Elektrodynamiikka, kevät 2004
Harjoitus 9 (to 1.4., pe 2.4.)

1. Lineaarisesti polarisoitunut valo kulkee näytteen läpi, jossa oikeakätisesti ympyräpolarisoitunut komponentti jää vasenkätisesti polarisoituneesta jälkeen vaihe-eron a) $\pi/2$, b) π. Millainen valo tulee ulos näytteestä?

2. Olkoon puoliavaruus $z > 0$ ilmaa ja toinen puoliavaruus $z < 0$ maata, jonka permeabiliteetti on μ_0 ja jonka johtavuus σ on vakio. Oletetaan, että maan pinnalla kenttä on aikaharmoninen: $\mathbf{B}(z = 0, t) = B_0 e^{-i\omega t}\mathbf{e}_x$ (B_0 vakio, $\omega > 0$, $\omega\epsilon_0/\sigma << 1$). Laske magneetti- ja sähkökenttä maan sisällä. Ohje: johda ensin magneettikentälle diffuusioyhtälö.

3. Esitetään sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ja sähkövuon tiheys $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ Fourier-integraaleina

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

ja vastaavasti $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$.
a) Jos permittiivisyys riippuu taajuudesta, niin $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. Mikä on tällöin $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$:n ja $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:n välinen yhteys?
b) Druden ja Lorentzin mallin mukaisessa yksinkertaisessa tilanteessa

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 (1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma})$$

missä $\gamma > 0$, ω_0 ja ω_p ovat vakioita. Osoita, että a-kohdassa johdettu riippuvuus on kausaalinen eli että $\mathbf{D}$ hetkellä t riippuu vain aiemmista (ja samanhetkisistä) $\mathbf{E}$:n arvoista. Samalla tulee kerrattua residyintegrointia.

4. Oletetaan, että ψ toteuttaa Helmholtzin skalaariyhtälön $\nabla^2\psi + (\omega/c)^2\psi = 0$. Osoita, että $\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla\psi$ toteuttaa Helmholtzin vektoriyhtälön eli $\nabla^2\mathbf{E} + (\omega/c)^2\mathbf{E} = 0$.

Ratkaisut on palautettava viimeistään tiistaina 30.3. klo 14.