quad (12.47)$$

Alin TM-moodi on  $TM_{010}$ , jossa  $\omega_{010} \approx 2,405c/R$ . Tämä on riippumaton sylinterin korkeudesta. Vastaavalla tavalla käsitellään TE-moodit (yksityiskohdat sivuutetaan). Niiden ominaistaajuuksissa on aina myös  $d$ -riippuvuus, joten taajuuksien säätäminen on helpompaa kuin TM-moodilla.

### Mikroaaltouuneista<sup>1</sup>

Mikroaallot ovat sähkömagneettista säteilyä aallonpituuksilla 1 mm–0,3 m (taajuus  $10^9 - 3 \cdot 10^{11}$  Hz). Mikroaaltouunin käyttö ruuanvalmistuksessa perustuu siihen, että mikroaallot saavat ruoka-aineiden polaariset molekyylit pyörrähtelemään. Kitkan takia osa pyörrähdysenergiasta muuttuu lämmöksi. Mikroaaltouuneissa käytetään tyypillisesti aallonpituutta 12,2 cm (taajuus 2450 MHz), jolloin saavutetaan hyvä absorptio erityisesti vesimolekyylille. Oleellista on, että ruoka-aineiden pitää sisältää polaarisia molekyylejä. Polaarittomat aineet läpäisevät mikroaaltoja, ja metallit taas heijastavat niitä. Tyypillinen tunkeutumissyvyys ruoka-aineissa on muutaman senttimetrin luokkaa. Kypsennys tapahtuu siis suoraan ruuan sisällä, ellei annos ole kovin paksu, jolloin sisäosissa kuumennus tapahtuu johtumalla.

Mikroaaltouunin tärkein osa on luonnollisesti uunitila, jossa ruoka kuumennetaan ja joka siis on resonanssikaviteetti. Mikroaaltokenttä synnytetään

<sup>1</sup>Arkipäivän yleissivistystä

magnetronissa, josta kenttä johdetaan aaltoputkea pitkin uuniin. Magnetroni koostuu useasta resonanssiontelosta (sähköisestä värähtelypiiristä). Erilinen uunitila on tarpeen, koska näihin onteloihin ei mahdu ruokaa.

HT: Monissa uunimalleissa on ovesa verkko, jonka läpi näkee uunin sisälle. Koska siis näkyvä valo kulkee oviverkon läpi, voiko mikroaaltosäteily vuotaa ympäristöön?