Luku 1

Johdanto

It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.

R. P. Feynman

1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on kuuden opintoviikon paketti elektrodynamiikkaa, joka voidaan sisällyttää joko fysiikan laudatur-oppimäärään tai teoreettisen fysiikan cum laude-oppimäärään. Muutamana viime vuonna nämä aikanaan erilliset kurssit on luennoitu yhdessä. Kahden lähestymistavoiltaan erilaisen kurssin yhdistäminen ei ole ollut aivan helppo asia osin erilaisen oppimateriaalin, mutta myös opiskelijoiden erilaisen taustan ja mielenkiinnon kohteiden vuoksi.

Tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaan tulevissa tilanteissa olivatpa ne sitten teoreettisia tai käytännönläheisiä. Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtämisen voi edellyttää kuuluvan jokaisen fyysikon yleissivistykseen. Se on opiskelijalle ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä on ratkaiseva osa. Toisaalta sähkömagnetismi on keskeisessä osassa niin kaikkialla fysiikassa kuin arkipäivässäkin. Tämän parempaa syytä elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Kevään 2003 kurssin rakenne seuraa pääosin Cronströmin ja Lippaan oppikirjaa *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan* (jatkossa viite CL). Tavoitteena on saada sähkö- ja magnetostatiikka sekä induktiolaki käsiteltyä ensimmäisen puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää pääasiassa dynaamisia ilmiöitä, jolloin samalla mennään syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön.

Kurssin **lähtötasoksi sähköopin osalta oletetaan fysiikan peruskurssien hallinta**. Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa ovat Kaarle ja Riitta Kurki-Suonion oppikirjat *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet* (KSII) ja *Aaltoliikkeestä dualismiin* (KSIII). Joillakin opiskelijoilla saattaa olla taustalla peruskurssin sijasta fysiikan approbatur, mikä tietenkin hyvin opiskeltuna riittää sekin.

Yksi elektrodynamiikan opiskelun vaikeuksista on varsin vaativien matemaattisten apuneuvojen tarve. Tällä kurssilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MAPU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Myös FYMM II olisi hyödyllinen, mutta koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat suorittavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä, tätä ei varsinaisesti edellytetä. **FYMM II:n opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on kuitenkin erittäin suositeltavaa**. Tärkeimpiä matemaattisia apuneuvoja kerrataan kurssin laskuharjoituksissa.

Laskuharjoitustehtävien ratkaiseminen on olennainen osa oppimista. Vaikeimpien ongelmien kohdalla ryhmätyö on erittäin suositeltavaa, kuten myös kirjallisuuden käyttö. Physicumin kirjasto tarjoaa loistavat mahdollisuudet tähän. On myös täysin luvallista kysyä vihjeitä luennoitsijalta ja assistenteilta.

1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti formaalisesti nykyasunsa vuonna 1864, kun *James Clerk Maxwell* julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan "Treatise on Electricity and Magnetism". Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen teoreettinen rakennelmansa perustui aiempien fyysikoiden töille, joista mainittakoon 1700-luvulta vaikkapa *Cavendish, Coulomb, Franklin, Galvani, Gauss* ja *Volta* sekä aiemmalta 1800-luvulta *Ampère, Arago, Biot, Faraday, Henry, Savart* ja *Ørsted*.

Tärkeimpiä Maxwellin teorian ennustuksia oli valon nopeudella etenevä sähkömagneettinen aaltoliike, jonka *Heinrich Hertz* onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suureen murroskauteen. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksia olivat esimerkiksi liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri tällaisia ongelmia selittämään *Albert Einstein* kehitti suppeamman suhteellisuusteoriansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian perusteet voikin olla havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria ja Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korrektisti muotoilluksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi myös kvanttifysiikan kehitys. Se aiheutti paljon enemmän elektrodynamiikkaan liittyviä ongelmia, sillä ensinnäkään ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi riittävän yleinen myös mikromaailmaan vietynä. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset muotoilut, kuten Schrödingerin yhtälö, ovat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennen kuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan **kvanttielektrodynamiikaksi** (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat *Julian Schwinger*, *Richard Feynman*, *Sin-itiro Tomonaga* ja *Freeman Dyson*. Nykyään elektrodynamiikka QED:n klassisena rajana on osa menestyksekästä **standardimallia**, jonka uskotaan olevan oikea tapa yhdistää sähköinen, heikko ja vahva perusvoima keskenään. Niinpä klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on perusta paljon pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle!

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka on tullut osaksi kvanttimaailman ihmeellisyyttä, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä aina ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Se on keskeistä materiaalifysiikassa, hiukkassuihkujen fysiikassa, röntgenfysiikassa, elektroniikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Niinpä klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta myös menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Seuraavat tehtävät voidaan määritellä elektrodynamiikan perusongelmiksi:

1. Varausten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän määrittäminen.

2. Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.

3. Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.

4. Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.

5. Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useimmat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päätyen **Maxwellin yhtälöihin** ikäänkuin

olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei ole aivan totta enää tämän kurssin tapauksessa, vaan käytännössä kaikki ovat jo tutustuneet ainakin päällisin puolin Maxwellin yhtälöihin ja tietävät yhtä ja toista elektrodynamiikan rakenteesta. Niinpä voimme jo kurssin aluksi hieman pohtia, mistä elektrodynamiikassa on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt "tyhjömuodossaan":

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

Sähkökentän $\mathbf{E}$ ja magneettikentän (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden) $\mathbf{B}$ aiheuttajina ovat sähkövaraukset ρ ja sähkövirrat $\mathbf{J}$. Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein kenttien $\mathbf{D}$ ja $\mathbf{H}$ avulla, mihin palataan myöhemmin.

Yllä ϵ_0 on tyhjön sähköinen permittiivisyys ja μ_0 on tyhjön magneettinen permeabiliteetti. Näiden ja valon nopeuden c välillä on yhteys $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. Koska valon nopeus tyhjössä on vakio, sille annetaan nykyään **tarkka** arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Koska sekunti määritellään tietyn Ce-133 siirtymäviivan avulla, tulee metristä johdannaissuure, joka on aika tarkkaan samanmittainen kuin Pariisissa säilytettävä platinatanko. Myös μ_0 määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

joten tyhjön permittiivisyydelle jää myös tarkka arvo $\epsilon_0 = (c^2\mu_0)^{-1}$, jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvaan varaukseen q vaikuttaa **Lorentzin voima**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.5}$$

Tämä on suureen määrään kokeita perustuva **empiirinen laki**, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä perustavammasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan "nähdä", ne ovat fysikaalisia olioita. Niillä on energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mikroskooppisessa kuvailussa QED:n tasolla sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Tähän ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratoriokokeissa, mikä käy ilmi seuraavista esimerkeistä (HT: tarkasta lukuarvot peruskurssien tietojen avulla):

Esim. 1. Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on $\langle \mathbf{E} \rangle_{rms} \approx 50$ V/m. Tämä merkitsee 10^{15} näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.

Esim. 2. Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Tällaisen fotonin liikemäärä on $2,2 \cdot 10^{-34}$ Ns. Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.

Esim. 3. Varausten diskreettisyyttä ei myöskään tarvitse yleensä huomioida. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan 10^{15} alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljetukseen tarvitaan $6,2 \cdot 10^{12}$ varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman $1/r^2$-etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin päätellä, että riippuvuus on ainakin lähes tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa $1/r^{2+\varepsilon}$, voidaan mittauksilla etsiä rajoja ε:lle. *Cavendish* päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen $|\varepsilon| \leq 0,02$. Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ ja nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen $|\varepsilon| \leq (2,7 \pm 3,1) \cdot 10^{-16}$.

Teoreettisesti voi perustella, että $1/r^2$-etäisyysriippuvuus on yhtäpitävää fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin Cavendishin menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa $1,6 \cdot 10^{-50}$ kg. Geomagneettisilla mittauksilla yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi: $m_\gamma < 4 \cdot 10^{-51}$ kg. Fotonin massattomuus ja sähköisen voiman $1/r^2$-etäisyysriippuvuus ovat erittäin hyvin todennettuja **kokeellisia** tosiasioita. Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin kävi selväksi, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

1.4 Kirjallisuutta

- Cronström, C., ja P. Lipas, Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan, Limes ry., 2000.

  Uudistettu laitos TFO:n monivuotisesta luentomonisteesta. Kurssin varsinainen oppikirja, jota ei kuitenkaan seurata orjallisesti.

- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, The Feynman lectures on physics, vol. II, Addison-Wesley, 1964.

  Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa sisältäen erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua ilman hankalaa laskennallista pyörittelyä.

- Kurki-Suonio, K ja R., Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet ja Aaltoliikkestä dualismiin, Limes ry., useita painoksia.

  Erittäin fysikaalista tekstiä selvällä suomen kielellä. Tukee erityisen hyvin sähkö- ja magnetostatiikkaa ja aaltoliikkeen perusteita.

- Jackson, J. D., Classical electrodynamics, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.

  Klassisen elektrodynamiikan piplia. Harjoitustehtävät ovat varmasti riittävän vaativia. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.

- Griffiths, D. J., Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 1999.

  Suosittu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.

- Reitz, J. R., F. J. Milford, and R. W. Christy, Foundation of Electromagnetic Theory, 4th edition, Addison-Wesley, 1993.

  Kurssilla aiemmin käytetty oppikirja. Jonkin verran täältä peräisin olevaa aineistoa on edelleen mukana.

- Lindell, I. ja A. Sihvola, Sähkömagneettinen kenttäteoria. 1. Staattiset kentät, Otatieto, 1999. Sihvola, A. ja I. Lindell, Sähkömagneettinen kenttäteoria. 2. Dynaamiset kentät, Otatieto, 2000. Sihvola, A., Sähkömagneettisen kenttäteorian harjoituskirja, Otatieto, 2001.

  Yliopiston elektrodynamiikkaa vastaava kokonaisuus TKK:lla. Hieman erilainen lähestymistapa, mutta tutustumisen arvoinen.

- Lindell, I., Sähkötekniikan historia, Otatieto, 1994.

  Sähkömagnetismin historiaa ammoisista ajoista 1900-luvun alkuun.