Luku 14

Elektrodynamiikka ja suhteellisuusteoria

Tämän luvun esitietoina oletetaan modernin fysiikan alkeista tai muualta tutut perustiedot Lorentzin muunnoksista jne. Koska tensorilaskenta ei ole kaikille ennestään tuttua, tässä luvussa esitellään joitain käytännön laskuissa tarvittavia perusasioita. Johdatus tensoreihin löytyy CL:n lisäksi kirjoista *Honkonen, Pitkänen, Perko*: Fysiikan matemaattiset apuneuvot (Limes, 1994) tai *Arfken & Weber*: Mathematical Methods for Physicists (Academic Press, 1995) sekä useista suhteellisuusteorian oppikirjoista.

14.1 Lorentzin muunnos

Suhteellisuusteoria ja elektrodynamiikka liittyvät läheisesti toisiinsa, mikä on tullut esiin useampaan kertaan. Koordinaatistomuunnosten merkitys elektrodynamiikassa ilmenee esimerkiksi tilanteessa, jossa on varauksia levossa tarkastelijan suhteen. Hän näkee niistä aiheutuvan sähkökentän, mutta ne eivät aiheuta hänen koordinaatistossaan magneettikenttää. Jos tarkastelija kuitenkin liikkuu varauksiin nähden, varaukset kuljettavat tarkastelijan näkökulmasta sähkövirtaa ja aiheuttavat magneettikentän. Niinpä sähkö- ja magneettikentät muuntuvat jollain tavoin toisikseen liikkeen seurauksena.

Ehkä vieläkin tärkeämpi esimerkki liittyy lukuun 7, jossa kuljetettiin johdetankoa magneettikentässä ja saatiin aikaan sähkökenttä. Siirrettiinpä tankoa magneettikentässä, kestomagneettia tangon suhteen tai muutettiin magneettikenttää ajan suhteen, kaikissa tapauksissa pätee *sama* Faradayn laki $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$. Siis vaikka kentät itsessään riippuvat liiketilasta, niitä toisiinsa sitova fysikaalinen laki on liikkeestä riippumatta sama.

Sähkömagneettisen aallon olemassaolo oli 1800-luvun lopulla kokeellinen tosiasia. Kysymys, missä koordinaatistossa sen nopeus on tasan c, oli ongelmallinen. Tähän liittyi kysymys eetteristä, johon mm. Maxwell oli itse uskonut ja joka oli hänelle ilmeisesti tärkein syy kentänmuutosvirran käyttöönottoon. Tämä pelasti myös jatkuvuusyhtälön, mikä oli tietenkin hyvä asia sinänsä. Vuosisadan loppupuolen havainnot tähden näennäisen paikan pienestä siirtymisestä Maan rataliikkeen suuntaan sekä kuuluisa Michelsonin ja Morleyn koe, jolla pyrittiin määrittämään Maan liikenopeus eetterin koordinaatistossa, kuitenkin viittasivat siihen, että valo etenee tyhjössä vakionopeudella havaitsijan koordinaatistosta riippumatta.

Klassisessa Galilei-muunnoksessa koordinaatisto K' liikkuu koordinaatiston K suhteen x-suuntaan vakionopeudella v siten, että koordinaatistojen akselit ovat samansuuntaisia ja origot yhtyvät nollahetkellä. Tällöin muunnos $K \to K'$ on $x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$. Newtonin lait ovat samat molemmissa systeemeissä. Aaltoyhtälö ei ole kuitenkaan ole sama (HT).

Vuonna 1904 *Lorentz* huomasi, että varsin erikoinen koordinaatistomuunnos jätti Maxwellin yhtälöt samoiksi. Asian yksinkertaistamiseksi tarkastellaan homogeenista skalaarimuotoista aaltoyhtälöä, joka kuvaa valon nopeudella (x, y, z)-koordinaatistossa K etenevää aaltoa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{14.1}$$

Olkoon K' toinen koordinaatisto, joka liikkuu tasaisella nopeudella v x-akselin suuntaan. **Lorentzin muunnos** on[1]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) \end{aligned} \tag{14.2}$$

Osittaisderivaatat muuntuvat muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} \tag{14.3}$$

[1]Suhteellisuusteoreetikot käyttävät yleensä yksikköjärjestelmää, jossa $c = 1$. Me emme tee niin.

Sijoitetaan nämä aaltoyhtälöön (HT), jolloin saadaan koordinaatistossa K'

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2} \tag{14.4}$$

eli aalto etenee samalla nopeudella c myös koordinaatistossa K'.

Lorentz ei ilmeisesti ymmärtänyt muunnoksen merkitystä. Ehkä se soti vastoin hänenkin käsitystään eetterin olemassaolosta. Suhteellisuusteorian merkityksen oivalsivat ensimmäisinä *Poincaré* ja *Einstein*. Poincaré oli jo vuonna 1899 esittänyt **suhteellisuusperiaatteen**, jonka mukaan *fysiikan lakien pitää olla samat toistensa suhteen tasaisessa liikkeessä olevissa koordinaatistoissa*. Vuonna 1905 Einstein lisäsi tähän postulaatin, että *valon nopeus tyhjössä on sama kaikissa koordinaatistoissa ja riippumaton valoa lähettävän kappaleen liikkeestä*. Suppeampi suhteellisuusteoria oli syntynyt.

Tarkastellaan Lorentzin muunnosta neliulotteisessa avaruudessa, jonka paikkavektori on $X = (ct, x, y, z)$. Sen koordinaatteja merkitään x^α, missä $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Jatkossa käytetään kreikkalaisia indeksejä osoittamaan neliavaruuden komponentteja ja latinalaisia indeksejä tavallisen kolmiulotteisen kotiavaruuden komponenteille (1,2,3 tai x, y, z). Otetaan lisäksi käyttöön merkinnät $\beta = v/c$ sekä $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-(v/c)^2}$. Kaikilla vektoreilla (nelinopeus, nelivoima, neliliikemäärä jne.) on nyt neljä komponenttia. Esimerkiksi nelinopeus u on

$$u = \frac{dX}{d\tau} \tag{14.5}$$

missä $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ on liikkeessä olevan olion **itseisaika** eli aika mitattuna sen omassa lepokoordinaatistossa.

Sellaiset muunnokset, jotka jättävät **neliömuodon**

$$I = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{14.6}$$

invariantiksi ($I = I'$) koordinaatistomuunnoksessa $K \to K'$, ovat Lorentzin muunnoksia. Tämän voi todeta esimerkiksi sähkömagneettiselle aallolle tilanteessa, jossa koordinaatistojen origot ovat samat hetkellä $t = 0$ ja $t' = 0$. Jos origosta lähtee tuolla hetkellä aalto, $I = 0$ aaltorintaman mukana kummassakin koordinaatistossa.

Lorentz-muunnoksen johtaminen

Esitetään tässä täydellisyyden vuoksi yksi hyvin yleisiin periaatteisiin perustuva tapa johtaa Lorentz-muunnoskaavat (K. ja R. Kurki-Suonio, Vuorovaikuttavat kappaleet). Liikkukoon koordinaatisto K' koordinaatiston K suhteen vakionopeudella $\mathbf{v}$. Havaitsijat O ja O' havaitsevat saman tapahtuman ja määrittävät sen paikan ja hetken: (x, y, z, t) ja (x', y', z', t'). Lisäksi oletetaan, että heillä on yhteinen fysikaalisiin ilmiöihin perustuva standardi, jonka perusteella he käyttävät samoja mittayksiköitä. Etsitään havaintojen välinen yhteys käyttäen neljää yleistä ehtoa.

Ehto 1. Aika ja avaruus ovat homogeenisia ja isotrooppisia. Kahden infinitesimaalisen lähekkäisen tapahtuman siirtymien ja aikavälien välinen muunnos $(\mathbf{dr}, dt) \leftrightarrow (\mathbf{dr}', dt')$ on silloin sama aina ja kaikkialla eli niiden välillä on lineaarinen yhteys. Tästä seuraa, että myös koordinaattien välinen yhteys on lineaarinen:

$$
\begin{aligned}
x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1\\
y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t + e_2\\
z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t + e_3\\
t' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t + e_4
\end{aligned}
$$

missä a_i, b_i, c_i, d_i, e_i ovat vakioita.

Yleisyyttä rajoittamatta voidaan sopia, että koordinaatistojen origot yhtyvät kummankin nollahetkellä. Voidaan myös sopia, että koordinaattiakselit ovat samansuuntaisia ja että K' liikkuu K:n x-akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Tällöin yhtälöryhmä yksinkertaistuu muotoon

$$
\begin{aligned}
x' &= ax + bt\\
y' &= y\\
z' &= z\\
t' &= hx + kt
\end{aligned}
$$

Ehto 2. Koordinaatistojen suhteellinen nopeus on kummankin havaitsijan mielestä sama. Tällöin K':n origossa hetkellä t' sattuva tapahtuma havaitaan K:ssa hetkellä t pisteessä $x = vt$ tapahtuvaksi: $(vt, t) \leftrightarrow (0, t')$. Vaaditun symmetrian mukaan pätee vastaavasti $(0, t) \leftrightarrow (-vt', t')$. Sijoittamalla muunnoskaavoihin saadaan

$$
\begin{aligned}
0 &= avt + bt\\
t' &= hvt + kt\\
-vt' &= bt\\
t' &= kt
\end{aligned}
$$

Muunnos siis pelkistyy muotoon

$$
\begin{aligned}
x' &= k(x - vt)\\
y' &= y\\
z' &= z\\
t' &= k(t - \alpha x)
\end{aligned}
$$

missä $\alpha = h/k$.

Ehto 3. Valon nopeus c on absoluuttinen. Tämä on ratkaiseva ero klassiseen Galilei-muunnokseen verrattuna. Ajatellaan, että yhteisellä nollahetkellä yhteisessä origossa tapahtuu valonvälähdys. Valon saapuminen mielivaltaisessa pisteessä olevaan ilmaisimeen havaitaan hetkillä t ja t'. Tapahtumien vastaavuus on $(x = ct, t) \leftrightarrow (x' = ct', t')$, koska c on sama kummankin havaitsijan mielestä. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} ct' &= k(ct - vt) \\ t' &= k(t - \alpha ct) \end{aligned}$$

ja voidaan ratkaista $\alpha = v/c^2$.

Ehto 4. Käänteismuunnos saadaan symmetrisesti vaihtamalla nopeuden etumerkki eli molempien inertiaalikoordinaatistojen on oltava samassa asemassa (vrt. ehto 2). Tällöin

$$\begin{aligned} x &= k(x' + vt') \\ t &= k(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

Näin voidaan ratkaista $k = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Lorentz-muunnoskaavat ovat siis

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned}$$

14.2 Tensorilaskentaa

Edellä ollut x-akselin suuntainen Lorentzin muunnos voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{14.7}$$

Merkitsemällä kerroinmatriisia Λ:lla tämä voidaan kirjoittaa tensorimuodossa

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{14.8}$$

missä on käytetty Einsteinin summaussääntöä eli toistetun indeksin yli summataan:

$$x'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{14.9}$$

Tässä luvussa käytettävässä tensoriformalismissa indeksien paikka ja järjestys ovat tärkeitä[2]. Toisen kertaluvun tensoreilla indeksien järjestys kertoo, onko kyseessä tensorin matriisiesityksen vaakarivi vai pystyrivi. Vektoria, jolla on yläindeksi, kutsutaan **kontravariantiksi** vektoriksi ja alaindeksillä varustettua vektoria puolestaan **kovariantiksi** vektoriksi. Summaus tapahtuu *aina* ylä- ja alaindeksin välillä. Jos tensorilaskenta muotoillaan ilman ylä- ja alaindeksejä, siitä tulee teknisesti jonkin verran hankalampaa.

Kahdesta kontravariantista vektorista u^μ ja v^ν muodostetaan toisen kertaluvun **tensori** $T^{\mu\nu}$ suorana tulona, jonka komponentit muodostavat matriisin $u^\mu v^\nu$. Tensori $T^{\mu\nu}$ muuntuu siis seuraavasti:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta} \tag{14.10}$$

Muotoillaan määritelmä yleisemmin: jokaista suuretta $T^{\alpha\beta}$, joka muuntuu tällä tavalla Lorentz-muunnoksessa, sanotaan 2. kertaluvun (kontravariantiksi) tensoriksi.

Kahden kontravariantin nelivektorin pistetulo määritellään puolestaan

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta \tag{14.11}$$

missä

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14.12}$$

on **metrinen perustensori**. Se on symmetrinen ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$) ja sillä on käänteismatriisi $g^{\alpha\beta}$ eli $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$, missä $\delta^\alpha{}_\gamma$ on yksikkötensori eli Kroneckerin deltan neliulotteinen vastine, jolle $\delta^\alpha{}_\gamma = 1$, kun $\alpha = \gamma$ ja muulloin $\delta^\alpha{}_\gamma = 0$.

Metrisellä perustensorilla on tärkeä laskutekninen rooli. Koska summaus tapahtuu aina ylä- ja alaindeksin välillä, täytyy esimerkiksi kahden kontravariantin vektorin pistetuloa laskettaessa toinen muuntaa kovariantiksi eli laskea sen indeksi alas, mikä tapahtuu seuraavasti:

$$v^\beta = g^{\alpha\beta} v_\alpha ;\;\; v_\beta = g_{\alpha\beta}\, v^\alpha \tag{14.13}$$

Edellä oleva pistetulo (14.11) on siis

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A_\beta B^\beta = A^\alpha B_\alpha \tag{14.14}$$

[2]Käsin kirjoitettaessa kannattaa "tyhjä" indeksi merkitä vaikka pisteellä: $\Lambda^{\mu\cdot}_{\cdot\nu}$

Samalla tavalla nostetaan ja lasketaan toisen tai korkeamman kertaluvun tensoreiden indeksejä:

$$T_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\omega}T^{\omega\beta} \tag{14.15}$$

Huom. Metrisen perustensorin komponenttien ±-merkit määritellään joko näin tai päinvastoin. Valinnalla ei ole fysikaalista merkitystä, mutta laskettaessa on pidettävä kiinni tehdystä valinnasta. Lisäksi indeksit on syytä kirjoittaa selvästi peräkkäin, etteivät vaaka- ja pystyrivit mene sekaisin.

Invariantti neliömuoto I ennen Lorentzin muunnosta on

$$I = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \tag{14.16}$$

ja Lorentzin muunnoksen jälkeen ($x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$)

$$I' = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta \tag{14.17}$$

Vaatimus $I = I'$ antaa ehdon

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \tag{14.18}$$

tai

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta} \tag{14.19}$$

Vain sellaiset muunnokset, jotka toteuttavat tämän yhtälön, ovat Lorentzin muunnoksia. Yleisessä lineaarisessa muunnoksessa on 16 vapaata parametria ja ehdossa (14.19) on 10 eri yhtälöä, joten Lorentzin muunnoksessa on kuusi vapaata parametria: pusku jokaisen (kolmiavaruuden) koordinaattiakselin suuntaan ja kierto jokaisen akselin ympäri.

Määritetään vielä $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\gamma$. Merkitään $M^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta}\Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma}$ ja kerrotaan puolittain $\Lambda^\mu{}_\alpha$:lla:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha M^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma} = g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma} = \delta^\mu{}_\gamma$$

joten

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta}\Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma} = \Lambda_\gamma{}^\alpha \tag{14.20}$$

HT: laske Λ^{-1} x-akselin suuntaisen Lorentz-muunnoksen tapauksessa.

14.3 Lorentzin muunnokset ja dynamiikka

Vaikka suhteellisuusteorian fysikaalinen perusta onkin elektrodynamiikassa – valon nopeushan on nimenomaan sähkömagneettisen aallon nopeus, Lorentzin muunnokset, ajan venyminen jne. ovat useille tutumpia mekaanisen liikkeen avulla annetuissa esimerkeissä.

Valon nopeus on rajanopeus, jolla vain massaton hiukkanen voi edetä. Sitä ei voi saavuttaa laskemalla yhteen nopeuksia, jotka ovat alle valon nopeuden, eli esimerkiksi tekemällä kaksi Lorentz-muunnosta peräkkäin. Yhtälöt (14.2) kuvaavat muunnosta koordinaatistoon K', joka liikkuu nopeudella v koordinaatiston K suhteen. Liikkukoon sitten koordinaatisto K'' nopeudella v' koordinaatiston K' suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\,(x'-v't') \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\left(t'-\frac{v'}{c^2}\,x'\right) \end{aligned} \tag{14.21}$$

Sijoittamalla tähän systeemin K' (yhdellä pilkulla merkityt) koordinaatit muunnoksen (14.2) mukaisesti saadaan yhdistetty muunnos

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\,(x-wt) \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\left(t-\frac{w}{c^2}\,x\right) \end{aligned} \tag{14.22}$$

missä

$$w = \frac{v+v'}{1+vv'/c^2} \tag{14.23}$$

Tämä on **nopeuksien yhteenlaskukaava**. Olivatpa v ja v' kuinka lähellä valon nopeutta tahansa, niiden summa jää kuitenkin alle valon nopeuden. Tämä on itse asiassa seuraus siitä, että Lorentzin muunnokset muodostavat matemaattisesti ryhmän. Yhdistämällä kaksi muunnosta saadaan uusi Lorentzin muunnos, tässä tapauksessa koordinaatistosta K koordinaatistoon K'', joiden suhteellinen nopeus on w.

Suppea suhteellisuusperiaate voidaan ilmaista sanomalla, että *kaikki Lorentzin muunnosten yhdistämät inertiaalijärjestelmät ovat samanarvoisia kaikkien fysikaalisten tapahtumien kuvailussa.* Tämä jättää kiihtyvät koordinaatistot tarkastelun ulkopuolelle. Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti tavallista massapistemekaniikkaa suhteellisuusperiaatteen valossa.

Kutsutaan massapisteen (hiukkasen) liikerataa neliavaruudessa sen **maailmanviivaksi** ja merkitään sen koordinaatteja x^μ. Differentiaalit dx^μ määrittävät hiukkasen differentiaalisen siirtymän pitkin maailmanviivaa. Muodostetaan sitten Lorentz-invariantti skalaarisuure

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{14.24}$$

joka on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Tarkastellaan nyt hiukkasta koordinaatistossa, jossa se on hetkellisesti levossa. Tällöin

$$dx' = (dx'^0, 0, 0, 0) \tag{14.25}$$

eli tässä koordinaatistossa vain aika kuluu. Nyt

$$ds^2 = g_{00}(dx'^0)^2 = c^2(dt')^2 \tag{14.26}$$

Ajanlaatuinen suure ds/c on invariantti aikaväli hiukkasen hetkellisessä lepokoordinaatistossa eli se on hiukkasen mukana liikkuvan kellon mittaama aikaväli. Määritellään kiinteästä maailmanpisteestä s_A laskettu hiukkasen **ominaisaika** integraalina

$$\tau = \frac{1}{c}\int_{s_A}^{s} ds = \int_{t_A}^{t} dt \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{14.27}$$

Tässä esiintyy kolminopeus $\mathbf{v}$ koordinaatistossa K:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) \tag{14.28}$$

Ominaisajan differentiaalinen muoto on sama kuin luvussa 14.1 mainittu

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = dt \tag{14.29}$$

joka kuvaa ajan venymistä liikkeessä olevassa koordinaatistossa.

Hiukkasen **nelinopeus** u määritellään sen nelipaikan derivaattana ominaisajan suhteen. Sen komponentit ovat

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{14.30}$$

Kolminopeuden avulla ilmaistuna tämä on $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$. Suoralla laskulla nähdään, että nelinopeuden neliö on invariantti:

$$u^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2 \tag{14.31}$$

Vastaavasti määritellään **nelikiihtyvyys**

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \tag{14.32}$$

Nelinopeus on nelivektori, koska x^μ on nelivektori ja $d/d\tau$ on invariantti. Tällöin myös nelikiihtyvyys on nelivektori.

Tarkastellaan sitten Newtonin liikeyhtälöä

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{14.33}$$

missä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ on liikemäärä. Tämä on kuitenkin Galilei-invariantti yhtälö, missä mikään ei rajoita nopeutta alle valon nopeuden. Muodostetaan nelivektoriyhtälö

$$m_0 \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu \tag{14.34}$$

missä m_0 on massanlaatuinen vakiosuure ja K^μ **nelivoima**. Jotta tämä olisi kelvollinen liikeyhtälö pienen nopeuden rajalla (sama asia kuin raja $c \to \infty$), sen avaruusosasta on saatava Newtonin liikeyhtälö. Käyttäen koordinaattiaikaa t kirjoitetaan yhtälön avaruuskomponentit muodossa

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = K^i \sqrt{1-\beta^2} \tag{14.35}$$

Jos ulkoinen voima on nolla, liikemäärä on vakio, joten liikemäärän määritelmäksi tulee

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.36}$$

joka rajalla $\beta \to 0$ vastaa Newtonin mekaniikan liikemäärää. Näin kolmivoiman ja nelivoiman välinen yhteys on

$$F^i = K^i \sqrt{1-\beta^2} \tag{14.37}$$

Liikeyhtälön (14.34) nollannen komponentin määrittämiseksi kirjoitetaan se nelikiihtyvyyden a^μ avulla

$$m_0 a^\mu = K^\mu \tag{14.38}$$

Laskemalla nelikiihtyvyyden ja nelinopeuden pistetulo saadaan

$$g_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \tag{14.39}$$

eli nelikiihtyvyys ja nelinopeus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten myös

$$g_{\mu\nu} K^\mu u^\nu = 0 \tag{14.40}$$

Sijoittamalla tähän nelinopeuden komponentit ($u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$) ja nelivoiman avaruusosa jää jäljelle

$$\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} K^0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{F^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.41}$$

eli

$$K^0 = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.42}$$

Liikeyhtälön nollas komponentti on siis

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{14.43}$$

Hiukkasen liike-energia määritellään Newtonin mekaniikassa siten, että sen aikaderivaatta (teho) on $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Tarkastellaan sitten energianlaatuista suuretta

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.44}$$

Binomisarjan avulla saadaan

$$W = m_0c^2\left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right] \tag{14.45}$$

Epärelativistisella rajalla ($\beta \to 0$) tästä tulee

$$W = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{14.46}$$

eli Newtonin mekaniikan mukainen m_0-massaisen hiukkasen liike-energia ja suure m_0c^2, jota kutsutaan m_0-massaisen hiukkasen **lepoenergiaksi**.

Nyt neliliikemäärä voidaan kirjoittaa muodossa

$$p = \left(\frac{W}{c}, \frac{m_0v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{14.47}$$

tai

$$p^\mu = m_0u^\mu \tag{14.48}$$

Tämän invariantiksi neliöksi saadaan

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = (m_0c)^2 = W^2/c^2 - \mathbf{p}^2 \tag{14.49}$$

Relativistiset liikeyhtälöt voi tiivistää muotoon

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = K^\mu \tag{14.50}$$

Huom. Hiukkasen **massa** on m_0. Sitä kutsutaan joskus lepomassaksi, mutta siihen ei ole mitään syytä, sillä massa m_0 on itseasiassa Lorentz-invariantti suure, joka määrittelee *lepoenergian* kaavalla

$$W_0 = \lim_{v\to 0} W = m_0c^2 \tag{14.51}$$

14.4 Elektrodynamiikan kovariantti formulointi

Tarkastellaan seuraavaksi Lorentzin voiman lauseketta muodossa

$$F^i = q(E^i + \epsilon^i{}_{jk} v^j B^k) \tag{14.52}$$

missä ϵ_{ijk} on permutaatiotensori ja summataan toistettujen indeksien yli (HT: kertaa ϵ_{ijk}:n ominaisuudet). Varaus q oletetaan invariantiksi säilymislain perusteella. Edellä saatiin hiukkasen liikeyhtälö muotoon

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \tag{14.53}$$

missä nelivoiman komponentit ovat

$$K^0 = \frac{\gamma}{c}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \ ; \ K^i = \gamma F^i \tag{14.54}$$

Oletetaan nyt, että kyseisen voiman avaruusosa on juuri Lorentzin voima. Kirjoitetaan liikeyhtälö komponenteittain. Aikakomponentista tulee

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \frac{\gamma}{c}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{\gamma}{c} q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \tag{14.55}$$

eli kentän tekemä työ. Paikkakomponenteista saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dp^1}{d\tau} &= \gamma q\left(E^1 + (v^2B^3 - v^3B^2)\right) = q\left(\frac{E^1}{c}u^0 + u^2B^3 - u^3B^2\right)\\
\frac{dp^2}{d\tau} &= \gamma q\left(E^2 + (v^3B^1 - v^1B^3)\right) = q\left(\frac{E^2}{c}u^0 + u^3B^1 - u^1B^3\right)\\
\frac{dp^3}{d\tau} &= \gamma q\left(E^3 + (v^1B^2 - v^2B^1)\right) = q\left(\frac{E^3}{c}u^0 + u^1B^2 - u^2B^1\right)
\end{aligned} \tag{14.56}$$

Aika- ja paikkakomponentit voidaan koota yhtälöiksi

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qu_\beta F^{\beta\mu} \tag{14.57}$$

missä $(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = (1/c)(E^1, E^2, E^3)$, $(F^{23}, F^{31}, F^{12}) = (B^1, B^2, B^3)$ ja $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Tästä saa suoralla laskulla liikeyhtälön komponentit.

Osoitetaan sitten, että $(F^{\mu\nu})$ on kelvollinen toisen kertaluvun tensori eli että se muuntuu oikein Lorentzin muunnoksissa. Todetaan aluksi, että kovariantin vektorin muunnos on $u'_\beta = \Lambda_\beta{}^\alpha u_\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta u_\alpha$, minkä voi päätellä suoraan muunnoskaavojen avulla. Sen näkee teknisemminkin nostamalla ja laskemalla indeksejä perustensorin avulla: $u'_\beta = g_{\mu\beta}u'^\mu = g_{\mu\beta}\Lambda^\mu{}_\nu u^\nu =$

$g_{\mu\beta}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}g^{\nu\alpha}u_{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}u_{\alpha}$, missä käytettiin lopuksi tulosta 14.20. Muunnettu liikeyhtälö on siis

$$\frac{dp'^{\mu}}{d\tau} = qu'_{\beta}F'^{\,\beta\mu}$$

$$\Leftrightarrow\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{dp^{\nu}}{d\tau} = q\Lambda_{\beta}{}^{\alpha}u_{\alpha}F'^{\,\beta\mu} = q\Lambda^{\mu}{}_{\nu}u_{\alpha}F^{\alpha\nu}$$

$$\Rightarrow\ \Lambda_{\beta}{}^{\alpha}F'^{\,\beta\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu}$$

$$\Leftrightarrow\ (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}F'^{\,\beta\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu}$$

$$\Leftrightarrow\ \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}F'^{\,\beta\mu} = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu}$$

$$\Leftrightarrow\ F'^{\,\gamma\mu} = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu} \tag{14.58}$$

Tensoria $(F^{\mu\nu})$ kutsutaan **sähkömagneettiseksi kenttätensoriksi** ja sen komponentit ovat

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.59}$$

Kirjoitetaan sitten Maxwellin yhtälöt kenttätensorin komponenttien avulla. Määritellään ensin operaattori ∂_{α}: $\partial/\partial x^{\alpha} = (\partial/\partial x^0, \nabla)$. Vastaavasti $\partial^{\alpha} = \partial/\partial x_{\alpha} = (\partial/\partial x_0, -\nabla)$. Indeksien sijoittelu on loogista: ∂_{α} muuntuu kuten kovariantti vektori, koska $\partial/\partial x'^{\alpha} = (\partial x^{\beta}/\partial x'^{\alpha})\partial x^{\beta}$.

Nyt $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \equiv \mu_0 c^2 \rho$ tulee muotoon

$$\partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = \mu_0 c\rho \tag{14.60}$$

Ampèren ja Maxwellin lain kolme komponenttia ovat puolestaan

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{10} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} &= \mu_0 j^1 \\ \partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_3 F^{23} &= \mu_0 j^2 \\ \partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} &= \mu_0 j^3 \end{aligned} \tag{14.61}$$

Ottamalla käyttöön **nelivirta** $J = (j^{\mu}) = (c\rho, \mathbf{J})$ voidaan nämä yhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\mu} \tag{14.62}$$

Nelivirta on nelivektori, joten varaustiheys ρ ja virrantiheys $\mathbf{J}$ muuntuvat samalla tavalla kuin aika t ja paikka $\mathbf{r}$. Homogeeniset yhtälöt ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$) saadaan muotoon (HT)

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{14.63}$$

Koska Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa tensoriyhtälöinä, ne säilyttävät muotonsa Lorentzin muunnoksissa. Näin siis Maxwellin 1860-luvulla kehittämä teoria on osoittautunut ensimmäiseksi suppeamman suhteellisuusteorian kanssa sopusoinnussa olevaksi fysiikan kuvailuksi.

HT: Totea toisen kertaluvun tensoreiden muunnoskaavojen avulla, että suure $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ on invariantti Lorentz-muunnoksessa. Lausu sitten tämä suure kenttien avulla.

14.5 Kenttien muunnokset

Elektrodynamiikan Lorentz-kovarianssi tarkoittaa siis sitä, että Maxwellin yhtälöt ovat samat inertiaalikoordinaatistosta riippumatta. Sitävastoin sähkö- ja magneettikentät riippuvat havaitsijan liiketilasta. Muunnosten täytyy olla sellaiset, että sijoitettaessa muunnetut kentät Maxwellin yhtälöihin tuloksena ovat alkuperäiset yhtälöt. Kaikki tämä on jo edellisen kappaleen formalismin sisällä, mutta johdetaan tässä vielä kenttien muunnoskaavat.

Valitaan koordinaattiakselit siten, että koordinaatistojen välinen suhteellinen nopeus $\mathbf{v}$ on x-akselin suuntainen. Muunnosmatriisi on tällöin

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.64}$$

Muuntumaton sähkökentän 1-komponentti on $F^{01} = E^1/c$, mikä nähdään laskemalla $F'^{\,01}$:

$$\begin{aligned} F'^{\,01} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_0 F^{00} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0 F^{10} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1 F^{11} \\ &= \gamma^2 \frac{1}{c} E^1 + \beta^2\gamma^2(-\frac{1}{c}E^1) \quad \Rightarrow \quad E'^1 = E^1 \end{aligned} \tag{14.65}$$

Siis puskun suuntainen sähkökenttä säilyy ennallaan. Lasketaan seuraavaksi $F^{02} = E^2/c$:n muunnos:

$$\begin{aligned} F'^{\,02} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^2{}_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^0{}_0\Lambda^2{}_0 F^{02} + \Lambda^0{}_0\Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_1\Lambda^2{}_2 F^{12} \\ &= \gamma \frac{1}{c} E^2 - \beta\gamma B^3 \quad \Rightarrow \quad E'^2 = \gamma E^2 - \gamma v B^3 \end{aligned} \tag{14.66}$$

Vastaavat laskut komponentille E^3 ja magneettikentän komponenteille antavat muunnoskaavat

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}',t') = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r},t) \quad &; \quad \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}',t') = \gamma(\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) \\
\mathbf{B}'_{\parallel}(\mathbf{r}',t') = \mathbf{B}_{\parallel}(\mathbf{r},t) \quad &; \quad \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}',t') = \gamma(\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))
\end{aligned}
\tag{14.67}
$$

missä $\parallel$ ja $\perp$ viittaavat $\mathbf{v}$:n suuntaisiin ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin.

Esimerkki. Liikkuvan varauksen kenttä

Käsitellään luvun 13.2.1 esimerkki suhteellisuusteorian keinoin. Pistevaraus liikkuu nopeudella v x-akselia pitkin pilkuttomassa tarkkailijan koordinaatistossa, jossa halutaan määrittää kentät. Olkoon pilkullinen koordinaatisto sellainen, että se liikkuu varauksen mukana ja sen origo olkoon varauksen kohdalla. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}' &= 0 \\
\mathbf{E}' &= \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 (r')^3}
\end{aligned}
\tag{14.68}
$$

Käytetään edellä johdettuja muunnoskaavoja (käänteisesti!):

$$
\begin{aligned}
E_x = E_{\parallel} = E'_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 (r')^3} \\
\mathbf{E}_{\perp} = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\gamma q\mathbf{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 (r')^3}
\end{aligned}
\tag{14.69}
$$

Vektorin $\mathbf{r}'$ komponentit ovat

$$
\mathbf{r}' = (\gamma(x-vt), y, z) \tag{14.70}
$$

Määritellään suure

$$
\gamma\mathbf{R}^* = (\gamma(x-vt), y, z) \tag{14.71}
$$

jolloin sähkökentän komponentit ovat

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x-vt)}{\gamma^3(R^*)^3} \\
E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma y}{\gamma^3(R^*)^3} \\
E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z}{\gamma^3(R^*)^3}
\end{aligned}
\tag{14.72}
$$

eli koottuna vektoriksi

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3}(1-\beta^2) \tag{14.73}$$

missä $\mathbf{R} = (x - vt, y, z)$. Tämä on luvusta 13.2.1 tuttu tulos.

Magneettikentäksi tulee puolestaan

$$\begin{aligned} B_x &= B_\| = 0 \\ \mathbf{B}_\perp &= \gamma\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}' = \gamma\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_\perp = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp \end{aligned} \tag{14.74}$$

eli

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E} \tag{14.75}$$

14.6 Potentiaalien muunnokset

Homogeeniset Maxwellin yhtälöt ovat luvussa 14.4 opitun mukaan

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{14.76}$$

Nämä yhtälöt ovat välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että on olemassa **nelipotentiaali** A_μ, jolle

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \tag{14.77}$$

Suoralla laskulla nähdään, että näin esitetty $F_{\mu\nu}$ toteuttaa homogeeniset Maxwellin yhtälöt eli välttämättömyysehto on voimassa. Riittävyysehdon todistaminen sivuutetaan (ks. CL).

Nostamalla indeksit saadaan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{14.78}$$

Muistamalla kenttätensorin määritelmä ja kenttien esitys potentiaalien avulla saadaan nelipotentiaali

$$(A^\mu) = (\varphi/c, \mathbf{A}) \tag{14.79}$$

joka toteuttaa aaltoyhtälön

$$\partial_\gamma\partial^\gamma A^\nu - \partial^\nu(\partial_\alpha A^\alpha) = \mu_0 j^\nu \tag{14.80}$$

Valitsemalla Lorenzin mittaehto ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$) tämä palautuu tutuksi aaltoyhtälöksi.

Todetaan lopuksi, että nelipotentiaali yleensä ajatellaan nelivektoriksi. Tämä on oikeutettua, vaikkakaan ei välttämätöntä. Voidaan osoittaa, että nelipotentiaali muuntuu mittamuunnosta vaille nelivektorina (ks. CL).

14.7 Säilymislait

Luvussa 9 esitettiin energian, liikemäärän ja impulssimomentin säilymislait kolmiavaruuden Maxwellin jännitystensorin avulla. Esitetään nämä säilymislait nyt kovariantissa muodossa.

Lorentzin voimatiheys on

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{14.81}$$

Olkoon $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f^1 &= \rho E^1 + j^2 B^3 - j^3 B^2 \\ &= c\rho F^{01} + j^2 F^{12} - j^3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} - j_2 F^{12} + j_3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} + j_2 F^{21} + j_3 F^{31} \end{aligned} \tag{14.82}$$

sillä $(j^0, j^1, j^2, j^3) = (j_0, -j_1, -j_2, -j_3)$. Koska $F^{\alpha\alpha} = 0$, niin

$$f^i = j_\alpha F^{\alpha i} \tag{14.83}$$

Lorentzin voimatiheys on siten nelivektorin $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$ avaruusosa. 0-komponentti on puolestaan

$$f^0 = j_\alpha F^{\alpha 0} = -F^{0\alpha} j_\alpha = \frac{1}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \tag{14.84}$$

eli tehohäviö tilavuusyksikössä. Koska

$$j_\alpha = g_{\alpha\beta} j^\beta = \frac{1}{\mu_0} g_{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\beta\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F_\alpha{}^\nu \tag{14.85}$$

voidaan nelivoima kirjoittaa muodossa

$$f^\mu = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha{}^\nu) F^{\alpha\mu} \tag{14.86}$$

Määritellään (jälkiviisaasti) symmetrinen tensori $(T^{\nu\mu})$

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} [F_\alpha{}^\nu F^{\alpha\mu} - \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] = T^{\mu\nu} \tag{14.87}$$

Nyt pieni indeksijumppa antaa tuloksen

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha{}^\nu) F^{\alpha\mu} = f^\mu \tag{14.88}$$

$(T^{\mu\nu})$ on siis sellainen tensori, jonka divergenssi antaa Lorentzin nelivoimatiheyden. Tensori on Maxwellin jännitystensorin yleistys neliavaruudessa.

Tämän toteamiseksi lasketaan tensorin komponentit. Tensorin määritelmässä on mukana invariantti $-(1/4)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = (1/2)((E/c)^2 - B^2)$, joka tulee mukaan diagonaalisiin termeihin. Nyt

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0}\left[F_\alpha{}^0 F^{\alpha_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}E^2 - B^2\right)\right] = -\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) \tag{14.89}$$

eli kentän energiatiheys $w_{em} = -T^{00}$.

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0}F_\alpha{}^0 F^{\alpha i} = \ldots (HT) \ldots = -\frac{1}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})^i = -\frac{1}{c}S^i \tag{14.90}$$

ovat puolestaan Poyntingin vektorin komponentit. Pelkästään avaruusosia sisältävät komponentit ovat

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \frac{1}{\mu_0}\left[F_\alpha{}^k F^{\alpha_l} + g^{kl}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}E^2 - B^2\right)\right] \\ &= \epsilon_0 E^k E^l + g^{kl}\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}B^k B^l + g^{kl}\frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= T_e^{kl} + T_m^{kl} \end{aligned} \tag{14.91}$$

eli luvussa 9 johdetun Maxwellin jännitystensorin $\mathcal{T}$ sähköiset ja magneettiset komponentit. Tensori $T^{\alpha\beta}$ on Maxwellin jännistystensorin laajennus, koska sen 0α-komponentit antavat suoraan sekä sähkömagneettisen energiatiheyden että Poyntingin vektorin.

Tuloksista $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$ ja $f^\mu = \partial_\beta T^{\beta\mu}$ saadaan yhtälö

$$\partial_\beta T^{\beta\mu} = j_\alpha F^{\alpha\mu} \tag{14.92}$$

Tämän nollas komponentti $\partial_\beta T^{\beta 0} = j_\alpha F^{\alpha 0}$ antaa

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \tag{14.93}$$

eli differentiaalisen energian säilymislain (Poyntingin teoreeman). Avaruuskomponentit $\partial_\beta T^{\beta i} = j_\alpha F^{\alpha i}$ puolestaan antavat liikemäärän säilymislain

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B})^l + \partial_k(T_e^{kl} + T_m^{kl}) = \rho E^l + (\mathbf{J}\times\mathbf{B})^l \tag{14.94}$$

Olemme siis onnistuneet kirjoittamaan olennaisesti koko klassisen mikroskooppisen elektrodynamiikan kovariantissa muodossa, kun väliaineeksi oletetaan tyhjö.

Luvussa 13 käsitelty liikkuvan varauksen säteily voidaan esittää hieman tyylikkäämmin tässä luvussa käsitellyssä formalismissa. Asiasta kiinnostuneita kehotetaan tutustumaan CL:n lukuun 13 tai Jacksonin säteilyteoriaa käsitteleviin lukuihin.