Luku 6

Magneettikenttä väliaineessa

6.1 Magnetoituma

Edellä rajoituttiin magneettikentän määrittämiseen magneettisilta ominaisuuksiltaan tyhjönkaltaisessa väliaineessa. Aineen mikroskooppinen rakenne aiheuttaa todellisuudessa kullekin atomille ominaisen magneettisen dipolimomentin $\mathbf{m}_i$. Lasketaan yhteen kaikkien atomien dipolimomentit tilavuusalkiossa $\triangle V$. Aineen **magnetoituma** määritellään raja-arvona

$$\mathbf{M} = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{1}{\triangle V} \sum_i \mathbf{m}_i \tag{6.1}$$

Magnetoituma on siis väliaineen magneettisten dipolimomenttien tiheys paikan funktiona (vrt. polarisoituma). Koska magneettisen momentin SI-yksikkö on Am^2, on magnetoituman yksikkö A/m.

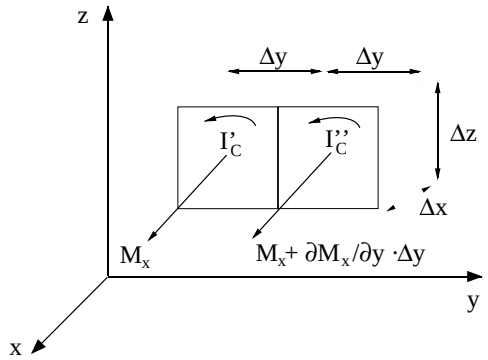
Jos dipolimomenttien tiheys on homogeeninen, kutakin dipolimomenttia vastaavat virtasilmukat summautuvat nollaan eivätkä aiheuta nettovirtaa. Jos jakautuma kuitenkin on epätasainen, on tarkastelupisteen eri puolilla eri määrä virta-alkioita ja tuloksena on kokonaisvirta $\mathbf{J}_M$. Virran laskemiseksi tarkastellaan kahta pientä tilavuusalkiota. Olkoon kummankin tilavuus $\triangle x \triangle y \triangle z$ ja sijaitkoot ne rinnakkain y-akselin suuntaan (kuva 6.1).

Jos ensimmäisen alkion magnetoituma on $\mathbf{M}(x, y, z)$, niin toisen magnetoituma on

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \triangle y + \text{korkeamman kertaluvun derivaattoja}$$

Ensimmäisen elementin magneettisen momentin x-komponentti saadaan ilmaistuksi silmukkavirran I'_C avulla

$$M_x \triangle x \triangle y \triangle z = I'_C \triangle y \triangle z \tag{6.2}$$



Kuva 6.1: Magnetoitumasta aiheutuvan virran laskeminen.

ja vastaavasti toiselle elementille

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}\triangle y\right)\triangle x\triangle y\triangle z = I''_C\triangle y\triangle z \tag{6.3}$$

Elementtien välistä nousee nettovirta z-akselin suuntaan

$$I'_C - I''_C = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\triangle x\triangle y \tag{6.4}$$

Toistamalla tarkastelu kahdelle rinnakkaiselle alkiolle x-akselilla (tarkkana merkkien kanssa!), saadaan z-akselin suuntaiseksi virraksi

$$I_C = \frac{\partial M_y}{\partial x}\triangle x\triangle y \tag{6.5}$$

Nämä ovat ainoat magneettiset momentit, jotka tuottavat virtaa z-akselin suuntaan. Laskemalla ne yhteen ja jakamalla pinta-alaelementillä saadaan magnetoitumisvirran tiheyden z-komponentiksi

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \tag{6.6}$$

eli vektorimuodossa

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \tag{6.7}$$

6.2 Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä

Lasketaan sitten magneettisen aineen aiheuttama magneettikenttä. Lähdetään liikkeelle vektoripotentiaalista (vrt. 5.78)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{6.8}$$

Tutuilla vektorikikoilla tämä saadaan muotoon

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' \tag{6.9}$$

missä S on tilavuuden V pinta. Pinnalla magnetoitumisvirran tiheys on

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M}\times\mathbf{n} \tag{6.10}$$

Tämä on magnetoitumisvirta yksikköpituutta kohti eli virta on ikään kuin litistetty kulkemaan yksiulotteisen "pinnan" läpi. Vektoripotentiaali määräytyy siis magnetoitumisvirrasta tilavuudessa V ja tilavuuden pinnalla S

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' \tag{6.11}$$

Tämä tulos ei liene yllätys (vrt. sähköstaattinen potentiaali). Tästä ei kuitenkaan ole aivan helppo laskea itse magneettikenttää, koska $\mathbf{J}_M = \nabla\times\mathbf{M}$. Lähdetään liikkeelle suoraan vektoripotentiaalin määritelmästä.

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\left[\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]dV' \tag{6.12}$$

missä gradientti kohdistuu vektoriin $\mathbf{r}$. Nyt integrandi saadaan muokatuksi muotoon (HT)

$$\nabla\times\left[\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] = \mathbf{M}(\mathbf{r}')\nabla\cdot\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] - (\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\nabla)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{6.13}$$

Oikean puolen ensimmäinen termi tuo magneettikenttään osuuden

$$\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\,4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV' = \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.14}$$

Toinen termi vaatii jälleen vähän vektoriakrobatiaa (HT) ja antaa tuloksen

$$\mathbf{B}_{\mathrm{II}}(\mathbf{r}) = -\mu_0\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'\right) = -\mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) \tag{6.15}$$

Tässä $\psi(\mathbf{r})$ on magneettisen materiaalin skalaaripotentiaali. Magneettikenttä on tämän potentiaalin ja paikallisten virtojen aiheuttaman kentän summa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.16}$$

Aineen ulkopuolella $\mathbf{M}$ on nolla, joten siellä kenttä saadaan skalaaripotentiaalista, joka on siis integraali aineessa olevista dipolimomenttialkioista.

Tässä on päädytty jokseenkin samanlaiseen kuvailuun kuin eristekappaleiden kanssa. Magneettisen skalaaripotentiaalin saa edelleen muotoon

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' \\ &= \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{n}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' - \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \\ &= \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\end{aligned} \tag{6.17}$$

Magneettisten napojen tiheys ρ_M ja **magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys** σ_M ovat samankaltaisia apusuureita kuin polarisaatiotiheydet ρ_P ja σ_P sähköstatiikassa.

6.3 Magneettikentän voimakkuus

Magneettisen aineen itsensä lisäksi kokonaiskenttään vaikuttaa vapaiden varausten aiheuttama virta. Esimerkiksi rauta voi olla magnetoitunutta ja lisäksi sen johtavuuselektronit kuljettavat "vapaata" virtaa. Niinpä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' - \mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.18}$$

Tämä voidaan laskea, mikäli $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{J}$ ovat tiedossa kaikkialla. Usein virta tunnetaankin, mutta $\mathbf{M}$ riippuu $\mathbf{B}$:stä.

Otetaan käyttöön apukenttä $\mathbf{H}$, jota kutsutaan **magneettikentän voimakkuudeksi**:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{6.19}$$

Tällöin

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' - \mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) \tag{6.20}$$

Tämä voi näyttää turhalta tempulta, koska $\mathbf{H}$ riippuu yhä $\mathbf{M}$:stä ρ_M:n ja σ_M:n kautta, mutta toimihan sama myös sähköstatiikassa.

Kentän $\mathbf{H}$ hyödyllisyys piilee siinä, että sille saadaan virrantiheydestä riippuva differentiaaliyhtälö. Palautetaan ensiksi mieleen, että $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ on kokeellinen laki, jonka mukaan magneettivuon tiheys voidaan aina palauttaa virtajakautumiin, eikä todellisista eristetyistä magneettisista monopoleista ole havaintoja. Nyt Ampèren laissa on tärkeä huomioida kaikki sähkövirrat

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}+\mathbf{J}_M) \tag{6.21}$$

missä $\mathbf{J}$ kuvaa varausten siirrokseen liittyvää vapaata virtaa. Tämä pätee kaikkialla muualla kuin pintavirtaa ylläpitävän kappaleen pinnalla. Ottamalla huomioon yhteys $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ saadaan tästä

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{6.22}$$

Siis $\mathbf{H}$-kentän pyörteet aiheutuvat vain vapaiden varausten kuljettamasta virrasta. Magneettisten ongelmien ratkomiseen tarvitaan tämän lisäksi tietenkin $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, reunaehdot ja rakenneyhtälö $\mathbf{B}$:n ja $\mathbf{H}$:n välille.

Integraalimuodossa $\mathbf{H}$:lle pätee

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{6.23}$$

eli magneettikentän voimakkuuden integraali pitkin suljettua lenkkiä on yhtä suuri kuin varausten kuljettama kokonaisvirta lenkin läpi.

6.4 Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti

Kenttien $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$ välinen suhde riippuu väliaineen ominaisuuksista samaan tapaan kuin kenttien $\mathbf{D}$ ja $\mathbf{E}$ yhteys. Magneettiset aineet ovat yleensä niin monimutkaisia, että **rakenneyhtälö** on määritettävä kokeellisesti. Suurelle joukolle aineita (LIH) yhteys on muotoa

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{6.24}$$

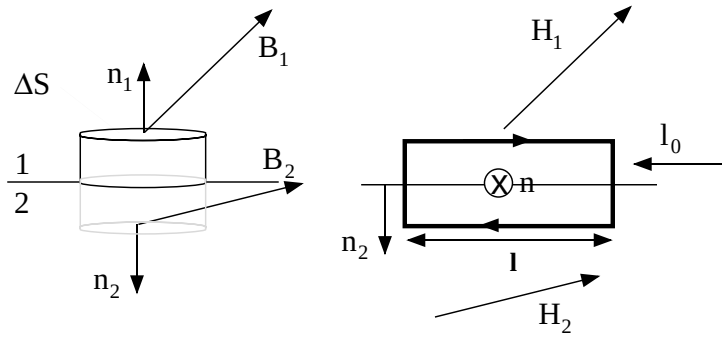
missä kerroin χ_m on **magneettinen suskeptiivisuus**. Epäisotrooppiselle mutta lineaariselle väliaineelle χ_m on tensori, epälineaarisessa väliaineessa se riippuu lisäksi magneettikentästä. SI-yksiköissä magneettinen suskeptiivisuus on laaduton suure (sähköisen χ:n laatu on sama kuin ϵ_0:n).

Jos $\chi_m > 0$, väliaine vahvistaa ulkoista magneettivuon tiheyttä ja ainetta kutsutaan **paramagneettiseksi**. Jos taas $\chi_m < 0$, magneettivuon tiheys heikkenee ja aine on **diamagneettista**. Sekä paramagneettisilla että diamagneettisilla aineilla magneettinen suskeptiivisuus on pieni: $|\chi_m| \ll 1$.

Kenttien $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{H}$ välinen lineaarinen yhteys merkitsee, että myös kenttien $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$ välinen rakenneyhtälö on lineaarinen

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H} \tag{6.25}$$

missä μ on väliaineen **permeabiliteetti**. Aineiden magneettisia ominaisuuksia tarkastellaan hieman enemmän tämän luvun lopussa.



Kuva 6.2: Magneettikenttävektoreiden reunaehtojen määrittäminen.

6.5 Magneettikenttävektoreiden reunaehdot rajapinnalla

Tarkastellaan kuvan 6.2 mukaista kahden väliaineen rajapintaa. Magneettivuon tiheyden **B** reunaehto on analoginen sähkövuon tiheyden **D** reunaehdon kanssa. Kuvan pillerirasian pinnan yli laskettu **B**:n integraali on

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = 0 \tag{6.26}$$

Litistämällä pillerirasian vaippa infinitesimaaliseksi saadaan

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \triangle S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \triangle S = 0 \tag{6.27}$$

missä $\triangle S$ on rasian kannen pinta-ala. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, niin

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{6.28}$$

eli magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

Magneettikentän voimakkuudelle saadaan reunaehto Stokesin lauseen avulla tarkastelemalla **H**:n lenkki-integraalia kuvan suorakaidetta pitkin

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{6.29}$$

missä **n** on normaalikomponentti integroimislenkin läpi ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0$). Litistettäessä integroimislaatikko jälleen infinitesimaaliseksi silmukan läpi kulkeva virta voi olla ainoastaan pintavirtaa **K**, joten

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \triangle S = \triangle l\, \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) \tag{6.30}$$

jonka avulla saadaan

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 \triangle l = \triangle l\, \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \triangle l\, (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{l}_0 \quad (6.31)$$

mistä seuraa reunaehto

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_2)_t \quad (6.32)$$

eli magneettikentän voimakkuuden tangentiaalikomponentti on jatkuva rajapinnan yli, ellei pinnalla ole pintavirtaa. Mikäli **H**-kenttä tunnetaan pinnan molemmin puolin, saadaan pintavirran tiheys lausekkeesta

$$\mathbf{K} = \mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \quad (6.33)$$

Useissa magnetismiin liittyvissä ongelmissa on näppärää tarkastella **vuoputkia**. Tarkastellaan magneettikentän kenttäviivoja, jotka ovat jokaisessa pisteessä kentän **B** tangentin suuntaisia. Vuoputki on ikäänkuin kimppu kenttäviivoja tai täsmällisemmin alue, jonka vaipan läpi ei kulje yhtään kenttäviivaa. Olkoot S_1 ja S_2 vuoputken päät. Tällöin vuoputken tilavuuden yli laskettu integraali on

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}'\, dS_1 = \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0 \quad (6.34)$$

missä $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{n}'$ ovat magneettikentän suuntaan laskettuja putken päiden normaalivektoreita. Magneettivuo pitkin vuoputkea on siis vakio. Tämä koskee vain **B**-kenttää eikä välttämättä päde **H**-kentälle:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{H}\, dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{M})\, dV = \int_V \rho_M\, dV \quad (6.35)$$

Vuoputkeen voi siis tulla magneettikentän voimakkuutta, mikäli aineella on nollasta poikkeava napavoimakkuus.

6.6 Reuna-arvotehtäviä magneettikentässä

Magneettiset reuna-arvotehtävät ovat yleensä monimutkaisempia kuin sähköstatiikan vastaavat ongelmat. Sähkövirrat, epätasainen magnetoituminen tai epälineaarinen rakenneyhtälö edellyttävät Laplacen yhtälöä monimutkaisempien yhtälöiden ratkomista ja hankaloittavat reunaehtoja. Rajoitutaan tässä yksinkertaisiin tilanteisiin.

Virrattomuus ($\nabla \times \mathbf{H} = 0$) tekee mahdolliseksi magneettikentän esittämisen skalaaripotentiaalin gradienttina $\mathbf{H} = -\nabla\psi$. Jos lisäksi aine on magneettisesti ainakin likimain lineaarista eli $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ja tasaisesti magnetoitunutta ($\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$), niin $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ja päästään ratkaisemaan Laplacen yhtälöä

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (6.36)$$

Esimerkki. Magnetoituva pallo tasaisessa magneettikentässä

Tämä ongelma on periaatteessa sama kuin luvun 3.5 eristepallo tasaisessa ulkoisessa sähkökentässä. Lausumalla ψ vyöhykeharmonisten funktioiden avulla ja käyttämällä reunaehtoja saadaan (HT) magneettikentälle lausekkeet pallon sisällä

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0}{1 + 2(\mu_0/\mu)}\,\mathbf{e}_z = vakio \tag{6.37}$$

ja pallon ulkopuolella

$$\mathbf{B}_1 = B_0\,\mathbf{e}_z + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^3 B_0(2\mathbf{e}_r\cos\theta + \mathbf{e}_\theta\sin\theta) \tag{6.38}$$

missä $\mathbf{e}_z$ on ulkoisen magneettikentän suuntainen, koordinaatiston origo on pallon keskipisteessä ja kulma θ on poikkeama z-akselilta. Kannattaa huomata, että nimenomaan $\mathbf{B}$-kenttä vastaa rakenteeltaan sähköstatiikan $\mathbf{D}$-kenttää.

Esimerkki. Tasaisesti magnetoituneen pallon kenttä tyhjössä

Olkoon pallon säde a ja magnetoituma vakio $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$. Tilanne on jälleen aksiaalisymmetrinen, joten magneettinen skalaaripotentiaali pallon ulkopuolella (1) ja sisällä (2) voidaan kirjoittaa (ks. luku 2.9.2)

$$\psi_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \tag{6.39}$$

$$\psi_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos\theta) \tag{6.40}$$

Nyt ei ole taustan kenttää, joten ulkokentässä kaikki r:n positiiviset potenssit on jätettävä pois. Sisäkentässä ei voi puolestaan olla negatiivisia potensseja, jotta ratkaisu olisi äärellinen pallon keskipisteessä. Reunalla $r = a$

$$H_{1\theta} = H_{2\theta} \tag{6.41}$$

$$B_{1r} = B_{2r} \tag{6.42}$$

$\mathbf{H}$:n reunaehdosta seuraa yksinkertaisesti

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} \tag{6.43}$$

$\mathbf{B}$-kentässä on mukana myös magnetoituma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.44}$$

ja tämän jatkuvuus reunalla edellyttää, että

$$-\mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \mu_0 M \cos\theta \tag{6.45}$$

Sijoittamalla näihin ψ:n lausekkeet saadaan yhtälöt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) P_n(\cos\theta) = \text{vakio} \tag{6.46}$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta)[C_{1n}(n+1)a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] \tag{6.47}$$

$$-\mu_0 M \cos\theta = 0$$

Muistetaan taas, että Legendren polynomit ovat ortogonaalisia funktioita. Kun $n = 0$, saadaan ehdot

$$C_{10} a^{-1} - A_{20} = \text{vakio} \tag{6.48}$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} = 0 \tag{6.49}$$

Siis $C_{10} = 0$ ja myös A_{20} voidaan valita nollaksi ilman, että sillä on vaikutusta kenttiin $\mathbf{B}$ tai $\mathbf{H}$. Termeille $n = 1$ on voimassa

$$C_{11} a^{-3} - A_{21} = 0 \tag{6.50}$$

$$2C_{11} a^{-3} + A_{21} - M = 0 \tag{6.51}$$

jonka ratkaisuna on $C_{11} = Ma^3/3$; $A_{21} = M/3$.

Kun $n \geq 2$, yhtälöt toteutuvat ainoastaan kertoimilla $C_{1n} = A_{2n} = 0$. Ongelma on ratkaistu. Potentiaalit ovat

$$\psi_1(r,\theta) = \frac{1}{3} M (a^3/r^2) \cos\theta \tag{6.52}$$

$$\psi_2(r,\theta) = \frac{1}{3} M r \cos\theta \tag{6.53}$$

ja $\mathbf{H}$-kentät saadaan näiden gradientteina

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} M (a^3/r^3)[2\mathbf{e}_r \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta] \tag{6.54}$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} M \mathbf{e}_z \tag{6.55}$$

Ulkoinen $\mathbf{B}$-kenttä on $\mu_0 \mathbf{H}_1$. Koska pallon magnetoituma $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$, jää pallon sisäiseksi $\mathbf{B}$-kentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M \mathbf{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \tag{6.56}$$

joka on siis vastakkaissuuntainen $\mathbf{H}$-kentälle. Ongelman voisi ratkaista myös suoraan integroimalla magnetoitumaa (yhtälö 6.17). Tasaisesti magnetoitunut pallo on analoginen tasaisesti polarisoituneen pallon kanssa.

6.7 Molekulaarinen magneettikenttä

Tarkasteltaessa aineen magnetismia molekyylitasolla kenttien $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$ välinen ero katoaa, sillä molekyylien ajatellaan sijaitsevan tyhjössä ja mikroskooppinen magneettikenttä $\mathbf{B}_m$ tarkasteltavan molekyylin kohdalla voidaan korvata mikroskooppisella kentällä $\mathbf{H}_m$ kirjoittamalla

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \tag{6.57}$$

Molekulaarisen magneettikentän muodostavat kaikki ulkoiset sähkövirrat ja kaikki molekulaariset dipolit lukuunottamatta molekyyliä, jonka kohdalla kenttä lasketaan. Tehdään tarkasteltavan pisteen ympärille onkalo, jonka ulkopuolinen väliaine käsitellään jatkumona samalla tavalla kuin luvussa 3.6 molekulaarista polarisoitumista määritettäessä. Molekulaarinen kenttä on siis

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{near} \tag{6.58}$$

missä $\mathbf{H}$ on makroskooppinen kenttä, $\mathbf{H}_s$ onkalon reunoilla olevien pintadipolien aiheuttama kenttä ja $\mathbf{H}_{near}$ onkalon sisällä olevien dipolien tuottama kenttä. Samanlaisella laskulla, jolla määritettiin $\mathbf{E}_m$ aiemmin, saadaan (vrt. tasaisesti magnetoitunut pallo)

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3}\mathbf{M} \tag{6.59}$$

Onkalossa olevat dipolit antavat puolestaan

$$\mathbf{H}_{near} = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \tag{6.60}$$

missä $\mathbf{r}_i$ on etäisyys onkalon keskipisteestä i:nteen dipoliin. Suurelle joukolle aineita $\mathbf{H}_{near}$ on merkityksettömän pieni, jolloin

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M} \tag{6.61}$$

6.8 Para- ja diamagnetismista

Tarkastellaan hieman yksityiskohtaisemmin väliaineen vaikutusta magneettikenttään rajoittuen kvalitatiiviseen käsittelyyn. Hyviä kuvauksia voi löytää korkeatasoisista lukion oppikirjoistakin (esim. Kurki-Suonio et al., Kvantti 2, jota tässä on käytetty yhtenä lähdeteoksena).

Aine magnetoituu ulkoisessa magneettikentässä. Väliaine ja kenttään tuodut kappaleet synnyttävät oman magneettikenttänsä. Tilanne on kuitenkin selvästi erilainen kuin sähkökentän tapauksessa, mikä lienee tuttua kaikille hankaussähkön ja kestomagneettien kanssa leikkineille. Kaikkien aineiden polarisoituminen sähkökentässä havaitaan siitä, että varattu kappale

Taulukko 6.1: Joitain dia- ($\chi_m < 0$) ja paramagneettisia ($\chi_m > 0$) aineita. Suskeptiivisuudet on annettu huoneenlämpötilassa. Kaasujen tapauksessa oletetaan lisäksi normaali ilmanpaine.

aine	suskeptiivisuus
alumiini	$2.1 \cdot 10^{-5}$
elohopea	$-2.8 \cdot 10^{-5}$
happi	$193.5 \cdot 10^{-8}$
hopea	$-2.4 \cdot 10^{-5}$
kulta	$-3.5 \cdot 10^{-5}$
kupari	$-0.98 \cdot 10^{-5}$
magnesium	$1.2 \cdot 10^{-5}$
timantti	$-2.2 \cdot 10^{-5}$
titaani	$18 \cdot 10^{-5}$
typpi	$-0.67 \cdot 10^{-8}$
vety	$-0.22 \cdot 10^{-8}$

vetää puoleensa neutraalejakin kappaleita. Sen sijaan magneeteilla on selvästi näkyvä vaikutus vain harvoihin aineisiin. Lähellä olevat kappaleet ja väliaineet eivät siksi yleensä häiritse merkittävästi magneettisia tutkimuksia.

Väliaineen vaikutusta magneettikenttään on yksinkertaista tutkia toroidikäämin avulla, koska käämin kenttä on kokonaan toroidin sisällä (vrt. eristeiden tutkimus kondensaattorin avulla). Kentän muoto ei muutu, jos toroidi täytetään väliaineella, vaan ainoastaan magneettivuon tiheys muuttuu. Väliaineen suhteellinen permeabiliteetti voidaan silloin mitata vertaamalla magneettivuon tiheyttä käämissä väliaineen kanssa ja ilman sitä.

Koska suurimmalla osalla aineista suhteellinen permeabiliteetti on lähellä ykköstä, käytetään useammin magneettista suskeptiivisuutta

$$\chi_m = \mu_r - 1 \tag{6.62}$$

ja monille aineille pätee yksinkertainen rakenneyhtälö

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \tag{6.63}$$

Ainetta kutsutaan diamagneettiseksi, jos $\chi_m < 0$ ja paramagneettiseksi, jos $\chi_m > 0$. Näille aineille on tyypillisesti $|\chi_m| < 10^{-3}$, joten yleensä voidaan aineen permeabiliteetti olettaa samaksi kuin tyhjön permeabiliteetti (taulukko 6.1). Poikkeuksena ovat ferromagneettiset aineet, jotka eivät noudata yksinkertaista magnetoitumislakia.

Aineen magneettisten ominaisuuksien mikroskooppinen selitys perustuu useisiin eri tekijöihin. Alkeishiukkaset ovat pieniä alkeismagneetteja, joiden

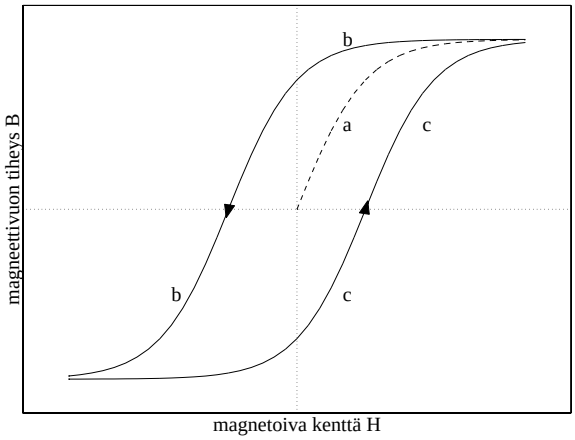
magneettimomentti liittyy hiukkasten spiniin. Elektronin magneettimomentti on noin 700 kertaa suurempi kuin protonin ja noin 1000 kertaa suurempi kuin neutronin magneettimomentti, joten elektronit määräävät aineen magneettiset ominaisuudet. (Neutroni ei siis kuitenkaan ole magneettisessa mielessä täysin neutraali.)

Elektronin kiertoliike atomissa vastaa virtasilmukkaa ja siitä aiheutuva magneettimomentti on samaa suuruusluokkaa kuin spinin aiheuttama. Rataliikkeestä johtuva magneettimomentti voidaan ymmärtää klassisella mallilla, jossa elektroni kiertää r-säteistä ympyrärataa kulmataajuudella $\omega = 2\pi/T$. Malli vastaa virtasilmukkaa, jonka pinta-ala on $A = \pi r^2$ ja jossa kulkee virta $I = q/T = qv/2\pi r$. Magneettimomentti on siis $m = IA = qvr/2$. Elektronin liikemäärämomentti radan keskipisteen suhteen on $L = m_0 vr$ (massa $= m_0$). Ottaen huomioon, että kyse on vektorisuureista, voidaan suuntasäännöt muistaen kirjoittaa $\mathbf{m} = -e/(2m_0)\mathbf{L}$, joka vastaa myös havaintoja. Samaan tulokseen päädytään, jos tarkastellaan pyörivän hiukkasen magneettimomentin ja liikemäärämomentin suhdetta (HT). Elektronin spinistä johtuva magneettimomentti on kuitenkin kaksinkertainen, joten klassinen kuva ei tässä anna oikeaa ennustetta. Spiniä ei voida selittää arkipäiväisen mielikuvan mukaan pyörimisestä johtuvaksi, vaan kyseessä on puhtaasti kvanttimekaaninen suure.

Atomin magneettimomentti muodostuu elektronien spinien ja rataliikkeen magneettimomenteista, jotka yleensä pyrkivät kumoamaan toisensa pareittain. Jos atomilla tai molekyylillä on parillinen määrä elektroneja, sen magneettimomentti yleensä puuttuu. Muuten atomien magneettimomentit ovat samaa suuruusluokkaa kuin elektroneilla.

Ulkoinen magneettikenttä suuntaa atomien ja metallien vapaiden elektronien magneettimomentteja siten, että niiden kenttä vahvistaa ulkoista kenttää aineessa. Tämä selittää paramagnetismin. Lämpötilan noustessa lämpöliike häiritsee atomien järjestäytymistä, jolloin suskeptiivisuus pienenee. Vastaavasti lämpötilan nousu heikentää pysyvien sähködipolien suuntautumisesta aiheutuvan polarisoitumista.

Ulkoinen magneettikenttä vaikuttaa myös elektronien rataliikkeeseen. Tällöin atomiin indusoituu magneettimomentti, joka suuntautuu ulkoista kenttää vastaan, mikä selittää diamagnetismin. Ilmiö tapahtuu kaikissa aineissa, mutta peittyy molekyylien magneettimomenttien alle, jos molekyyleillä on magneettimomenttia (vrt. pysyvä ja indusoituva polarisaatio sähkökentän vaikutuksesta). Diamagneettinen suskeptiivisuus ei riipu merkittävästi lämpötilasta, koska atomien lämpöliike ei pysty häiritsemään nopeasti ulkoiseen kenttään sopeutuvia elektroneja.



Kuva 6.3: Magneettivuon tiheys ferromagneettisessa aineessa ei ole magnetoivan kentän yksikäsitteinen funktio. Kuvaan on piirretty myös magnetoitumiskäyrä (a).

6.9 Ferromagnetismi

Joissain kiinteissä aineissa atomien välinen vuorovaikutus pyrkii suuntaamaan magneettimomentit samansuuntaisiksi, jolloin muodostuu atomin kokoon nähden suuria magneettisia alkeisalueita. Ulkoinen kenttä puolestaan kasvattaa alkeisalueita ja pyrkii kääntämään kaikkien alueiden magneettimomentit samansuuntaiseksi. Tämä on ferromagnetismin perusmekanismi. Ferromagneettisia aineita ovat esimerkiksi rauta, koboltti ja nikkeli sekä näiden monet yhdisteet. Riittävän korkeassa lämpötilassa (Curie-pisteessä) ferromagneettinen aine muuttuu paramagneettiseksi. Raudan Curie-piste on $770°C$ ja nikkelin $358°C$.

Myös ferromagneettisille aineille on tapana kirjoittaa rakenneyhtälö μ:n avulla, mutta nyt $\mu = \mu(\mathbf{H})$ ei välttämättä ole yksikäsitteinen funktio. Vastaesimerkkinä on hystereesi (kuva 6.3), jossa magnetoivan kentän $\mathbf{H}$ ja aineen magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}$ välinen yhteys on erilainen riippuen siitä, ollaanko magnetoivaa kenttää kasvattamassa vaiko pienentämässä. Suskeptiivisuus χ_m on siis kentän $\mathbf{H}$ funktio ja yleisesti ottaen iso.

Kun kentän $\mathbf{H}$ voimakkuutta kasvatetaan, aineen magnetoituminen voimistuu. Tätä voi jatkua kuitenkin vain tiettyyn kyllästysarvoon $\mathbf{M}_s$ asti. Tämän jälkeenkin $\mathbf{B}$-kenttä jatkaa kasvamistaan lineaarisesti termin $\mu_0\mathbf{H}$ myötä. Olkoon ferromagneetti nyt magnetoitu tällä tavoin ja annetaan $\mathbf{H}$:n alkaa pienetä. Nyt $\mathbf{B}$-kenttä ei pienene saman käyrän mukaisesti vaan tapahtuu hystereesi-ilmiö.

Ferromagnetismin vastakohta on tilanne, jossa järjestyneen vastakkais-

suuntaisista spineistä muodostuvan rakenteen magneettinen momentti on nolla. Tällaista ainetta kutsutaan **antiferromagneetiksi**. Vielä yleisempi järjestynyt rakenne on sellainen, jossa on vastakkaisia spinejä, mutta kuitenkin nollasta poikkeava kokonaismagneettimomentti. Tällaisia aineita kutsutaan **ferriiteiksi**. Niitä ovat esimerkiksi tietyt rautaoksidit ($MOFe_2O_3$, missä M on jokin kaksivalenssinen metalli-ioni). Tunnetuin ferriitti lienee magnetiitti (Fe_3O_4). Ferriittien teknologinen merkitys on niiden korkeissa magnetoituman kyllästymisarvoissa ja huonossa sähkönjohtavuudessa. Ferriittien tyypilliset resistiivisyydet ovat luokkaa 1–10^4 Ωm, kun raudan resistiivisyys on vain 10^{-7} Ωm. Ferriittejä käytetään etenkin korkeataajuuslaitteissa, joissa pyörrevirtoihin liittyvä energianhäviö on ongelma.