Luku 5

Staattinen magneettikenttä

5.1 Sähkövirta

Nykyaikana sähkövirta lienee tutumpi ilmiö kuin sähkövaraus. Todellisuudessa varauksia ja virtoja ei oikeastaan voi käsitellä erikseen. Edellisissä luvuissakin sähkövirta on ollut implisiittisesti esillä monta kertaa. Kun varaukset järjestäytyvät johdekappaleen pinnalle, systeemissä kulkee virtaa, ja sähkövirran avulla paristo pitää edellisen luvun esimerkissä kondensaattorin jännitteen vakiona. Samoin termit "johde" ja "eriste" viittaavat kappaleiden kykyyn kuljettaa sähkövirtaa.

Tarkastellaan joukkoa varauksellisia hiukkasia, joiden varaus on q, lukumäärätiheys n ja nopeus $\mathbf{v}$. Sähkövirta I määritellään annetun pinnan läpi aikayksikössä kulkevan varauksen määränä

$$I = dQ/dt \tag{5.1}$$

Olkoon dS jokin pintaelementti. Sen läpi kulkeva virta on

$$dI = \frac{nq\mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n}\, dS}{dt} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.2}$$

missä $\mathbf{J}$ on virrantiheys.

Sähkövirran SI-yksikkö on ampeeri A = C/s. Virrantiheys on virta pinta-alan läpi, joten sen yksikkö on A/m^2. SI-yksiköissä sähkövirran yksikkö otetaan perussuureeksi ja kaikki muut sähköiset yksiköt voidaan ilmaista ampeerin, metrin, kilogramman ja sekunnin avulla.

Virrantiheys on samankaltainen vuosuure kuin sähkövuon tiheys $\mathbf{D}$ tai pian määriteltävä magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$. Fysikaalinen vuo tarkasteltavan pinnan läpi saadaan integroimalla vuon tiheys pinnan yli.

5.1.1 Jatkuvuusyhtälö

Virrantiheys ja sähkövaraus liittyvät läheisesti toisiinsa. Tarkastellaan suljetun pinnan S läpi alueeseen V **tulevaa** virtaa ($\mathbf{n}$ osoittaa ulospäin)

$$I = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dV \tag{5.3}$$

Tämän täytyy olla yhtä suuri kuin varausten tilavuuteen V tuoma sähkövirta

$$I = dQ/dt = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \tag{5.4}$$

Oletetaan tilavuus kiinteäksi, jolloin aikaderivaatta voidaan viedä integraalin sisään. Koska ρ on sekä ajan että paikan funktio, kokonaisderivaatta muuttuu osittaisderivaataksi

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \tag{5.5}$$

joten

$$\int_V \left(\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}\right)\, dV = 0 \tag{5.6}$$

Koska tämän täytyy olla voimassa kaikilla tilavuuksilla, saadaan virralle **jatkuvuusyhtälö**

$$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{5.7}$$

Mikäli varaustiheys on ajasta riippumaton eli $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, sähkövirralla ei ole lähteitä tai nieluja ja siten kaikki virtaviivat sulkeutuvat. Tällaista virtausta kutsutaan **stationaariseksi**.

Huom. Jatkuvuusyhtälö on suora seuraus kokonaisvarauksen säilymislaista eikä edellytä kiinteän tilavuuden tarkastelua (yleisempi johto: CL 6.1).

5.1.2 Ohmin laki

On kokeellinen tosiasia, että vakiolämpötilassa olevissa metalleissa sähkövirta riippuu **lineaarisesti** sähkökentästä:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{5.8}$$

Tämä on **Ohmin laki** ja sen verrannollisuuskerroin σ on **johtavuus**. Käytämme sähkönjohtavuudelle yleisen tavan mukaan samaa symbolia kuin aiemmin pintavaraukselle. σ on kirjallisuudessa yleisin merkintä ja jos joudumme jossain kirjoittamaan molemmat suureet, eroteltakoon ne vaikkapa kirjoittamalla pintavaraukselle σ_S. Jälleen on tärkeää oppia lukemaan yhtälöiden takana olevaa fysiikkaa eikä niinkään opetella kaavoja ulkoa!

Lineaarinen Ohmin laki on voimassa tavallisille aineille, ellei sähkökenttä ole kovin suuri. Se ei kuitenkaan ole samanlainen fysiikan peruslaki kuin

Taulukko 5.1: Aineiden resistiivisyyksiä. Johtavuus on resistiivisyyden käänteisluku. Vertailun vuoksi mainittakoon, että taulukossa 3.1 lueteltujen eristeiden resistiivisyydet ovat tyypillisesti suurempia kuin $10^8 \Omega m$. Vesi on poikkeus, sillä sen resistiivisyys on noin 5000 Ωm, joten sitä voidaan pitää myös johteena.

aine	resistiivisyys 10^{-8} Ωm
alumiini	2.65
grafiitti	1375
hopea	1.59
konstantaani	50
kulta	2.35
kupari	1.67
nikkeli	6.84
rauta	9.71
sinkki	5.92
volframi	5.68

Maxwellin yhtälöt, vaan samantapainen rakenneyhtälö kuin $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, jonka yksityiskohtainen muoto ja jopa olemassaolo riippuvat väliaineen ominaisuuksista. On olemassa epälineaarisia väliaineita, joissa σ on sähkökentän ja mahdollisesti myös magneettikentän funktio. Jos sähkökenttä on riittävän suuri, niin väliaine kuin väliaine alkaa käyttäytyä epälineaarisesti.

Johtavuuden käänteislukua $\eta = 1/\sigma$ kutsutaan **ominaisvastukseksi** eli resistiivisyydeksi. Myös sen merkintä vaihtelee kirjallisuudessa. On tärkeää erottaa "ominaisvastus" (engl. resistivity) ja "vastus" (resistance). Johtavuuden SI-yksikkö on $[\sigma] = (\mathrm{A/m^2})/(\mathrm{V/m}) = \mathrm{A/(Vm)}$, joten ominaisvastuksen yksiköksi tulee Vm/A. Toisaalta V/A on tuttu vastuksen yksikkö ohmi (Ω), joten ominaisvastuksen yksikkö on Ωm ja johtavuuden $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ = S/m, missä on otettu käyttöön yksikkö siemens. Siemensin sijasta ohmin käänteislukuna esiintyy kirjallisuudessa usein mho. Taulukossa 5.1 luetellaan joidenkin hyvien johteiden resistiivisyyksiä.

Tarkastellaan sähkövirran ja jännitteen välistä yhteytta ohuessa homogeenisessa suorassa virtajohdossa, jonka päiden välillä on jännite $\triangle\varphi$ ja jonka johtavuus on σ. Johteessa sähkökentällä ei ole komponenttia kohtisuorassa johtoa vastaan, koska tämä aiheuttaisi jatkuvan sähkövirran joko johtoon tai siitä pois ja johdon pinnan varautumisen. Koska systeemi on homogeeninen ja suora, sähkökenttä on sama koko johdossa, joten $\triangle\varphi = El$, missä l on johdon pituus. Ohmin lain mukaan johdossa kulkee virta, joka mielivaltaisen

poikkileikkauspinta-alan A läpi on

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = JA = \frac{\sigma A}{l} \triangle\varphi \tag{5.9}$$

ja olemme löytäneet sähkövirran ja jännitteen välisen Ohmin lain. Verrannollisuuskerroin on vastus (resistanssi) $R = l/(\sigma A)$, jonka SI-yksikkö on siis ohmi. Tämän avulla voimme johtaa koulufysiikasta tuttuja yhteyksiä, kuten työn, jonka sähkökenttä tekee siirtäessään varauksen Q potentiaalieron U läpi: $W = QU$ ja sitä vastaavan tehon $P = UI = RI^2 = U^2/R$. Tämän tehon sanotaan häviävän materiaalin **Joulen lämmityksenä**.

5.1.3 Johtavuuden klassinen selitys

Tarkastellaan johteessa nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvaa varauksellista hiukkasta (varaus q, massa m) klassisen mekaniikan mukaisesti. Sähkökentässä $\mathbf{E}$ hiukkanen kiihtyy voiman $q\mathbf{E}$ vaikutuksesta. Olkoon kyseessä lineaarinen ohminen johde, jossa sähkökenttä aiheuttaa tasaisen virrantiheyden $\mathbf{J}$. Hiukkaseen täytyy vaikuttaa toinenkin voima, joka kumoaa sähkökentän aiheuttaman kiihtyvyyden. Jos jarruttava voima on mekaanisen kitkan kaltainen eli verrannollinen hiukkasen nopeuteen, niin liikeyhtälö on

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \tag{5.10}$$

missä G on vakio. Alkuehdolla $\mathbf{v}(0) = 0$ saadaan ratkaisuksi

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G}\mathbf{E}\,(1 - e^{-Gt/m}) \tag{5.11}$$

Tämän mukaan hiukkasen nopeus lähestyy kulkeutumisnopeutta $\mathbf{v}_d = q\mathbf{E}/G$ eksponentiaalisesti $e^{-t/\tau}$ aikavakion τ ollessa

$$\tau = m/G \tag{5.12}$$

Sijoittamalla tämä $\mathbf{v}_d$:n lausekkeeseen Ohmin laki voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\tau}{m}\mathbf{E} \tag{5.13}$$

joten

$$\sigma = nq^2\tau/m \tag{5.14}$$

missä n on hiukkasten lukumäärätiheys. Jos virrankuljettajia on useampaa laatua, niin

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \tag{5.15}$$

Kohtuullisen hyvillä johteilla metalleista puolijohteisiin τ voidaan tulkita johtavuuselektronien **keskimääräiseksi törmäysajaksi**. Matkaa, jonka johtavuuselektroni kulkee keskimäärin törmäysten välillä kutsutaan **keskimääräiseksi vapaaksi matkaksi** l_{mfp} ja se on

$$l_{mfp} = v_T \tau \tag{5.16}$$

missä v_T on elektronien **terminen** nopeus. Sen on oltava paljon suurempi kuin v_d, sillä muutoin τ tulisi riippuvaiseksi sähkökentästä eikä väliaineella olisi enää lineaarista Ohmin lakia. Useimmilla metalleilla $v_T \approx 10^6$ m/s ja v_d yleensä alle 10^{-2} m/s. Metalleilla $l_{mfp} \approx 10^{-8}$ m huoneenlämmössä, joten $\tau \approx 10^{-14}$ s. Puolijohteilla relaksaatioaika voi olla kertalukua suurempi, mutta joka tapauksessa sähkövirta reagoi käytännössä välittömästi sähkökentän muutokseen. Tämän vuoksi ennen Maxwellia kentänmuutosvirtaa $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ ei ollut havaittu missään koetilanteessa.

5.1.4 Samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut

Ohmin laki on siis rakenneyhtälö kuten $\mathbf{E}$:n ja $\mathbf{D}$:n välinen yhteys. Analogia menee pidemmällekin. Stationaarisen virtauksen jatkuvuusyhtälö $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ on samaa muotoa kuin $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ tai yksinkertaisen väliaineen tapauksessa $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Niinpä stationaarisen sähkövirran virtaviivat voidaan määrittää ratkaisemalla Laplacen yhtälö samoilla menetelmällä kuin edellisissä luvuissa. Ensin on etsittävä sopivat reunaehdot virrantiheydelle. Tarkastellaan esimerkkinä johdetta, jossa on toisesta johdeaineesta koostuva pitkä sylinterinmuotoinen este. Kaukana sylinteristä sähkökenttä on kohtisuorassa sylinterin akselia vastaan.

Merkitään sylinteriä (sisäalue) alaindeksillä i ja johdetta (ulkoalue) alaindeksillä u. Sylinterin akseli on z-akseli ja sylinterin säde a. Kaukana sähkökenttä on vakio $E_0\mathbf{e}_x$. Koska $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, reunaehdoksi saadaan $J_{un} = J_{in}$ (vrt. sähkövuon tiheys) eli

$$\sigma_u E_{un} = \sigma_i E_{in} \tag{5.17}$$

eli

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \sigma_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial r} \tag{5.18}$$

sylinterin pinnalla $r = a$. Toisaalta potentiaali on jatkuva, joten

$$\varphi_u(a, \theta) = \varphi_i(a, \theta) \tag{5.19}$$

Kaukana sylinteristä virta on häiriintymätön, joten

$$\varphi = -E_0 r \cos\theta \text{ , kun } r \to \infty \tag{5.20}$$

Tehdään origossa ja kaukaisuudessa hyvin käyttäytyvät ratkaisuyritteet (vrt. luku 2.9.3)

$$\varphi_i = Ar\cos\theta \tag{5.21}$$

$$\varphi_u = -E_0 r\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{r} \tag{5.22}$$

Tässä on rohkeasti arvattu, että vain *cosθ*:aan verrannolliset termit tulevat kyseeseen, sillä ainoastaan ne kytkeytyvät ulkoiseen kenttään. Nyt reunaehdot antavat

$$Aa\cos\theta = -E_0 a\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{a} \tag{5.23}$$

$$\sigma_i A\cos\theta = \sigma_u\left(-E_0\cos\theta - \frac{B\cos\theta}{a^2}\right) \tag{5.24}$$

Saadaan kertoimet A ja B

$$A = \frac{-2\sigma_u}{\sigma_i+\sigma_u}E_0 \tag{5.25}$$

$$B = \frac{\sigma_i-\sigma_u}{\sigma_i+\sigma_u}E_0 a^2 \tag{5.26}$$

ja ongelma on yksikäsitteisesti ratkaistu.

Jos sylinteri on hyvä eriste ($\sigma_i \to 0$), niin kaikki virta kiertää sen, jolloin

$$\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_0 - \frac{J_0 a^2}{r^2}(\cos\theta\,\mathbf{e}_r + \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta) \tag{5.27}$$

Sähkövirran virtaviivat kiertävät esteen siististi. Ongelma on analoginen kokoonpuristumattomassa nestevirtauksessa ($\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$) olevan sylinterinmuotoisen virtausesteen kanssa. Laplacen yhtälön ratkominen on varsin yleispätevä menetelmä fysiikassa (Feynman lectures, osa 2, luku 12-1: "The same equations have the same solutions".).

5.2 Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki

Magnetismin olemassaolo on tunnettu kauan, mutta sen yhteys sähköön löytyi vasta vuonna 1820, kun *Ørsted* havaitsi, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän. Magneettikenttä määritellään voimavaikutuksen kautta samaan tapaan kuin sähkökenttä. Pian Ørstedin kerrottua havainnoistaan *Ampère* julkaisi mittaustuloksensa, joiden mukaan kahden virtasilmukan, joissa kulkee virrat I_1 ja I_2, välillä vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}I_1 I_2 \oint_{C1}\oint_{C2}\frac{d\mathbf{l}_2\times[d\mathbf{l}_1\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} \tag{5.28}$$

Tämä on siis virtasilmukkaan 2 vaikuttava voima (vrt. Coulombin laki). Koska SI-yksiköissä **määritellään** $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ N/A^2, tämän voiman mittaus varsinaisesti määrittelee ampeerin, josta saadaan coulombi ja muut sähköopin SI-yksiköt. Magneettivuon tiheyden SI-yksikkö on tesla (T = Ns/Cm = N/Am) ja magneettivuon yksikkö weber (Wb = Tm^2). Koska esimerkiksi maapallon magneettikenttä maan pinnalla vaihtelee välillä 30000–60000 nT, on tesla useissa sovellutuksissa varsin suuri yksikkö.

Voiman lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \oint_{C2} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \tag{5.29}$$

missä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{5.30}$$

on silmukan $C1$ synnyttämä magneettikenttä (oikeammin magneettivuon tiheys) pisteessä $\mathbf{r}_2$, joka on silmukassa $C2$. Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi** tai myös Ampèren ja Laplacen laiksi (kunnia kuulunee kaikille). Se voidaan yleistää jatkuvalle virrantiheydelle korvaamalla $I\,d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J}dV$ ja korvaamalla lenkki-integraali tilavuusintegraalilla. Integrandi on nollasta poikkeava vain alueessa, jossa $\mathbf{J} \neq 0$, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV' \tag{5.31}$$

Näin voimme laskea magneettikentän mielivaltaisesta virtajakautumasta samaan tapaan kuin staattisen sähkökentän annetusta varausjakautumasta.

Kokeellinen tosiasia on, että kaikki magneettikentät voidaan antaa virtajakautumien avulla. Suoraviivaisella laskulla nähdään (HT), että

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.32}$$

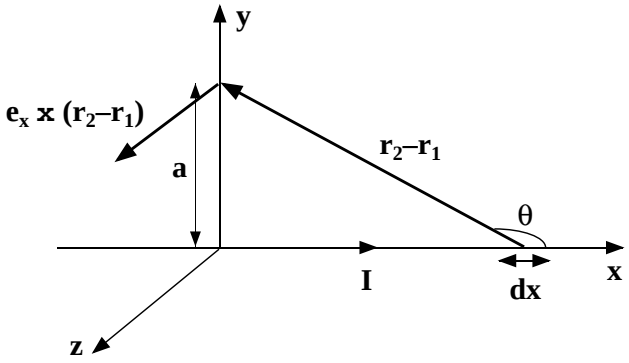
joka on Coulombin lain jälkeen toinen laki Maxwellin yhtälöiden joukossa ja ilmaisee, että ei ole olemassa erillisiä kentän $\mathbf{B}$ lähteitä tai nieluja eli magneettisia napoja (magneettisia monopoleja). Tämä merkitsee myös sitä, että magneettikentän kenttäviivoilla ei ole alku- eikä loppupäätä vaan kaikki kenttäviivat sulkeutuvat.

Magneettikentäksi kutsumamme suure $\mathbf{B}$ on siis oikeammin magneettivuon tiheys, jonka SI-yksikkö tesla (T) vastaa yhden weberin (Wb) suuruista magneettivuota neliömetrin läpi: magneettivuo Φ pinnan S läpi on

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.33}$$

Jos pinta on suljettu,

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = 0 \tag{5.34}$$



Kuva 5.1: Suoran virtajohtimen aiheuttaman magneettikentän laskeminen.

eli magneettivuo suljetun pinnan läpi on nolla. Tätä voi havainnollistaa epätäsmällisellä toteamuksella, että jokaisesta avaruuden alueesta lähtee yhtä paljon magneettikentän kenttäviivoja kuin niitä sinne tulee.

Magneettikentän lähteettömyys on puhtaasti kokeellinen laki eikä sille ole mitään teoreettista tai matemaattista välttämättömyyttä. Itse asiassa modernit sähköistä, heikkoa ja vahvaa vuorovaikutusta yhdistävät yhtenäiskenttäteoriat mahdollistavat magneettisten monopolien olemassaolon. Ne voidaan periaatteessa ottaa klassisestikin mukaan kirjoittamalla $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$, missä ρ_m on magneettinen varaustiheys. Tähän ei kuitenkaan ole mitään syytä, koska emme havaitse monopolien vaikutuksia klassisen elektrodynamiikan puitteissa.

Esimerkki. Pitkän suoran virtajohtimen aiheuttama kenttä

Olkoon johdin x-akselilla ja lasketaan magneettikenttä pisteessä $\mathbf{r}_2$ y-akselilla. Merkitään $d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x$; $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{e}_x$; $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{e}_y$, jolloin $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = a\,dx\,\mathbf{e}_z$. Biot'n ja Savartin lain suoraviivainen käyttö antaa

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{l}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\mathbf{e}_z \qquad (5.35)\end{aligned}$$

Jos virtajohde on äärellisen mittainen, magneettikenttä on oheisessa kuvassa määritellyn kulman θ funktio

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\mathbf{e}_z\,\Bigg|_{-L_1}^{L_2}\frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\mathbf{e}_z\,\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}(-\cos\theta) \qquad (5.36)$$

Tässä käytettiin karteesista koordinaatistoa, missä suunnan $\mathbf{e}_z$ määrää tarkastelupisteen paikka. Lukiosta muistetaan, että magneettikenttä kiertää suoran virtajohteen ympäri oikean käden kiertosäännön mukaisesti. Käyttämällä sylinterikoordinaatistoa, missä positiivinen z-akseli on virran suuntainen ja $\mathbf{e}_\theta$ on atsimutaalikoordinaatin yksikkövektori (siis **eri kulma** kuin ylläolevassa kuvassa), magneettikenttä on

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\mathbf{e}_\theta \tag{5.37}$$

Esimerkki. Ympyränmuotoisen virtasilmukan kenttä ympyrän keskipisteen läpi kulkevalla akselilla

Olkoon ympyrän säde a ja tarkastellaan kenttää ympyrän tasoa vastaan kohtisuorassa olevalla keskipisteen kautta kulkevalla z-akselilla. Olkoon $\mathbf{e}_z$-vektorin suunta virtaan nähden oikean käden säännön mukainen. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{l}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\,d\theta}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{5.38}$$

Jos ympyröitä on useampia, kuten kelassa, on jokaisen osuus summattava.

Esimerkki. Helmholtzin kela

Helmholtzin kela muodostuu kahdesta N-kertaisesta silmukasta, joiden keskipisteet ovat samalla z-akselilla. Olkoot kelojen säteet a ja etäisyys $2b$. Tällöin kenttä z-akselilla kelojen välissä etäisyydellä z toisesta kelasta on

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2+a^2]^{3/2}}\right\} \tag{5.39}$$

Helmholtzin keloja käytetään tuottamaan suhteellisen homogeeninen magneettikenttä rajoitettuun alueeseen. Tämän tapainen systeemi on Nurmijärven geofysiikan observatoriossa, jonka testilaboratoriossa voidaan esimerkiksi kumota maapallon kenttä pienessä alueessa.

Tarkastellaan magneettikentän derivaattaa z-akselilla. Kun $z = b$, niin $dB_z/dz = 0$. Myös toinen derivaatta on nolla tässä pisteessä, jos $2b = a$. Asettamalla siis kelat niiden säteen etäisyydelle toisistaan, on kenttä pisteen $z = a/2$ ympäristössä mahdollisimman homogeeninen. Itse asiassa kolmaskin derivaatta häviää ja kentän epähomogeenisuus ilmenee vasta Taylorin sarjan neljännessä termissä

$$B_z(z) = B_z(a/2) + \frac{(z-a/2)^4}{24}\left.\frac{d^4 B_z}{dz^4}\right|_{z=a/2} + \ldots$$

$$\approx \quad B_z(a/2)\left[1 - \frac{144}{125}\left(\frac{z-a/2}{a}\right)^4\right] \tag{5.40}$$

5.3 Ampèren laki

Tarkastellaan stationaarista virtaa, siis $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$. Lasketaan magneettikentän roottori lähtien Biot'n ja Savartin laista

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dV'\right\} \tag{5.41}$$

Roottori kohdistuu paikkavektoriin $\mathbf{r}$. Kun se viedään integraalin sisään ja kirjoitetaan ristitulot auki, niin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}')\left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}')\cdot\nabla\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] dV' \tag{5.42}$$

Muistetaan kaava

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{5.43}$$

joten integraalin ensimmäinen termi on $\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r})$.

Jälkimmäisessä termissä voidaan $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$:n antisymmetrisyyden vuoksi vaihtaa derivointi tapahtuvaksi $\mathbf{r}'$:n suhteen vaihtamalla merkki. Koska jälkimmäinen termi sisältää ∇:n ja $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$:n välisen dyaditulon, käsitellään se $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$:n komponentti kerrallaan. Muokataan x-komponenttia kaavalla

$$\mathbf{J}\cdot\nabla'\frac{x'-x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \nabla'\cdot\left(\mathbf{J}\,\frac{x'-x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) - \frac{x'-x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\nabla'\cdot\mathbf{J} \tag{5.44}$$

Oikean puolen jälkimmäinen termi on nolla oletuksen $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ perusteella. Jäljellä oleva tilavuusintegraali voidaan muuttaa pintaintegraaliksi

$$\int_V \nabla'\cdot\left(\mathbf{J}\,\frac{x'-x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) dV' = \oint_S \mathbf{J}\,\frac{x'-x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\cdot d\mathbf{S}' \tag{5.45}$$

Tämän on oltava voimassa pinnan valinnasta riippumatta, joten pinta voidaan siirtää virtajakautuman ulkopuolelle eli integraalin on oltava nolla. Sama pätee kaikille komponenteille, joten jäljelle on jäänyt **Ampèren laki** differentiaalimuodossa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \tag{5.46}$$

Integraalimuotoon Ampèren laki saadaan käytämällä Stokesin lausetta muodossa

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} \tag{5.47}$$

joten

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mu_0\, I \tag{5.48}$$

Siis suljettua lenkkiä pitkin integroitu magneettivuon tiheys on μ_0 kertaa lenkin läpi kulkeva kokonaisvirta. Tätä tulosta kutsutaan **Ampèren kiertosäännöksi** (vrt. sähköstatiikan Coulombin laki). Sen avulla voi laskea suoraan magneettikentän sopivissa symmetrisissä tapauksissa (esim. suora virtajohdin tai ympyräsilmukka). Integraaleissa on muistettava, että pinnan S normaalivektori $\mathbf{n}$ määrittelee oikeakätisesti käyräalkion $d\mathbf{l}$.

Esimerkki. Kenttä toroidikäämin sisällä

Tarkastellaan toruksen ympärille kierrettyä käämiä (N kierrosta). Sisällä kenttä on symmetriasyistä $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{e}_\phi$, missä ϕ on toruksen keskipistettä kiertävä kulma ja r etäisyys toruksen keskipisteestä toruksen sisällä olevaan pisteeseen. Sovelletaan Ampèren kiertosääntöä pitkin r-säteistä ympyrää toruksen sisällä:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 N I \tag{5.49}$$

joten

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\, \mathbf{e}_\phi \tag{5.50}$$

Toroidin ulkopuolella magneettikenttä on nolla, sillä geometrian perusteella $\mathbf{B} = B(r, z)\mathbf{e}_\phi$ ja lenkin läpäisevä virta on nolla.

5.4 Virtasilmukan magneettimomentti

Tarkastellaan virtajohdinta, joka muodostaa suljetun silmukan C. Tällöin koko silmukkaan vaikuttaa voima 5.29

$$\mathbf{F} = \oint_C I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{5.51}$$

Kokonaisvirta ei riipu paikasta, joten se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, samoin magneettikenttä, mikäli se on vakio:

$$\mathbf{F} = -I\, \mathbf{B} \times \oint_C d\mathbf{l} = 0 \tag{5.52}$$

Siis **vakio**magneettikentässä virtasilmukkaan vaikuttava voima on nolla.

Silmukka-alkioon vaikuttava vääntömomentti on

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I\, \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{5.53}$$

joten koko silmukalle

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{5.54}$$

Oletetaan jälleen, että magneettikenttä on vakio. Kirjoitetaan ristitulo auki kaavalla $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})\mathbf{B}$. Tällöin

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - I\mathbf{B} \oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} \tag{5.55}$$

Jälkimmäinen integraali muuntuu Stokesin lauseella muotoon $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. Ensimmäinen integraali muuntuu puolestaan yleistetyllä Stokesin lauseella muotoon

$$\oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \tag{5.56}$$

Koska $\mathbf{B}$ on vakio, niin $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}$, joten

$$\boldsymbol{\tau} = I \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = I \left(\int_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{5.57}$$

missä pinta-alavektori $\mathbf{S}$ voidaan kirjoittaa yleistetyn Stokesin lauseen avulla

$$\mathbf{S} = \int_S \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \tag{5.58}$$

Tuloa $I\mathbf{S}$ kutsutaan silmukan C **magneettimomentiksi**

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \tag{5.59}$$

Tämän avulla vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{5.60}$$

Siis vaikka silmukkaan ei kohdistukaan voimaa, joka kiihdyttäisi silmukkaa kokonaisuutena, siihen kohdistuu vääntömomentti, joka pyrkii kääntämään silmukan pintaa kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä käytetään hyväksi esimerkiksi avaruusalusten asennonsäätöjärjestelmissä.

5.5 Magneettikentän potentiaaliesitys

5.5.1 Vektoripotentiaali

Koska magneettikenttä on lähteetön, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se voidaan ilmaista vektorikentän roottorina

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.61}$$

Vektoripotentiaali A ei ole yksikäsitteinen, sillä olipa f mikä riittävän siisti skalaarikenttä hyvänsä, niin $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$.

Vektoripotentiaali voidaan ilmaista virran avulla lähtemällä jälleen Biot'n ja Savartin laista

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \tag{5.62}$$

Integrandi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{5.63}$$

Sovelletaan tähän kaavaa $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla f$. Nyt $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, koska ∇ ei operoi $\mathbf{r}'$:uun, joten integrandiksi tulee

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \tag{5.64}$$

∇ voidaan siirtää $\mathbf{r}'$:n suhteen laskettavan integraalin ulkopuolelle, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \right\} \tag{5.65}$$

eli

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{5.66}$$

Kirjoittamalla **A** komponenttimuodossa

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{5.67}$$

nähdään, että komponentit A_i ovat matemaattisesti samaa muotoa kuin sähköstaattisen potentiaalin lauseke

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV_1 \tag{5.68}$$

joten jokaiselle komponentille erikseen ja siten koko vektorille on voimassa Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{5.69}$$

Koska toisaalta

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{5.70}$$

vektoripotentiaalin on toteutettava ehto

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \tag{5.71}$$

Usein vektoripotentiaali valitaan siten, että $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, mikä itse asiassa toteutuu edellä, jos $\mathbf{J}$ poikkeaa nollasta vain äärellisessä alueessa.

Sähköstatiikassa skalaaripotentiaali helpottaa laskuja olennaisesti. Vektoripotentiaali on monimutkaisempi, mutta silti käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Vektoripotentiaali on myös hyödyllinen sähkömagneettisiin aaltoihin ja säteilyyn liittyvissä ongelmissa ja keskeinen apuväline elektrodynamiikan teoriassa, relativistisissa tarkasteluissa ja kvanttielektrodynamiikassa.

5.5.2 Multipolikehitelmä

Vektoripotentiaali voidaan esittää multipolikehitelmänä samaan tapaan kuin sähköinen skalaaripotentiaali. Laskenta on hieman monimutkaisempaa, koska kyseessä on vektorifunktio. Oletetaan nyt yleinen divergenssitön virrantiheys $\mathbf{J}$, joka poikkeaa nollasta vain äärellisessä tilavuudessa V.

Koska vektoripotentiaalin integraaliesitys on samaa muotoa kuin sähköisen skalaaripotentiaalin, voidaan suoraan kirjoittaa vektoripotentiaalin komponentille A_l

$$A_l(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \int J_l(\mathbf{r})\ dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' J_l(\mathbf{r})\ dV' \ + ...\right) \tag{5.72}$$

Integraalien laskemiseksi käytetään seuraavaa aputulosta:

$$\nabla \cdot (fg\mathbf{J}) = f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f \tag{5.73}$$

missä f ja g ovat vapaasti valittavia funktioita. Tässä käytettiin myös oletusta $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Integroimalla tilavuuden V yli saadaan

$$\int (f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f) = 0 \tag{5.74}$$

($\nabla \cdot (fg\mathbf{J})$:n sisältävä integraali voidaan ulottaa yli koko avaruuden, koska alueen V ulkopuolella virrantiheys on nolla. Muunnos pintaintegraaliksi antaa silloin nollan.)

Integroitaessa multipolikehitelmän ensimmäistä termiä valitaan yksinkertaisesti $f = 1$ ja $g = x_l$, jolloin $\int \mathbf{J}\ dV = 0$ eli monopolitermiä ei magneettikentän tapauksessa ole.

Seuraava eli dipolitermi käsitellään valitsemalla $f = x_l, g = x_n$, jolloin

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l\ dV' = x_n \int x_n^{'}\ J_l\ dV' = -\frac{1}{2} x_n \int (x_l^{'} J_n - x_n^{'} J_l)\ dV' \tag{5.75}$$

missä summataan kahdesti esiintyvän indeksin n yli ja käytettiin kaavaa 5.74. Integrandi muistuttaa vektoritulon komponenttia, ja pienen tarkastelun jälkeen huomataan, että

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l\ dV' = -\frac{1}{2} \epsilon_{lnp} x_n \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))_p\ dV' \tag{5.76}$$

missä ϵ_{lnp} on permutaatiosymboli ja summaus on nyt myös yli indeksin p. Lauseke sieventyy muotoon

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l \, dV' = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, dV')_l = (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_l \tag{5.77}$$

missä $\mathbf{m}$ on virtajärjestelmän magneettimomentti.

Vektoripotentiaalin multipolikehitelmän johtava termi on siis

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{5.78}$$

Magneettivuon tiheys saadaan laskemalla tämän roottori (HT):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \end{aligned} \tag{5.79}$$

Kaukaa katsottaessa ainoastaan systeemin magneettinen momentti vaikuttaa magneettikenttään. Tämä on muodoltaan samanlainen kuin sähköisen dipolin aiheuttama sähkökenttä 2.36. Tämän vuoksi magneettista momenttia kutsutaan usein **magneettiseksi dipolimomentiksi**.

5.5.3 Magneettikentän skalaaripotentiaali

Alueissa, joissa $\mathbf{J} = 0$, magneettikenttä on pyörteetön $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, joten näissä alueissa se voidaan ilmaista myös **magneettisen skalaaripotentiaalin** ψ avulla

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi \tag{5.80}$$

Koska toisaalta aina $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, skalaaripotentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{5.81}$$

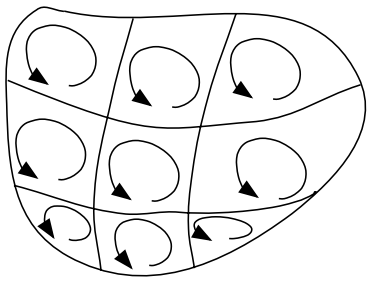
joten sähköstatiikasta tuttuja apuneuvoja voi soveltaa magnetostatiikan ongelmiin, kunhan ollaan huolellisia erilaisten reunaehtojen kanssa.

Koska etäällä olevan virtasilmukan luoma magneettikenttä on matemaattisesti samaa muotoa kuin sähködipolin kenttä, voidaan magneettinen skalaaripotentiaali ilmaista magneettisen dipolimomentin avulla. Koska

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right) \tag{5.82}$$

niin

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tag{5.83}$$



Kuva 5.2: Virtasilmukan muodostaminen pienistä silmukoista. Nettovirtaa kulkee vain ison silmukan ulkoreunalla.

Erona sähköstatiikkaan magneettinen skalaaripotentiaali on paikan yksiarvoinen funktio ainoastaan yhdesti yhtenäisissä alueissa. Tarkastellaan esimerkkinä aluetta, jossa on virtasilmukka. Nyt dipolitarkastelu ei käy suoraan päinsä. Virtasilmukan voidaan kuitenkin ajatella koostuvan monesta differentiaalisesta silmukasta, jotka muodostavat tiheän silmukan sulkeman pinnan peittävän verkon (kuva 5.2).

Verkon vierekkäisten elementtien virrat kumoavat toisensa, joten kokonaisvirta on sama kuin silmukkaa kiertävä virta. Kukin silmukka tuottaa ulkopuolelleen skalaaripotentiaalielementin

$$d\psi = \frac{d\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{(I\mathbf{n}\,dS)\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3} = -\frac{I}{4\pi}\,d\Omega \tag{5.84}$$

missä $d\Omega$ on differentiaalisen silmukan avaruuskulmaelementti. Integroimalla kaikkien pikkusilmukoiden yli saadaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi}\,\Omega \tag{5.85}$$

missä Ω on silmukan peittämä avaruuskulma katsottaessa pisteestä, jossa ψ lasketaan (tämä selittää ylläolevan miinusmerkin!). Kuljettaessa silmukan läpi ja tultaessa takaisin samaan tarkastelupisteeseen kasvaa avaruuskulma tekijällä 4π, joten potentiaali ei ole yksikäsitteinen, vaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi}(\Omega_0 \pm n\,4\pi) \tag{5.86}$$

Alueesta saadaan yhdesti yhtenäinen asettamalla tarkastelualueen rajapinnaksi jokin silmukan reunakäyrän rajoittama pinta.

Helppo esimerkki tilanteesta, jossa skalaaripotentiaali ei ole paikan yksiarvoinen funktio, on äärettömän pitkä suora virtajohdin. Jos johdin on

z-akselilla, niin sylinterikoordinaateissa skalaaripotentiaaliksi kelpaa $\psi = -I\phi/(2\pi)$, jolle $\psi(\phi) \neq \psi(\phi + 2\pi)$.

Magneettinen skalaaripotentiaali eroaa sähköisestä siinä, että jälkimmäisellä on selvä fysikaalinen tulkinta: se antaa varauksellisen hiukkasen potentiaalienergian sähköstaattisessa kentässä. Magneettikentässä tällaista tulkintaa ei ole.

5.6 Lorentzin voima

Tarkastellaan lopuksi varauksellisten hiukkasten välisiä magneettisia vuorovaikutuksia. Palautetaan mieleen origossa olevan varauksen q_1 pisteessä $\mathbf{r}$ olevaan varaukseen q aiheuttama Coulombin voima

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{5.87}$$

Tässä molemmat varaukset ovat levossa. Jos varaukset liikkuvat vakionopeuksilla $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{v}_1$, aiheuttaa varaus q_1 varaukseen q **magneettisen voiman**

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qq_1}{r^2}\mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{5.88}$$

Tämän voi päätellä soveltamalla kahden virtasilmukan välistä magneettista voimaa 5.28 infinitesimaalisille virta-alkioille. Laki on luonnollisesti myös kokeellisesti todennettavissa.

Magneettinen voima voidaan myös lausua muodossa (vrt. virtasilmukat)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{5.89}$$

missä $\mathbf{B}$ on magneettivuon tiheys

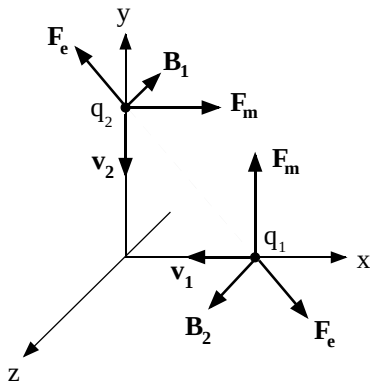
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1}{r^2}\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{5.90}$$

Superpositioperiaate pätee myös magneettikentän tapauksessa.

Yhteenlaskettua sähköistä ja magneettista voimaa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{5.91}$$

kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. Lauseke on voimassa myös ajasta riippuville kentille. Magneettinen voima on aina kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan, joten $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F_m} = 0$. Se ei siis tee työtä varattuun hiukkaseen. Jos halutaan kiihdyttää varauksia, tarvitaan aina sähkökenttä, vaikka se luotaisiinkin muuttuvan magneettikentän avulla.



Kuva 5.3: Rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymislakia?

Koskan $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, niin

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{5.92}$$

Verrataan magneettista ja sähköistä voimaa toisiinsa:

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v}{c}\frac{v_1}{c} \tag{5.93}$$

Tavallisilla nopeuksilla liikkuville varauksille sähköiset voimat ovat paljon voimakkaampia kuin magneettiset voimat. Magneettiset voimat eivät kuitenkaan ole merkityksettömiä, sillä vaikka aine on yleensä sähköisesti neutraalia, se saattaa olla voimakkaasti magnetoitunutta.

Lopuksi esitetään ongelma, johon palataan luvussa 9 (kuva 5.3). Kaksi samanmerkkistä varausta (q_1 ja q_2) liikkuu hetkellisesti negatiivisten x- ja y-akselien suuntaan. Hiukkasten välillä on sähköinen poistovoima $\mathbf{F}_e$. Varauksen q_1 aiheuttama magneettikenttä varauksen q_2 kohdalla osoittaa sivun sisään ja magneettinen voima $\mathbf{F}_m$ oikealle. Vastaavasti varauksen q_2 aiheuttama magneettikenttä varauksen q_1 kohdalla osoittaa sivulta ulospäin ja magneettinen voima ylöspäin. Siispä varauksen q_1 varaukseen q_2 kohdistama sähkömagneettinen kokonaisvoima ei ole vastakkaissuuntainen varauksen q_2 varaukseen q_1 kohdistamaan voimaan. Onko siis jouduttu ristiriitaan Newtonin kolmannen lain kanssa ja sitä tietä ristiriitaan liikemäärän säilymislain kanssa!?