# Luku 2

# Staattinen sähkökenttä

Tässä luvussa tutustutaan sähkövarausten aiheuttamaan staattiseen sähkökenttään. Materiaali on periaatteessa tuttua fysiikan peruskurssilta, mutta laskennallinen käsittely on huomattavasti järeämpää. Kannattaa olla kärsivällinen, sillä hyvin opitun sähköstatiikan jälkeen magnetostatiikka on "helppoa".

## 2.1 Sähkövaraus ja Coulombin laki

Maailmankaikkeudessa on tietty määrä positiivisia ja negatiivisia sähkövarauksia. Nykytietämyksen mukaan niitä ei voida hävittää eikä luoda. Minkään suljetun systeemin varausten määrä ei siis voi muuttua. Käytännössä useimmat systeemit ovat neutraaleja, eli niissä on yhtä paljon positiivisia ja negatiivisia varauksia. Makroskooppisen kokonaisuuden varauksella tarkoitetaan yleensä sen nettovarausta, joka on poikkeama varausneutraalisuudesta. Nettovaraus säilyy, ellei systeemi ole vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa.

1700-luvun lopulla oli opittu, että varauksia on vain kahta lajia, joita nykyisin kutsutaan positiivisiksi ja negatiivisiksi. *Charles Augustin de Coulomb* muotoili kokeisiinsa perustuen lain:

- Kaksi pistevarausta vaikuttavat toisiinsa voimilla, joiden suunta on niitä yhdistävän suoran suuntainen ja kääntäen verrannollinen varausten välisen etäisyyden neliöön.

- Voimat ovat verrannollisia varausten tuloon siten, että samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa.

**Coulombin laki** nykyaikaisin merkinnöin kertoo, että varaus $q_2$ vaikuttaa varaukseen $q_1$ **sähköstaattisella** voimalla

$$\mathbf{F}_1 = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \tag{2.1}$$

missä $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ on varauksesta $q_2$ varaukseen $q_1$ osoittava vektori. Sähköstaattinen vuorovaikutus noudattaa voiman ja vastavoiman lakia. Jos varaukset liikkuvat, tilanne muuttuu ratkaisevasti, mutta siihen palataan myöhemmin. Jos varauksia on useita, varaukseen $q_i$ vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_i = k\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij} \tag{2.2}$$

mikä ilmaisee voimien kokeellisesti oikeaksi todetun yhteenlaskuperiaatteen.

Coulombin laki edellyttää vuorovaikutuksen välittymistä äärettömän nopeasti koko avaruuteen. Tämä on tietysti approksimaatio, koska mikään tieto ei leviä suuremmalla kuin valon nopeudella. Toisaalta valon nopeuden suuren arvon vuoksi staattisuus on aivan kelvollinen oletus monissa käytännön tilanteissa.

Verrannollisuuskerroin $k$ riippuu käytetystä yksikköjärjestelmästä. Sähköopissa käytetään yhä usein cgs-yksiköitä (Gaussin yksiköitä), joissa $k = 1$. Tällöin varauksen yksikkö määritellään siten, että se aiheuttaa 1 cm etäisyydellä 1 dynen voiman (1 dyn = $10^{-5}$ N) toiseen yksikkövaraukseen. Me käytämme "virallisempia" SI-yksiköitä eli MKSA-järjestelmää, jossa

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{2.3}$$

missä $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m on **tyhjön permittiivisyys**. Täten kertoimen numeroarvo on $k \approx 8,9874 \cdot 10^9$ $\mathrm{Nm^2C^{-2}}$ (muistisääntö: $9 \cdot 10^9$ SI-yksikköä). Näissä yksiköissä sähkövirta on perussuure. Palaamme siihen tuonnempana, mutta todettakoon tässä, että virran SI-yksikkö on ampeeri (A) ja varauksen yksikkö coulombi (C = As). $\epsilon_0$:n yksikkö on faradi/metri ($\mathrm{F/m} = \mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$).

Coulombin laki perustuu kokeellisiin havaintoihin ja voisi siten olla esimerkiksi $r^{-2}$-riippuvuuden osalta vain likimääräinen tulos. Modernin fysiikan teoreettiset perusteet ja erittäin tarkat mittaukset viittaavat siihen, että $r^{-2}$-riippuvuus on täsmällinen luonnonlaki. Myös painovoima riippuu etäisyydestä kuten $r^{-2}$, mutta on olemassa vain yhdenmerkkistä gravitaatiota. Lisäksi se on paljon sähköstaattista voimaa heikompi (HT: vertaa kahden elektronin välistä sähköstaattista ja gravitaatiovuorovaikutusta.).

Tarkastellaan sitten varausta itseään. Mitattavissa oleva varaus on kvantittunut yhden elektronin varauksen suuruisiin kvantteihin. Makroskooppisessa mielessä alkeisvaraus on erittäin pieni ($e \approx 1,6019 \cdot 10^{-19}$ C). Kvarkeilla on $\pm 1/3$ ja $\pm 2/3$ $e$:n suuruisia varauksia, mutta ne näyttävät olevan aina

sidottuja toisiinsa siten, että kaikkien alkeishiukkasten varaukset ovat $\pm e$:n monikertoja ja elektronin varaus on siten pienin luonnossa vapaana oleva varaus.

Yksikkövarauksen pienuudesta johtuen makroskooppinen **varausjakautuma** muodostuu yleensä suuresta joukosta alkeisvarauksia ja varaustiheyden käsite on hyödyllinen. Kolmiulotteisen avaruuden **varaustiheys** määritellään

$$\rho = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\triangle q}{\triangle V} \tag{2.4}$$

ja **pintavaraustiheys** vastaavasti

$$\sigma = \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle q}{\triangle S} \tag{2.5}$$

missä $V$ on tarkasteltava tiheys ja $S$ tarkasteltava pinta. Jos tilavuudessa $V$ on varausjakautuma $\rho$ ja $V$:tä rajoittavalla pinnalla $S$ pintavarausjakautuma $\sigma$, niin pisteessä $\mathbf{r}$ olevaan varaukseen $q$ vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}')\, dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}')\, dS' \tag{2.6}$$

## 2.2 Sähkökenttä

Sähköstaattinen vuorovaikutus ajatellaan kaksivaiheiseksi: staattinen systeemi aiheuttaa kentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, joka vaikuttaa pisteessä $\mathbf{r}$ olevaan varaukselliseen hiukkaseen (varaus $q$) voimalla

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{2.7}$$

joka voidaan mitata. Sähköstatiikalle tyypillinen kokeellinen ongelma on se, että kenttään tuodaan tällöin "ylimääräinen" varattu kappale. Se voi vaikuttaa huomattavasti siihen varausjakaumaan, joka aiheuttaa kentän: kappaleet polarisoituvat. Tämän vuoksi useat oppikirjat puhuvat "pienistä testivarauksista", jotka eivät vaikuta kentän aiheuttajaan. Sähkökentän voimakkuuden määritelmä ei kuitenkaan välttämättä edellytä testivarauksen käsitettä. (HT: Kuinka painovoima eroaa tässä suhteessa sähköstaattisesta voimasta?)

Yksittäisten varausten ja varausjakautumien yhteenlaskettu sähkökenttä on voimien yhteenlaskuperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}')\, dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}')\, dS' \end{aligned} \tag{2.8}$$

Periaatteessa sähkökenttä voidaan siis määrittää laskemalla kaikkien varausjakautumien ja yksittäisten hiukkasten aiheuttamat kentät. Käytännössä tämä on usein täysin ylivoimainen tehtävä. Myöskään mielikuvan luominen sähkökentästä ei ole aivan yksinkertaista. *Faraday* otti käyttöön **kenttäviivan käsitteen**. Vektorikentän kenttäviiva on matemaattinen käyrä, joka on jokaisessa pisteessä kyseisen vektorin suuntainen. Se on oikein käytettynä hyödyllinen apuväline, mutta se on turvallisinta ymmärtää vain keinoksi havainnollistaa sähkökenttää, joka on varsinainen fysikaalinen suure.

## 2.3 Sähköstaattinen potentiaali

Vektorianalyysin alkeistiedoilla osaamme todistaa, että

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = 0 \tag{2.9}$$

eli staattisen sähkökentän roottori häviää:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{2.10}$$

ja sähkökenttä voidaan esittää **sähköstaattisen potentiaalin** $\varphi$ avulla:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \tag{2.11}$$

Pisteessä $\mathbf{r}_1$ sijaitsevan hiukkasen aiheuttama potentiaali on siten

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \tag{2.12}$$

kun sovitaan, että äärettömyydessä potentiaali häviää. Vastaavasti mielivaltaiselle varausjoukolle

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS'\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sähköstaattinen kenttä on esimerkki **konservatiivisesta** voimakentästä. Se merkitsee sitä, että **potentiaalienergia** $U$ eli voiman $\mathbf{F}$ viivaintegraali annetusta vertailupisteestä $ref$ tarkastelupisteeseen $\mathbf{r}$

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{ref}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \tag{2.14}$$

on riippumaton integrointitiestä. Koska itse fysikaalinen suure sähkökenttä riippuu vain potentiaalin derivaatasta, potentiaalin nollakohdan voi valita mieleisekseen. Asettamalla $\varphi(ref) = 0$ saadaan $U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r})$.

Potentiaalin käsitteestä on suurta hyötyä erilaisissa sähkökenttään liittyvissä ongelmissa. Tämä johtuu osaksi siitä, että sähkökentän integroiminen varausjakautumista on monimutkaisempi tehtävä kuin yksinkertaisemman potentiaalin laskeminen. Potentiaali on vielä derivoitava, mutta se on helpompaa kuin integrointi. Käytännöllisempi syy potentiaalien käyttökelpoisuudelle on se, että matematiikan potentiaaliteoria tarjoaa koko joukon hyödyllisiä apuneuvoja.

SI-järjestelmässä voiman yksikkö on newton (N) ja varauksen yksikkö on coulombi (C), joten sähkökentän yksikkö on N/C. Energian yksikkö on puolestaan joule (J = Nm) eli sähköstaattisen potentiaalin yksikkö on siten J/C. Sähköopissa potentiaalin yksikköä kutsutaan voltiksi (V = J/C) ja sähkökentän yksikkö ilmaistaan yleensä muodossa V/m.

## 2.4 Gaussin laki

### 2.4.1 Maxwellin ensimmäinen yhtälö

Tarkastellaan origossa olevan pistevarauksen $q$ kenttää

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.15}$$

Olkoon $V$ jokin tilavuus varauksen ympärillä ja $S$ sen reuna. Integroidaan sähkökentän normaalikomponentti reunan yli

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS \tag{2.16}$$

Nyt $(\mathbf{r}/r)\cdot\mathbf{n}\,dS$ on $dS$:n projektio $\mathbf{r}$:ää vastaan kohtisuoralle tasolle ja tämä pinta-ala jaettuna $r^2$:lla on avaruuskulma-alkio $d\Omega$, joka pallokoordinaatistossa on $\sin\theta\,d\theta\,d\phi$. Valitaan $V$:n sisäpuolelta origokeskinen pallonmuotoinen alue, jonka reuna on $S'$. Infinitesimaalinen pinta-alkio $dS'$ kattaa yhtä suuren avaruuskulman $d\Omega$ kuin elementti $dS$, joten

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{r'^3}\,dS' = \oint_{S'} d\Omega = 4\pi \tag{2.17}$$

mistä seuraa

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = q/\epsilon_0 \tag{2.18}$$

Jos varaus on tilavuuden $V$ ulkopuolella, se ei vaikuta pintaintegraaliin. Tämän näkee tarkastelemalla varauksen kohdalta kohti tilavuutta $V$ avautuvaa avaruuskulmaelementin $d\Omega$ suuruista kartiota. Tämä kartio läpäisee tilavuuden $V$ sekä sisään- että ulospäin ja pinta-alkioiden integraalit summautuvat nollaan (piirrä kuva).

Tulos yleistyy $N$:n varauksen parvelle:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \tag{2.19}$$

Jos suurta varausjoukkoa tarkastellaan varausjakautumana, voidaan $\rho\, dV$ ajatella alkioksi, joka tuottaa osuuden $\rho\, dV/\epsilon_0$ eli integroituna tilavuuden $V$ yli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV \tag{2.20}$$

mikä on peruskurssilta tuttu **Gaussin laki** integraalimuodossa.

Vektorianalyysin **divergenssiteoreeman** eli **Gaussin lauseen** mukaan riittävän siistille vektorikentälle $\mathbf{u}$ pätee

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u}\, dV \tag{2.21}$$

missä $\mathbf{n}$ on tilavuutta $V$ ympäröivän pinnan $S$ ulkonormaalivektori. Sovelletaan tätä Gaussin lain vasemmalle puolelle, jolloin

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dV \tag{2.22}$$

Tämän täytyy olla riippumaton tilavuuden $V$ valinnasta, eli

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.23}$$

ja olemme saaneet Gaussin lain differentiaalimuodossa, joka on Maxwellin ensimmäinen yhtälö.

### 2.4.2 Gaussin lain soveltamisesta

#### Pallosymmetrinen varausjakautuma

Pallosymmetrisessä tapauksessa varaustiheys on muotoa $\rho = \rho(r)$, jolloin sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan etäisyydestä origosta: $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, mikä on helppo päätellä suoraan Coulombin laista. Tarkastellaan Gaussin lakia pallokoordinaateissa, kun pinnaksi $S$ valitaan $r$-säteinen pallo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} E(r)\mathbf{e}_r \cdot (r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{e}_r) = 4\pi r^2 E(r) \tag{2.24}$$

Toisaalta pallon sisään jää varaus

$$\int \rho dV = \int_0^{r} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(r')(r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi) = 4\pi \int_0^{r} \rho(r') r'^2 dr' \tag{2.25}$$

joten pallosymmetrisen varausjakautuman sähkökenttä on

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{2.26}$$

Sovelletaan tätä sitten tasaisesti varatulle $R$-säteiselle pallolle, jonka sisällä varaustiheys on $\rho_0$ ja ulkopuolella nolla. Pallon kokonaisvaraus on $Q = 4\pi R^3 \rho_0/3$. Integrointi antaa sähkökentäksi

$$\begin{aligned} r \leq R: \qquad & E(r) = \frac{Q\,r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ r > R: \qquad & E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Varausjakautuman ulkopuolella sähkökenttä on siis sama kuin origossa olevan pistevarauksen $Q$ kenttä.

### Viivavaraus

Esimerkkinä sylinterisymmetrisestä tapauksesta tarkastellaan pitkää tasaisesti varattua ohutta lankaa, jonka varaustiheys pituusyksikköä kohti on $\lambda$. Symmetrian perusteella sähkökenttä on radiaalinen. Tarkastellaan langan ympärillä olevaa $r$-säteistä sylinteriä, jonka pituus on $l$. Integroitaessa sähkökentän normaalikomponenttia sylinterin pinnan yli, sylinterin päät eivät tuota mitään. Vaipan pinta-ala on $2\pi rl$ ja sylinterin sisällä oleva varaus $\lambda l$, joten Gaussin laki antaa $2\pi rlE_r = \lambda l/\epsilon_0$ eli

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{2.28}$$

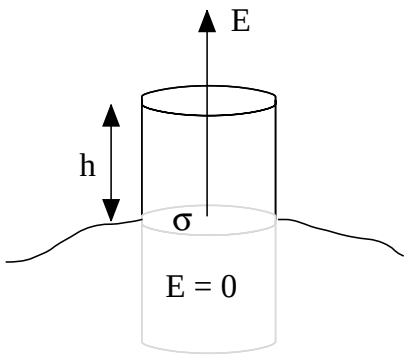
Viivavarauksen kenttä pienenee siis kuten $r^{-1}$. Kentän potentiaali on

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r/r_0) \tag{2.29}$$

missä $r_0$ on vakio. Tässä tapauksessa ei voida sopia potentiaalia nollaksi äärettömän kaukana.

### Johdekappale

Kappaletta, jolla voi olla sisäistä varausta, kutsutaan **eristeeksi** (engl. dielectric). **Johteissa** on puolestaan tarpeeksi liikkuvia varauksia, jotka jatkavat liikettään, kunnes sähkökenttä kappaleen sisällä on nolla. Varaukset joutuvat tällöin kappaleen pinnalle, eli sisällä varaustiheys on nolla ja kappaleen mahdollinen nettovaraus on pintavarausta. Jotta tilanne olisi staattinen, pinnalla olevan sähkökentän täytyy olla pinnan normaalin suuntainen:




Kuva 2.1: "Pillerirasia" johdekappaleen reunalla.

$\mathbf{E}_n = \mathbf{n}E_n$, koska muuten varaukset liikkuisivat pitkin pintaa. Sovelletaan Gaussin lakia tarkastelemalla sylinterinmuotoista "pillerirasiaa" (korkeus $h$), jonka ulompi pinta yhtyy tarkasteltavan kappaleen pintaan ja jonka tilavuus on $h\,dS$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$, $dS$ pohjan pinta-ala) (kuva 2.1).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n}\,dS - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n}\,dS + \int_{vaippa} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{2.30}$$

missä $\mathbf{E}_i$ on kenttä pillerirasian sisemmällä pinnalla, siis 0. Rajalla $h \to 0$ integraali vaipan yli menee myös nollaksi ja

$$\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dV = \frac{\sigma\,dS}{\epsilon_0} \tag{2.31}$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla pinta-alkioilla, on sähkökenttä johdepallon pinnalla suoraan verrannollinen pintavaraukseen

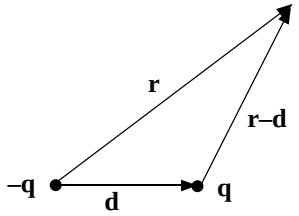
$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{n} \tag{2.32}$$

Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että mielivaltaisen johdekappaleen ympäröimässä tyhjässä onkalossa ei ole sähköstaattista kenttää. Samoin jää mietittäväksi, miksi tämä on merkittävä tulos Coulombin lain kokeellisen testaamisen kannalta.

## 2.5 Sähköinen dipoli

Tarkastellaan kahden erimerkkisen varauksen muodostamaa paria. Olkoon varaus $-q$ origossa ja varaus $q$ pisteessä $\mathbf{d}$ (kuva 2.2). Tällöin potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) \tag{2.33}$$




Kuva 2.2: Sähködipoli muodostuu kahdesta lähekkäisestä samansuuruisesta vastakkaismerkkisestä varauksesta.

Tämä lauseke on täysin yleinen riippumatta varausten etäisyydestä. Sähköisellä dipolilla tarkoitetaan raja-arvoa $d \to 0$, mikä on sama asia, kuin dipolin katselu kaukaa ($|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$). Binomisarjan avulla saadaan

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{d}|^{-1} &= [r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{d} + d^2]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + ...) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Rajalla $d \to 0$ potentiaali häviää, ellei $q$ kasva rajatta. Pistedipoli on idealisaatio, jonka varaus on nolla, mutta jonka **dipolimomentti** $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ on äärellinen. Origossa olevan sähködipolin potentiaali on siis

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.35}$$

Ottamalla tästä gradientin vastaluku saadaan sähkökentäksi (HT)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3p\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right\} \tag{2.36}$$

missä $\theta$ on dipolimomentin ja vektorin $\mathbf{r}$ välinen kulma. Myöhemmin saadaan magneettiselle dipolille samanmuotoiset lausekkeet. Dipolikentän kenttäviivat on hahmoteltu kuvaan 2.3.

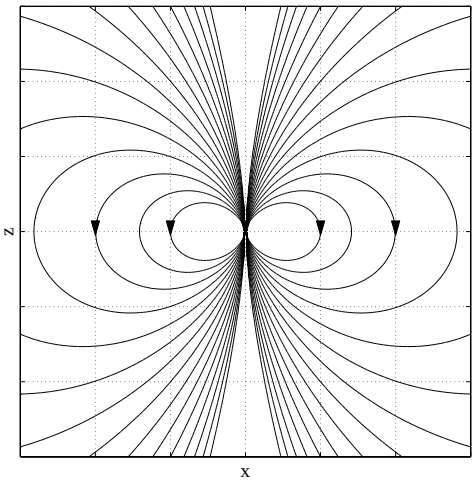
## 2.6 Sähkökentän multipolikehitelmä

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista varausjakautumaa $\rho(\mathbf{r}')$ origon ympäristössä. Sen aiheuttama potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{2.37}$$

Kehitetään $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ binomisarjaksi, kun $r > r'$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right] + \frac{3}{8}[\ \ ]^2 + ...\right\} \end{aligned} \tag{2.38}$$




Kuva 2.3: Dipolikentän kenttäviivat $xz$-tasossa. Dipoli sijaitsee origossa ja on $z$-akselin suuntainen.

sijoitetaan potentiaalin lausekkeeseen, jätetään $\mathbf{r}'$:n toista potenssia korkeammat termit pois ja järjestetään termit $\mathbf{r}'$:n kasvavien potenssien mukaan. Tämä antaa potentiaalin multipolikehitelmän **kvadrupolimomenttia** myöten

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_V \rho(\mathbf{r}')\,dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int_V \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dV' \right.\\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\int_V (3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2)\rho(\mathbf{r}')\,dV'\right\} \qquad (2.39)\end{aligned}$$

missä $x_i$:t ovat paikkavektoreiden karteesisia komponentteja ja $\delta_{ij}$ on **Kroneckerin delta**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad (2.40)$$

Multipolikehitelmän ensimmäinen tekijä vastaa origoon sijoitetun varausjakautuman osuutta potentiaaliin. Toinen tekijä vastaa origoon sijoitettua dipolimomenttien jakautumaa. Kolmas termi on muotoa

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij} \qquad (2.41)$$

missä $Q_{ij}$ on **kvadrupolimomenttitensori**. Potentiaalin multipolikehitelmä voidaan siis kirjoittaa sarjana

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij} + \ldots\right\} \qquad (2.42)$$

Kaukana varausjakautumasta potentiaali on likimain ensimmäisen nollasta poikkeavan termin aiheuttama potentiaali. Atomien ytimissä dipolimomentti on nolla, mutta korkeammat multipolit ovat tärkeitä ydinfysiikassa.

## 2.7 Pistevarauksen jakautuma

Yksittäiset pistevaraukset voidaan käsitellä samalla tavalla kuin varausjakautumat ottamalla käyttöön **Diracin deltafunktio** $\delta(\mathbf{r})$, jolloin

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \tag{2.43}$$

Deltafunktion tutuiksi oletettuja perusominaisuuksia ovat

$$\delta(\mathbf{r}) = 0\,, \quad \text{jos } \mathbf{r} \neq 0 \tag{2.44}$$

$$\int F(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = F(\mathbf{r}_0) \tag{2.45}$$

Helppona esimerkkinä pisteessä $\mathbf{r}_i$ olevan varauksen sähkökenttä on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{q_i\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV' = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \tag{2.46}$$

## 2.8 Poissonin ja Laplacen yhtälöt

Sähköstatiikka olisi aika suoraviivaista, jos tietäisimme kaikkien varausjakautumien paikkariippuvuudet. Näin ei kuitenkaan ole monissa käytännön ongelmissa. Koska $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ja $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, Gaussin laki differentiaalimuodossa vastaa matematiikan **Poissonin yhtälöä**

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.47}$$

Jos varaustiheys on nolla, niin Poissonin yhtälö yksinkertaistuu **Laplacen yhtälöksi**

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{2.48}$$

Laplacen yhtälön toteuttavaa funktiota kutsutaan **harmoniseksi**.

Poissonin yhtälö voidaan ratkaista, jos varausjakautuma ja oikeat reunaehdot tunnetaan. Tarkastellaan sähköstaattista systeemiä, joka koostuu $N$ johdekappaleesta. Kunkin johteen pinnalla potentiaali on $\varphi_i,\ i = 1,\ldots,N$. Reunaehtoja on kahta tyyppiä:

1. Tunnetaan potentiaali $\varphi$ alueen reunalla (**Dirichlet'n reunaehto**).
2. Tunnetaan potentiaalin derivaatan normaalikomponentti $\partial\varphi/\partial n$ alueen reunalla (**von Neumannin reunaehto**).

Selvitetään ensin, ovatko mahdollisesti löydettävät ratkaisut yksikäsitteisiä. On selvää, että jos $\varphi_1(\mathbf{r}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{r})$ ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja, niin

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum C_i \varphi_i(\mathbf{r})$$

missä $C_i$:t ovat mielivaltaisia vakioita, on Laplacen yhtälön ratkaisu.

**Yksikäsitteisyyslause:** kaksi annetut reunaehdot täyttävää Laplacen yhtälön ratkaisua ovat additiivista vakiota vaille samat. Tarkastellaan tämän todistamiseksi johteiden pinnat $S_1, \ldots, S_N$ sisäänsä sulkevaa tilavuutta $V_0$, joka on pinnan $S$ sisällä (pinta voi olla äärettömyydessä). Olkoot $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ kaksi Laplacen yhtälön toteuttavaa ratkaisua, jotka täyttävät samat reunaehdot johteiden pinnalla $S_I$, siis joko $\varphi_1 = \varphi_2$ tai $\partial\varphi_1/\partial n = \partial\varphi_2/\partial n$ näillä pinnoilla sekä pinnalla $S$. Tarkastellaan funktiota $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Tilavuudessa $V_0$ on tietenkin $\nabla^2\Phi = 0$. Reunaehdoista puolestaan seuraa, että kaikilla reunoilla

$$\text{joko} \quad \Phi = 0 \quad \text{tai} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

Sovelletaan sitten divergenssiteoreemaa vektoriin $\Phi\nabla\Phi$:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi)\, dV = \oint_{S+S_1+\ldots+S_N} (\Phi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

koska joko $\Phi$ tai $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$ on pinnoilla 0. Toisaalta

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

eli

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2\, dV = 0$$

Koska $(\nabla\Phi)^2 \geq 0$ koko alueessa $V_0$, sen on oltava nolla kaikkialla. Tästä seuraa, että $\Phi$ on vakio koko alueessa $V_0$ ja yksikäsitteisyyslause on siten todistettu.

Tämä ei ole todistus ratkaisun olemassaololle vaan sille, että mahdolliset ratkaisut ovat yksikäsitteisiä! Tarkastelun merkitys on siinä, että jos löydämme millä keinolla tahansa annetut reunaehdot täyttävän Laplacen yhtälön ratkaisun, ratkaisu on Dirichlet'n reunaehdolla yksikäsitteinen ja von Neumannin reunaehdolla vakiota eli potentiaalin nollatasoa vaille yksikäsitteinen.

Todistuksessa käytettiin Greenin ensimmäistä kaavaa (GI)

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)\, dV = \oint_S \varphi\nabla\psi \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{2.49}$$

sovellettuna tapaukseen $\Phi = \varphi = \psi$. Greenin toinen kaava (GII)

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\, dV = \oint_S (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{2.50}$$

tunnetaan myös nimellä **Greenin teoreema**. Nämä ovat divergenssiteoreeman suoria seurauksia (HT).

## 2.9 Laplacen yhtälön ratkaiseminen

Laplacen yhtälö on fysiikan keskeisimpiä yhtälöitä. Sähköopin lisäksi se esiintyy lämmönsiirtymisilmiöissä, virtausmekaniikassa jne. Kovin monimutkaisissa tilanteissa yhtälöä ei voi ratkaista analyyttisesti, mutta joskus ongelman symmetriasta on hyötyä. Laplacen yhtälö, joka on osittaisdifferentiaaliyhtälö, saadaan separaintimenetelmällä muunnetuksi ryhmäksi tavallisia yhden muuttujan differentiaaliyhtälöitä. Aihetta on käsitelty enemmän kurssilla FYMM II ja fysiikan matemaattisten menetelmien oppikirjoissa. Laplacen yhtälö voidaan separoida kaikkiaan 11 erilaisessa koordinaatistossa, joista tässä esiteltävät kolme tapausta ovat tavallisimmat. On syytä myös huomata, että Laplacen yhtälöllä ei aina ole separoituvia ratkaisuja.

### 2.9.1 Karteesinen koordinaatisto

Kirjoitetaan Laplacen yhtälö ensin karteesisissa koordinaateissa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.51}$$

ja etsitään sille ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.52}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.51) ja jaetaan tulolla $XYZ$, jolloin saadaan

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \tag{2.53}$$

Nyt jokainen termi riippuu vain yhdestä muuttujasta, jotka ovat keskenään riippumattomia. Niinpä kunkin termin on oltava erikseen vakioita

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2\,; \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2\,; \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \tag{2.54}$$

missä $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Kukin yhtälöistä (2.54) on helppo ratkaista:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{\beta y} + B_2 e^{-\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{2.55}$$

missä yleisesti kompleksiarvoiset vakiot $A_i$, $B_i$, $C_i$ ja $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ määräytyvät ongelman reunaehdoista. Koko ratkaisu on muodollisesti summa

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.56}$$

missä separointivakioille $\alpha, \beta, \gamma$ tulee tilanteesta riippuvia rajoituksia.

**Esimerkki. Potentiaali laatikossa**

Tarkastellaan laatikkoa $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$. Olkoon potentiaali nolla muilla reunoilla paitsi yläkannella ($z = c$), jossa se on tunnetuksi oletettu funktio $V(x, y)$. Ratkaistaan potentiaali laatikon sisällä.

Edellä saatua ratkaisua voitaisiin käyttää suoraan, mutta kirjoitetaankin nerokkaasti

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \\ Y(y) &= B_1 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \\ Z(z) &= C_1 \sinh(\gamma z) + C_2 \cosh(\gamma z) \end{aligned} \tag{2.57}$$

missä $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ (HT: totea, että yrite on kelvollinen). Tässä on tietoisesti valittu trigonometriset funktiot $x$- ja $y$-suunnissa ja hyperboliset funktiot $z$-suunnassa. Reunaehtoja soveltamalla nähdään heti, että voidaan valita $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, kun separointivakiot $\alpha$ ja $\beta$ toteuttavat seuraavat ehdot (reunaehdoista sivuilla $x = a$ ja $y = b$):

$$\begin{aligned} \alpha &= m\pi/a \\ \beta &= n\pi/b \end{aligned} \tag{2.58}$$

missä $m, n$ ovat kokonaislukuja, ja ne voidaan rajoittaa lisäksi positiviisiksi. Myös kolmas separointivakio saa silloin vain diskreettejä arvoja:

$$\gamma = \gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \tag{2.59}$$

Samaan tulokseen olisi luonnollisesti päädytty, vaikka olisi lähdetty liikkeelle eksponenttifunktioiden avulla kirjoitetusta ratkaisusta. Tilanteesta riippuu, mikä muoto on laskuteknisesti mukavin.

Tähän mennessä on siis saatu ratkaisuksi

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn} z) \tag{2.60}$$

On järkevää tarkastaa vielä kerran, että tämä toteuttaa Laplacen yhtälön ja antaa potentiaaliksi nollan vaadituilla reunoilla. Tuntemattomat kertoimet $A_{mn}$ saadaan asettamalla $z = c$:

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn} c) \tag{2.61}$$

Loppu onkin Fourier-kertoimien määrittämistä. Olettamalla, että funktio $V(x, y)$ on riittävän siisti, kertoimet saadaan laskettua ortogonaalisuusintegraalien avulla. Tämä lienee tuttua FYMM I:ltä.

Edellä ei mietitty sitä mahdollisuutta, että jotkin separointivakioista olisivat voineet olla nollia. Huolellinen lukija tutkikoon erikseen tämän tilanteen. Lyhyemmin voidaan kuitenkin todeta, että löydetty ratkaisu on selvästi kelvollinen ja yksikäsitteisyyslauseen mukaan ongelma on sillä selvä.

### 2.9.2 Pallokoordinaatisto

Koska pistevarauksen kenttä on pallosymmetrinen, pallokoordinaatisto on usein erittäin käyttökelpoinen. Laplacen yhtälö on tällöin

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0 \tag{2.62}$$

Etsitään tälle ratkaisua muodossa

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{2.63}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.62), kerrotaan suureella $r^2\sin^2\theta$ ja jaetaan $R\Theta\Phi$:llä:

$$r^2\sin^2\theta\left(\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0 \tag{2.64}$$

Ainoastaan viimeinen termi riippuu $\phi$:stä, joten sen on oltava vakio, jota merkitään $-m^2$:llä:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2 \tag{2.65}$$

Tämän ratkaisut ovat muotoa

$$\Phi(\phi)=vakio\cdot e^{\pm im\phi} \tag{2.66}$$

Yleisesti $m$ on kompleksinen, mutta fysikaalinen ehto rajaa sen mahdolliset arvot: jotta potentiaali olisi jatkuva, kun $\phi\to 0$ ja $\phi\to 2\pi$, on oltava $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$, joten $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Jatkuvuus on luonnollinen vaatimus, koska sähköstaattinen potentiaali voidaan tulkita yksikkövarauksen potentiaalienergiaksi.

Yhtälön (2.64) ensimmäisen termin on oltava puolestaan $m^2$, joten

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)=0 \tag{2.67}$$

Tämän yhtälön ensimmäinen ja toinen termi riippuvat kumpikin ainoastaan omasta muuttujastaan ja ovat siten yhtäsuuria vastakkaismerkkisiä vakioita, jota merkitään mukavuussyistä $l(l+1)$:llä

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2} = l(l+1) \tag{2.68}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.69}$$

Yhtälön (2.68) yleinen ratkaisu on muotoa

$$R(r)=Ar^{l+1}+Br^{-l} \tag{2.70}$$

missä $A$ ja $B$ ovat vakioita. Kirjoittamalla $\xi = \cos\theta$ saadaan $\Theta$:n yhtälöksi

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)\Theta = 0 \tag{2.71}$$

Jotta tämän ratkaisut olisivat äärellisiä pisteissä $\xi = \pm 1$ eli $\theta = 0, \pi$, on oltava $l = |m|, |m|+1, \ldots$. Tietyllä tavalla normitettuja ratkaisuja ovat **Legendren liittofunktiot** $P_l^m(\xi)$. Niille on voimassa ehto $|m| \leq l$, joten

$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l \tag{2.72}$$

Erikoistapauksessa $m = 0$ Laplacen yhtälön ratkaisu ei riipu $\phi$:sta, jolloin Legendren liittofunktiot palautuvat **Legendren polynomeiksi** $P_l$:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{d\xi^l}(\xi^2-1)^l \tag{2.73}$$

Legendren liittofunktiot saadaan puolestaan Legendren polynomeista:

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^m}{d\xi^m}P_l(\xi) \tag{2.74}$$

Yleisesti Laplacen yhtälöllä on siis pallokoordinaatistossa jokaista $l$ kohti $2l+1$ kulmista $\theta$ ja $\phi$ riippuvaa ratkaisua. Ne voidaan sopivasti normittaen lausua **palloharmonisten funktioiden**

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{2.75}$$

avulla. Normitus on valittu siten, että pallofunktiot $Y_{lm}$ muodostavat ortonormitetun täydellisen funktiojärjestelmän pallon pinnalla:

$$\int Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{np}(\theta,\phi)\,d\Omega = \delta_{ln}\delta_{mp} \tag{2.76}$$

Palloharmonisten yhteenlaskuteoreema antaa kahden vektorin välisen etäisyyden käänteisluvun summana

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta',\phi') \tag{2.77}$$

missä vektorin $\mathbf{r}$ suuntakulmat ovat $\theta, \phi$ ja vektorin $\mathbf{r}'$ suuntakulmat $\theta', \phi'$ sekä $r_< = min(r, r')$ ja $r_> = max(r, r')$. Tämä on hyödyllinen tulos, koska se erottelee pisteiden $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$ koordinaatit $(r, \theta, \phi)$ ja $(r', \theta', \phi')$. Moni integraali olisi vaikea laskea ilman tätä kaavaa.

Mikä hyvänsä riittävän säännöllinen pallon pinnalla määritelty funktio voidaan kehittää palloharmonisten sarjaksi. Esimerkkinä käy maapallon magneettikenttä, jonka sarjakehitelmän johtava termi vastaa magneettista dipolia ja korkeammat termit johtuvat kentän lähteen poikkeamisesta dipolista, magneettisen maa-aineksen epätasaisesta jakautumasta ja maapallon yläpuolisissa ionosfäärissä ja magnetosfäärissä kulkevista sähkövirroista. Palloharmonisia funktioita tarvitaan paljon myös atomifysiikassa ja kvanttimekaniikassa mm. tarkasteltaessa impulssimomenttioperaattoreita. Tekijä $(-1)^m$ kaavassa (2.75) on vaihetekijä, joka voidaan jättää pois tai ottaa mukaan jo $P_l^m$:n määritelmässä (2.74). Sen ottaminen mukaan on hyödyllistä etenkin kvanttimekaniikan laskuissa (katso esim. $Arfken$).

Kootaan lopuksi Laplacen yhtälön muotoa

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

oleva ratkaisu, kun $0 < r < \infty$:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta,\phi) + \sum_{lm} B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{2.78}$$

missä summaus on

$$\sum_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l}$$

ja kertoimet $A_{lm}, B_{lm}$ määräytyvät ongelman reunaehdoista.

### Esimerkki. Kiertosymmetrinen tilanne

Rajoitutaan nyt tapaukseen, jossa $\partial\varphi/\partial\phi = 0$ eli $\varphi = \varphi(r,\theta)$. Tällaisia ovat esimerkiksi pistevarauksen tai dipolin kentät. Laplacen yhtälö on nyt

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{2.79}$$

Toistetaan harjoituksen vuoksi edellä ollut muuttujien separointi etsimällä ratkaisua yritteellä $\varphi(r,\theta) = Z(r)P(\theta)$, jolloin

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = -\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) \tag{2.80}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin jokin vakio $k$ kaikilla $r$:n ja $\theta$:n arvoilla. Näin osittaisdifferentiaaliyhtälö on hajotettu kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Kulman $\theta$ yhtälöä kirjoitettuna muodossa

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + kP = 0 \tag{2.81}$$

kutsutaan **Legendren yhtälöksi**. Kuten edellä todettiin, fysikaalisesti kelvolliset ratkaisut kaikilla $\theta \in [0, \pi]$ edellyttävät, että $k = n(n+1)$, missä $n$ on positiivinen kokonaisluku ja ratkaisut ovat Legendren polynomeja $P_n(\cos\theta)$:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos\theta)^n} [\cos^2\theta - 1]^n \tag{2.82}$$

joten muutama ensimmäinen $P_n$ on

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos\theta \\ P_2 &= \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\ P_3 &= \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten radiaalista yhtälöä

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dZ}{dr}\right) = n(n+1)Z \tag{2.83}$$

Yrite $Z_n(r) = C_n r^s$ antaa kaksi riippumatonta ratkaisua $r^n$ ja $r^{-(n+1)}$. Radiaalisen yhtälön täydellinen ratkaisu on näiden lineaarikombinaatio

$$Z_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \tag{2.84}$$

ja koko Laplacen yhtälön ratkaisu kiertosymmetriassa on muotoa

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{(n+1)}}\right) P_n(\cos\theta) \tag{2.85}$$

Integroimisvakiot $A_n$ ja $B_n$ on määritettävä reunaehdoista.

### Esimerkki. Johdepallo vakiosähkökentässä

Tuodaan tasaiseen sähkökenttään $\mathbf{E}_0$ varaamaton $a$-säteinen johdepallo. Johde pakottaa alunperin suorat kenttäviivat taipumaan siten, että ne osuvat pintaan kohtisuoraan. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä ja $z$-akseli on sähkökentän suuntainen. Tällöin ongelma on kiertosymmetrinen. Johteen pinta on kaikkialla samassa potentiaalissa $\varphi(a,\theta) = \varphi_0$. Kaukana pallosta sähkökenttä lähestyy vakioarvoa

$$\mathbf{E}(r,\theta)_{r\to\infty} = E_0 \mathbf{e}_z \tag{2.86}$$

joten kaukana potentiaali lähestyy lauseketta

$$\varphi(r,\theta)_{r\to\infty} = -E_0 z + C = -E_0 r\cos\theta + C \tag{2.87}$$

Tarkastellaan sitten yhtälön 2.85 kertoimia. Kirjoitetaan auki potentiaalin muutama ensimmäinen termi

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= C + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + A_2 r^2\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] \\ &\quad + \frac{B_2}{r^3}\left[\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] + \ldots \end{aligned} \tag{2.88}$$

Kun $r \to \infty$, niin $\varphi = -E_0 r\cos\theta$, joten $A_n = 0$ kaikille $n \geq 2$ ja $A_1 = -E_0$. Koska pallon kokonaisvaraus on nolla, potentiaalissa ei ole $1/r$-riippuvuutta, eli $B_0 = 0$. Jäljellä olevat $\cos^n\theta$-termit, joissa $n \geq 2$, ovat kaikki lineaarisesti riippumattomissa polynomeissa $P_n$, joten ne eivät voi kumota toisiaan pallon pinnalla, missä ei ole $\theta$-riippuvuutta, eli $B_n = 0$ kaikille $n \geq 2$. Jäljelle jää

$$\varphi(a,\theta) = \varphi_0 \tag{2.89}$$

$$\varphi(r,\theta) = C - E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta \tag{2.90}$$

Kun $r = a$, $\cos\theta$-termien on kumottava toisensa, joten $C = \varphi_0$ ja $B_1 = E_0 a^3$. Reunaehdot täyttävä Laplacen yhtälön ratkaisu on siis

$$\varphi(r,\theta) = \varphi_0 + \left(\frac{a^3 E_0}{r^2} - E_0 r\right)\cos\theta \tag{2.91}$$

Sähkökentän $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ komponentit ovat

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta \tag{2.92}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta \tag{2.93}$$

Pallon pintavaraustiheys on

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r = a) = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta \tag{2.94}$$

Pinnalle indusoituva varausjakautuma on $\theta$:n funktio. Sen dipolimomentti on

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \int_{pallo} \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\,dV = \int_{r=a} (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)(3\epsilon_0 E_0\cos\theta) r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \\ &= 6\pi a^3\epsilon_0 E_0 \int_0^\pi \mathbf{e}_z\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = 4\pi\epsilon_0\,a^3 E_0\,\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{2.95}$$

Kaukaa katsottuna johdepallon osuus kentästä on sama kuin origoon sijoitetun dipolin, jonka dipolimomentti on $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0\,a^3 E_0\,\mathbf{e}_z$.

### 2.9.3 Sylinterikoordinaatisto

Tarkastellaan sitten sylinterisymmetristä tilannetta ja oletetaan lisäksi, ettei tilanne muutu sylinterin suunnassa. Nyt $\partial\varphi/\partial z = 0$ ja Laplacen yhtälö on

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{2.96}$$

**Huom.** Sylinterikoordinaatistossa $r$:llä ja $\theta$:lla on eri merkitys kuin pallokoordinaatistossa! Kirjallisuudessa käytetään usein radiaalietäisyydelle kirjainta $\rho$ ja kiertokulmalle kirjainta $\phi$.

Laplacen yhtälö separoituu yritteellä $\varphi = Y(r)S(\theta)$:

$$\frac{r}{Y}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) = -\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\theta^2} = n^2 \tag{2.97}$$

missä separointivakiolle $n^2$ tulee jälleen rajoituksia kulmayhtälöstä

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} + n^2S = 0 \tag{2.98}$$

Tämän ratkaisut ovat $\sin(n\theta)$ ja $\cos(n\theta)$. Jos kulma $\theta$ saa kaikki arvot välillä $0 \leq \theta \leq 2\pi$, on oltava $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$. Tästä seuraa, että $n$ on kokonaisluku, joka voidaan rajoittaa positiiviseksi. Lisäksi tapauksessa $n = 0$ saadaan ratkaisu $S = A_0\theta + C_0$ (ehto $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ ei silloin toteudu, mutta pidetään tämäkin termi mukana täydellisyyden vuoksi). Radiaalisesta yhtälöstä tulee nyt

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) - n^2Y = r^2\frac{d^2Y}{dr^2} + r\frac{dY}{dr} - n^2Y = 0 \tag{2.99}$$

joka ratkeaa yritteellä $Y = a_s r^s$

$$a_s s(s-1)r^s + a_s s r^s - a_s n^2 r^s = 0 \tag{2.100}$$

Tästä saadaan $s = \pm n$. Ratkaisufunktiot ovat siis muotoa $Y = r^n$ ja $Y = r^{-n}$. Tapaus $n = 0$ antaa lisäksi $Y = \ln(r/r_0)$. Kokonaisuudessaan ratkaisu on

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\left(C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta\right) \\ &\quad + \left(A_0 \ln\left(r/r_0\right)\right)\left(C_0\theta + D_0\right)\end{aligned} \tag{2.101}$$

Vakiot on jälleen selvitettävä tarkasteltavan tilanteen ominaisuuksista ja reunaehdoista.

**Huom.** Jos kulmariippuvuus on rajattu johonkin sektoriin, on sekä pallo- että sylinterikoordinaatistossa kulmayhtälöiden separointivakioiden arvot määritettävä tapauskohtaisesti. Esimerkiksi pallokalotin tapauksessa päädytään kalottiharmonisiin funktioihin, jotka ovat huomattavasti konstikkaampia kuin palloharmoniset funktiot.

## 2.10 Kuvalähdemenetelmä

Laplacen yhtälön yksikäsitteisyys antaa ratkaisijalle vapauden käyttää mieleisiään kikkoja ratkaisun löytämiseen. Tietyissä geometrisesti yksinkertaisissa tapauksissa peilivarausmenetelmä on kätevä keino välttää differentiaaliyhtälön ratkaiseminen. Tarkastellaan tilannetta, jossa on joko annettu tai varausjakautumasta helposti laskettavissa oleva potentiaali $\varphi_1(\mathbf{r})$ ja johteita, joiden pintavarausjakautuma olkoon $\sigma(\mathbf{r})$. Kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,dS}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.102}$$

Ratkaisuun johdesysteemin ulkopuolella ei vaikuta lainkaan, kuinka varaus on jakautunut johteen pinnan takana, kunhan pinnalla on voimassa samat reunaehdot. Voidaan siis ajatella, ettei kyseessä olekaan johdekappale vaan pinta, jonka takana on varausjakautuma, joka antaa samat reunaehdot kuin oikea johdekappaleen pintavaraus. Vaikka tässä rajoitutaan staattisiin varauksiin johdepintojen lähellä, kuvamenetelmää voidaan käyttää myös ajasta riippuvissa tilanteissa sekä varausten että virtojen yhteydessä. Teknillisen korkeakoulun Sähkömagnetiikan laboratoriossa on kehitetty tätä ratkaisutekniikkaa erittäin pitkälle.

**Esimerkki. Pistevaraus johdetason lähellä**

Valitaan johdetasoksi $(y, z)$-taso ja asetetaan varaus $q$ $x$-akselille pisteeseen $x = d$. Taso oletetaan maadoitetuksi, jolloin sen potentiaali voidaan valita nollaksi. Toisaalta taso saadaan nollapotentiaaliin asettamalla varaus $-q$ pisteeseen $(-d, 0, 0)$. Ratkaisujen yksikäsitteisyyden vuoksi näin saadaan oikea ratkaisu alueessa $x \geq 0$. Puoliavaruuteen $x < 0$ tätä menetelmää ei saa soveltaa, koska siellä ei ole oikeasti varausta! Kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|}\right) \tag{2.103}$$

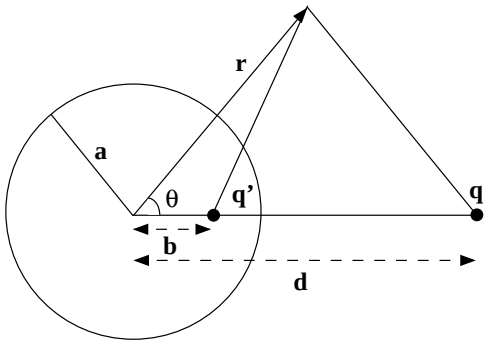
missä $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$. Tästä saa suoraan sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r}+\mathbf{d}}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|^3}\right) \tag{2.104}$$

ja johteen pintavaraustiheyden

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x\big|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{2.105}$$

Varaus vetää pintaa puoleensa samalla voimalla kuin se vetäisi etäisyydellä $2d$ olevaa vastakkaismerkkistä varausta. HT: integroi pintavaraustiheys koko tason yli.




Kuva 2.4: Pistevaraus johdepallon lähellä.

**Esimerkki. Pistevaraus maadoitetun johdepallon lähellä**

Maadoitus merkitsee tässä pallon pinnan valitsemista nollapotentiaalipinnaksi. Valitaan origoksi pallon keskipiste, olkoon $a$ pallon säde ja $d$ etäisyys origosta varaukseen $q$. Etsitään siis potentiaali $\varphi(\mathbf{r})$, kun $r \geq a$ reunaehdolla $\varphi(a) = 0$.

Symmetrian perusteella peilivarauksen $q'$ täytyy olla suoralla, joka kulkee varauksen $q$ ja origon kautta. Tarkastellaan tilannetta kuvan 2.4 mukaisesti käyttäen pallokoordinaatteja. Varauksen ja peilivarauksen yhteenlaskettu potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{2.106}$$

Pallon pinnalla potentiaali on nolla kaikilla $\theta, \phi$. Sijoittamalla $r = a$ ja asettamalla $\theta = 0$ ja $\theta = \pi$ saadaan peilivarauksen paikka ja suuruus

$$b = \frac{a^2}{d},\ q' = -\frac{a}{d}\,q \tag{2.107}$$

ja ongelma on ratkaistu.

Mikäli palloa ei olisi maadoitettu, sen keskipisteeseen voitaisiin asettaa toinen peilivaraus $q''$, joka puolestaan sovitettaisiin antamaan pinnalla oikea reunaehto. Pallon kokonaisvaraus olisi tällöin

$$Q = q' + q'' \tag{2.108}$$

## 2.11 Greenin funktiot

Edellä tarkasteltiin tilanteita, joissa oli joko pelkästään johdekappaleita tai johdekappaleita ja yksittäisiä varauksia. Yleisessä tilanteessa voi olla annettu varausjakautuma $\rho$ sekä johdekappaleita, joiden pintavarausjakautuma on tuntematon. Tällöin on ratkaistava Poissonin yhtälö

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.109}$$

Tämä voidaan tehdä integroimalla varausjakautuman yli

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{2.110}$$

ja lisäämällä tähän Laplacen yhtälön sellainen ratkaisu $\varphi_2$, että yhteenlaskettu potentiaali toteuttaa reunaehdot johdekappaleiden pinnalla.

Aiemmat esimerkit ovat perustuneet hyvin yksinkertaiseen geometriaan. Yleisemmin voidaan osoittaa, että Laplacen ja Poissonin yhtälöt, jotka toteuttavat joko Dirichlet'n tai von Neumannin reunaehdot, voidaan ratkaista käyttäen Greenin teoreemaa (2.50) ja Greenin funktioita. Tätä varten tarvitaan vielä kolmas Greenin kaava (GIII). Se saadaan soveltamalla GII:ta tapaukseen

$$\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.111}$$

missä $\mathbf{r}$ on jokin kiinteä piste alueessa $V$. Muodollisesti voidaan kirjoittaa

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.112}$$

Sijoittamalla nämä GII:een (2.50) saadaan GIII

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V dV'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla^2\varphi(\mathbf{r}') \\ &\quad +\frac{1}{4\pi}\oint_S dS'\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\varphi(\mathbf{r}')\right]\end{aligned} \tag{2.113}$$

(todistus esimerkiksi CL 2.6.1 tai Jackson.)

GIII:a ei voi käyttää suoraan, koska siinä esiintyvät sekä Dirichlet'n että von Neumannin reunaehdot. Oletetaan, että $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ on jokin alueessa määritelty harmoninen funktio eli funktio, joka toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2F(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$, missä derivoidaan pilkuttoman koordinaatin suhteen. Nyt GII antaa tuloksen

$$\begin{aligned}0 &= -\int_V dV'F(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2\varphi(\mathbf{r}') \\ &\quad +\oint_S dS'\left(F(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial F(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n}\varphi(\mathbf{r}')\right)\end{aligned} \tag{2.114}$$

Muodostetaan sitten **Greenin funktio**

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2.115}$$

Summaamalla (2.113) ja (2.114) saadaan tulos

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V dV' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2\varphi(\mathbf{r}') \\ &\quad +\frac{1}{4\pi}\oint_S dS'\left(G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n}\varphi(\mathbf{r}')\right)\end{aligned} \tag{2.116}$$

Valitsemalla $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sopivasti saadaan tästä Poissonin yhtälön ratkaisu annetuilla reunaehdoilla.

Greenin funktiolla on selvästi ominaisuus

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.117}$$

Greenin funktioiden käyttö ei rajoitu Poissonin yhtälön ratkomiseen, vaan niillä on keskeinen osa ratkottaessa erilaisia **integraaliyhtälöitä**. Poissonin lauseke potentiaalille varausjakautuman funktiona on sinällään poikkeukselisen yksinkertainen integraaliyhtälö.

### Esimerkki. Pallon Greenin funktio

Tarkastellaan esimerkkinä pallon Greenin funktiota Dirichlet'n reunehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on tunnettu. Tällöin valitaan

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2.118}$$

reunaehdolla

$$\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]_{\mathbf{r}'\in S} = 0 \tag{2.119}$$

missä $S$ on pallon pinta. Olemme jo aiemmin ratkaisseet identtisen ongelman yhdelle pistevaraukselle pallon ulkopuolella ehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on nolla yhtälössä (2.106). Siellä saatu ratkaisu on vakiota $q/4\pi\epsilon_0$ vaille yhtälön (2.119) ratkaisu, joten

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'\,|\mathbf{r}-(a/r')^2\mathbf{r}'|} \tag{2.120}$$

missä $a$ on origokeskisen pallon säde. Potentiaali saadaan integroimalla

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\,dV' - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n}\,\varphi(\mathbf{r}')\,dS' \tag{2.121}$$

missä on $V$ viittaa pallon tilavuuteen ja $S$ pallon pintaan. Normaalivektori $\mathbf{n}$ suuntautuu ulospäin siitä alueesta, jossa potentiaali halutaan laskea. Tarkasteltaessa aluetta pallon sisällä $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ja ulkopuolista aluetta tutkittaessa $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. Ulospäin suuntautuva normaaliderivaatta on

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}'}{a} \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}' \in S} &= -\frac{1}{a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\Big|_{\mathbf{r}' \in S} \\ &= \frac{r^2 - a^2}{a} (a^2 - 2\,ar\,\cos\gamma + r^2)^{-3/2} \end{aligned} \tag{2.122}$$

missä $\gamma$ on $\mathbf{r}$:n ja $\mathbf{r}'$:n välinen kulma.

Sovelletaan Greenin funktiota tapaukseen, jossa pallon sisällä ei ole varausta eli ratkaistaan Laplacen yhtälö reunaehdolla $\varphi(a) = f(\mathbf{r})$, kun $\mathbf{r}$ on pallon pinnalla. Tämä antaa Poissonin kaavana tunnetun tuloksen

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2\,ar\,\cos\gamma + r^2)^{3/2}}\, dS' \\ &= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2\,ar\,\cos\gamma + r^2)^{3/2}}\, d\Omega' \end{aligned} \tag{2.123}$$

joka ilmaisee siis potentiaalin alueen *sisällä* olettaen potentiaali tunnetuksi pallon pinnalla. Jos puolestaan halutaan tarkastella potentiaalia pallon ulkopuolella, pintaintegraalissa normaalin suunta määritellään ulospäin ja ainoa muutos on korvata $(a^2 - r^2) \to (r^2 - a^2)$.