Luku 8

Magneettinen energia

Luvussa 4 nähtiin, että staattiseen sähkökenttään liittyy tietty energia. Näin on myös magneettikentän laita, sillä Faradayn lain mukaan magneettikentän muuttaminen aiheuttaa muutosta vastustavan voiman ja siten magneettikentän luominen edellyttää työtä.

8.1 Kytkettyjen virtapiirien energia

Tarkastellaan yksinkertaista virtasilmukkaa, jossa kulkee virta I ja jonka vastus on R. Liitetään virtapiiriin jännitelähde V. Tällöin

$$V + \mathcal{E} = IR \tag{8.1}$$

missä $\mathcal{E}$ on virtasilmukkaan indusoituva smv. Jännite tekee työtä siirtämällä varauksia silmukassa. Differentiaalisen varauksen $dq = I\,dt$ osalta työ on

$$V\,dq = V\,I\,dt = -\mathcal{E}\,I\,dt + I^2 R\,dt = I\,d\Phi + I^2 R\,dt \tag{8.2}$$

Termi $I^2 R\,dt$ antaa resistiivisen tehon hävikin lämmöksi (Joulen lämmitys). Termi $I\,d\Phi$ on indusoitunutta sähkömotorista voimaa vastaan tehty työ, joka tarvitaan magneettikentän muuttamiseen:

$$dW_b = I\,d\Phi \tag{8.3}$$

missä alaindeksi b viittaa ulkoisen jännitelähteen (esim. pariston) tekemään työhön.

Tarkastellaan sitten systeemiä, joka koostuu n kappaleesta virtapiirejä:

$$dW_b = \sum_{i=1}^{n} I_i\,d\Phi_i \tag{8.4}$$

Oletetaan, että kaikki vuonmuutokset ovat peräisin systeemin silmukoista, jolloin

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\, dI_j = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, dI_j \tag{8.5}$$

Oletetaan lisäksi, että silmukat ovat jäykkiä ja paikallaan, jolloin energianmuutoksiin ei liity mekaanista työtä. Tällöin dW_b on yhtäsuuri kuin magneettisen energian muutos dU. (Virrat oletetaan myös riittävän hitaasti muuttuviksi, jolloin ei tarvitse ottaa huomioon säteilyhäviöitä.)

Rajoitetaan tarkastelu yksinkertaiseen väliaineeseen, jossa magneettivuon ja virran välinen suhde on lineaarinen. Lasketaan virtapiirisysteemin energia lähtien tilasta, jossa kaikille virroille $I_i = 0$. Väliaineen lineaarisuudesta johtuen lopullinen magneettinen energia ei riipu tavasta, jolla tila on saavutettu. Näin ollen kaikkien silmukoiden virtaa voidaan kasvattaa nollasta lopputilaan samassa tahdissa eli joka hetki $I_i' = \alpha I_i$, missä α kasvaa $0 \to 1$. Tällöin $d\Phi_i = \Phi_i\, d\alpha$ ja systeemin **magneettinen energia** on

$$U = \int dW_b = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} I_i' \Phi_i\, d\alpha = \sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i \tag{8.6}$$

Tämä voidaan myös ilmaista summana silmukoiden yli

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} I_i I_j \tag{8.7}$$

josta saadaan suoraan yhdelle silmukalle ($M_{11} = L_1 = L =$ silmukan itseinduktanssi)

$$U = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \tag{8.8}$$

Tämän voi rinnastaa kondensaattorin energiaan $Q^2/(2C)$, joka ilmaisee kondensaattorin sähkökenttään varastoituneen energian. Kahdelle silmukalle saadaan

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{8.9}$$

missä otettiin huomioon symmetria $M_{12} = M_{21} = M$. Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että $L_1 L_2 \geq M^2$.

Virtasilmukkajärjestelmän energia voidaan määrittää myös kokoamalla systeemi silmukoista, joihin yksi kerrallaan luodaan virrat I_i. Silmukkaan indusoituva smv tekee työtä teholla $-LI\frac{dI}{dt}$, joten kasvatettaessa virta nollasta lopulliseen arvoonsa tarvitaan ulkoista työtä määrä $\frac{1}{2}LI^2$. Tarkastellaan sitten silmukkaparia, joista ensimmäiseen synnytetään virta I_1 ja ulkoinen työ on $\frac{1}{2}LI_1^2$. Pidetään sitten I_1 vakiona ja kasvatetaan toisen silmukan virta nollasta arvoon I_2. Tällöin tehdään työtä sekä silmukkaan 2 indusoituvaa smv:tä vastaan ($\frac{1}{2}LI_2^2$) että silmukkaan 1 indusoituvaa smv:tä vastaan ($\int_0^t MI_1 dI_2/dt = MI_1I_2$). Systeemin kokonaisenergia on siis $\frac{1}{2}LI_1^2 + \frac{1}{2}LI_2^2 + MI_1I_2$. Sama idea yleistyy suuremmalle silmukkajoukolle.

8.2 Magneettikentän energiatiheys

Tarkastellaan edellä käsiteltyä tilannetta magneettikentän näkökulmasta. Oletetaan väliaine edelleen lineaariseksi ja virtapiirit yksinkertaisiksi silmukoiksi. Tällöin magneettivuoksi saadaan Stokesin lauseen avulla

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \tag{8.10}$$

joten magneettinen energia on

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \tag{8.11}$$

Siirrytään sitten tilanteeseen, missä sähkövirta on tilavuusvirtaa $\mathbf{J}$ ja C_i on suljettu lenkki johtavassa väliaineessa. Tilannetta voi ajatella suurena joukkona lähellä toisiaan olevia silmukoita, jolloin $I_i d\mathbf{l}_i \to \mathbf{J}\, dV$ ja

$$\sum_i \oint_{C_i} \;\to\; \int_V$$

eli

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, dV \tag{8.12}$$

Sähköstatiikassa energia lausuttiin vastaavasti varaustiheyden ja potentiaalin tulon integraalina (luku 4.2).

Koska $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ja $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, niin divergenssiteoreemaa käyttämällä saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}\, dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{8.13}$$

Järkevä oletus on, että virtasilmukat eivät ulotu äärettömyyteen, joten pinta S voidaan siirtää kauas niiden ulkopuolelle. Staattinen kenttä $\mathbf{H}$ heikkenee vähintään kuten $1/r^2$ ja vektoripotentiaali $\mathbf{A}$ vähintään kuten $1/r$, mutta pinta kasvaa vain kuten r^2. Pintaintegraali häviää kuten $1/r$ tai nopeammin r:n kasvaessa rajatta. Tilavuusintegraali voidaan siis ottaa koko avaruuden yli, jolloin

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dV \tag{8.14}$$

Samoin kuin sähköstaattisen energian tapauksessa voidaan määritellä **magneettinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \tag{8.15}$$

Tulos pätee siis **lineaariselle** magneettiselle väliaineelle. Mikäli väliaine on lisäksi isotrooppista, saadaan

$$u = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \tag{8.16}$$

Huom. Tässä tarkasteltiin stationaarista tilannetta. Sähkömagneettisen kentän energia yleisessä ajasta riippuvassa tilanteessa käsitellään luvussa 9. Säteilykenttien tapauksessa pintaintegraalit eivät välttämättä häviä.

Esimerkki. Koaksiaalikaapelin energiatiheys

Tarkastellaan koaksiaalikaapelia, jonka keskellä on a-säteinen johdin, sen ulkopuolella sylinterisymmetrisesti eristekerros välillä $a \leq r \leq b$, jonka ulkopuolella on jälleen johtava sylinterisymmetrinen kerros $b \leq r \leq c$. Oletetaan, että kaikkialla $\mu = \mu_0$. Kulkekoon sisäjohtimessa tasaisesti jakautunut virta I ja ulkojohtimessa virta $-I$. Suoran johtimen aiheuttama magneettikenttä on Amperen kiertosäännön perusteella

$$\mathbf{B} = B_\theta(r)\,\mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\theta \tag{8.17}$$

Tarkastellaan sisempää johdinta ($0 \leq r \leq a$). Tällöin $I(r)/I = (\pi r^2)/(\pi a^2)$, joten

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \tag{8.18}$$

ja magneettinen energiatiheys on

$$u_a = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} \tag{8.19}$$

Sisemmän johteen yli integroitu energia l:n pituisella matkalla on

$$U_a = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} r\,dr\,d\theta\,dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi} \tag{8.20}$$

Johtimien välissä kenttä määräytyy sisemmän johtimen kokonaisvirrasta:

$$\begin{aligned} B_{\theta b} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ u_b &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \\ U_b &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln\frac{b}{a} \end{aligned} \tag{8.21}$$

missä siis kokonaisenergia tarkoittaa johtimien välisessä alueessa olevaa kokonaisenergiaa. Uloimmassa johtimessa vastaavat lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta c} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2-b^2)}\left(\frac{c^2}{r}-r\right) \\ u_c &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2-b^2)^2}\left(\frac{c^4}{r^2}-2c^2+r^2\right) \\ U_c &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2-b^2)^2}\left[c^4\ln\frac{c}{b}-\frac{1}{4}(c^2-b^2)(3c^2-b^2)\right] \end{aligned} \tag{8.22}$$

ja kokonaisenergia on jälleen kyseisen välin yli integroitu energiatiheys. Koaksiaalikaapelin ulkopuolella kenttä on nolla, joten energiakin on siellä nolla.

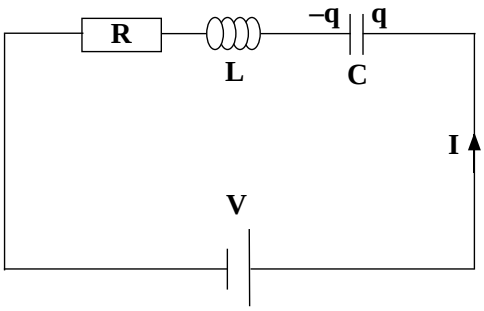
8.3 RLC-piiri

Kerrataan RLC-piirien perusasioita induktion ja sähkömagneettisen energian havainnollistamiseksi. Asia on sinänsä toivottavasti tuttua peruskurssilta. Tarkastellaan yksinkertaista virtapiiriä, jossa on sarjaan kytkettynä vastus (resistanssi R), käämi (induktanssi L) ja kondensaattori (kapasitanssi C) (kuva 8.1). Lisäksi piirissä on jännitelähde $V(t)$.

Valitaan kondensaattorin varauksen merkki ja virran positiivinen suunta kuvan mukaisesti, jolloin Kirchhoffin säännöstä saadaan

$$V - L\frac{d^2I}{dt^2} = RI + q/C \tag{8.23}$$

Derivoimalla ajan suhteen ja käyttämällä yhteyttä $dq/dt = I$ saadaan vir-



Kuva 8.1: Yksinkertainen RLC-piiri. Kondensaattorin sen levyn varaus on $+q$, johon positiivinen virta tuo varausta, jolloin $I = dq/dt$.

ralle toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{V}{L} \tag{8.24}$$

Tarkastellaan ensin ideaalista tapausta, jossa piirin vastus on häviävän pieni (LC-piiri). Oletetaan, ettei piirissä myöskään ole jännitelähdettä. Kyseessä on siis kondensaattorin purkaminen käämin kautta. Tällöin 8.24 on harmonisen värähtelijän liikeyhtälö, ja värähtelyn kulmataajuus on $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Jos kondensaattorin varaus on aluksi Q, niin ajan funktiona se muuttuu sinimuotoisesti: $q(t) = Q\cos\omega t$ ja $I(t) = -\omega Q\sin\omega t$. Systeemin sähkömagneettinen energia on $U(t) = LI^2/2 + q^2/(2C) = Q^2/(2C)$ eli koko ajan sama kuin kondensaattorin sähköstaattinen energia aluksi. Kokonaisenergia siis säilyy, se vain jakautuu sähkö- ja magneettikentän energiaksi (säteilyhäviöitä ei tässä oteta huomioon).

Kondensaattorin varaus alkaa aluksi purkautua käämin kautta. Itseinduktion takia tämä ei tapahdu silmänräpäyksessä. Induktiovirta kulkee myös sen hetken jälkeen, jolloin kondensaattorin varaus on nolla. Virta kulkee niin kauan samaan suuntaan, että levyjen varaukset ovat alkutilaan nähden vastakkaismerkkiset. Sen jälkeen kondensaattorin varaus alkaa taas purkautua jne.

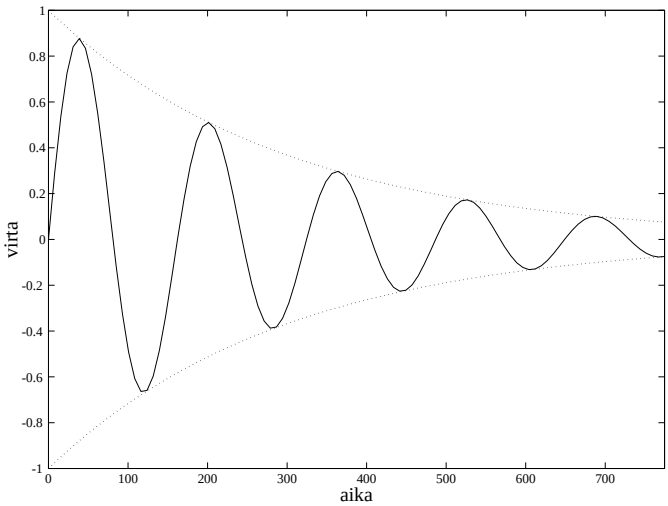
Todellisessa piirissä on aina jonkin verran resistanssia. Tilanteen laskennallinen tarkastelu on suoraviivaista differentiaaliyhtälöiden käsittelyä eikä sitä käydä tässä läpi. Mainitaan vain esimerkiksi tilanne, jossa piiriin kytketään tasajännite V hetkellä $t = 0$, ja kondensaattori on alkuhetkellä varaamaton. Piirin virta on silloin

$$I(t) = (V_0/\omega L)e^{-Rt/(2L)}\sin\omega t \tag{8.25}$$

missä $\omega = \sqrt{1/LC - (R/(2L))^2}$. Kulmataajuus ω voi tässä tapauksessa olla imaginaarinen, mutta joka tapauksessa piirin virta vaimenee eksponentiaalisesti. Kuvassa 8.2 on esitetty tilanne, jossa ω on reaalinen. Tässä vaiheessa kannattaa myös miettiä, mitä virralle tapahtuu kondensaattorissa.

8.4 Epälineaariset energiahäviöt

Poiketaan nyt ferromagnetismiin energianäkökulmasta. Todellinen makroskooppinen ferromagneetti käyttäytyy huomattavasti molekyylitasoa rakeisempana. Aine koostuu ferromagneettisista alueista, jotka ovat magnetoituneet eri suuntiin ja joiden välillä on suuruusluokkaa 100 atomin paksuisia seiniä. Kun nämä alueet järjestyvät uudelleen ulkoisen magneettikentän muuttuessa, syntyy energiaa kuluttavaa kitkaa. Tarkasteltaessa aiemmin



Kuva 8.2: Vaimeneva värähtely RLC-piirissä. Katkoviivoilla on piirretty vaimennusfunktion $\pm exp(-Rt/2L)$ kuvaaja.

sähkömagneettista energiaa väliaineet oletettiin lineaarisiksi. Ferromagneettinen aine on kuitenkin epälineaarista ja eteen tulee kysymys, mitä tapahtuu, kun hystereesisilmukkaa kierretään ympäri. Tarkastellaan virtapiiriä, jonka muodostaa ferromagneettisen aineen ympärille kierretty kela (N kierrosta), johon ulkoinen energian lähde syöttää virtaa.

Jos magneettivuo kelan läpi muuttuu tekijällä $\delta\Phi$, niin ulkoinen energianlähde tekee sähkömotorista voimaa vastaan työn

$$\delta W_b = NI\delta\Phi \tag{8.26}$$

Ajatellaan ferromagneetti pätkäksi magneettista silmukkaa eli aluetta, jossa magneettikenttä poikkeaa nollasta. Tällöin kelan kohdalla Amperen kiertosäännön mukaan $NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$. Merkitsemällä magneettisen silmukan pinta-alaa $d\mathbf{l}$:n kohdalla A:lla saadaan

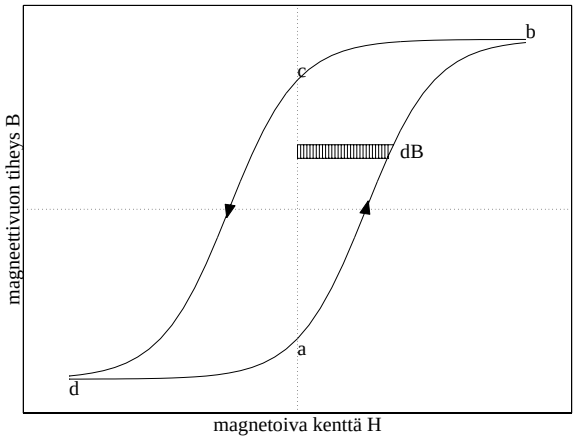
$$\delta W_b = \oint \delta\Phi\, \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A\, \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dl = \int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dV \tag{8.27}$$

Mikäli ferromagneetti käyttäytyy palautuvasti, saadaan systeemin magneettinen energia integroimalla magneettivuon tiheys arvosta $\mathbf{B} = 0$ lopulliseen arvoonsa. Lineaariselle aineelle tulos on tuttu

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, dV \tag{8.28}$$

Lauseke 8.27 on kuitenkin yleisempi ja antaa oikean työn myös hystereesitilanteessa. Magneettikentän muutosta vastaava työ yksikkötilavuudessa on

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{8.29}$$



Kuva 8.3: Yksikkötilavuutta kohti tehty työ ferromagneettisessa syklissä.

Tarkastellaan nyt hystereesisykliä, joka alkaa H:n arvosta 0, kasvaa arvoon H_{max}, pienenee arvoon $-H_{max}$ ja palaa sen jälkeen takaisin nollaan (kuva 8.3).

Työ kuvan 8.3 pisteestä a pisteeseen b

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H\, dB \tag{8.30}$$

on hystereesikäyrän ab ja B-akselin välinen pinta-ala ja se on positiivinen koska sekä H että dB ovat positiivisia. Vastaavasti $(w_b)_{bc}$ on B-akselin ja käyrän bc välinen pinta-ala, mutta se pitää laskea negatiivisena, koska $dB < 0$. Samoin lasketaan työ negatiivisilla H ja lopputuloksena yhden hystereesisyklin myötä tehty työ on silmukan sisään BH-tasossa jäävä pinta-ala

$$w_b = \oint H\, dB \tag{8.31}$$

Täyden kierroksen jälkeen ferromagneetin tila on sama kuin alussa, joten sen magneettinen energia on yhtä suuri kuin aluksi. Ulkoinen energianlähde on kuitenkin tehnyt työtä, joka on kulunut magneettisten alueiden uudelleen järjestäytymiseen. Kyseessä on palautumaton SM-energian häviö lämmöksi. Tämän ilmiön vuoksi esimerkiksi muuntaja lämpenee. Yleensäkin hystereesihäviöt on tärkeää huomioida rakennettaessa vaihtovirtalaitteita. Ylläoleva lasku tehtiin yhdelle syklille, joten mitä korkeammalla taajuudella laite toimii, sitä nopeammin hystereesi hävittää energiaa.

Käytännössä ferromagneettinen sykli on usein mielekkäämpää käsitellä magneettikentän voimakkuuden ja magnetoituman avulla. Tämä onnistuu

seuraavasti ($\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$):

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H\, dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \tag{8.32}$$

Termi $\mu_0 H\, dH$ on tyhjössä tehty työ, joka on nolla integroituna kokonaisen syklin yli ja termi $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ on materiaalille ominainen työ. Koko syklin yli työ on siis

$$w_b = \mu_0 \oint H\, dM = -\mu_0 \oint M\, dH \tag{8.33}$$

missä on käytetty hyväksi lauseketta $d(MH) = H\, dM + M\, dH$. Kokonaisdifferentiaalin $d(MH)$ integraali on nolla riippumatta aineen ominaisuuksista.

8.5 Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin

Siirretään virtapiirijärjestelmän yhtä silmukkaa matka $d\mathbf{r}$. Oletetaan, että silmukoissa kulkevat virrat säilyvät ennallaan. Tällöin siirroksessa tehty työ on $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, joka koostuu kahdesta osasta:

$$dW = dW_b - dU \tag{8.34}$$

missä dU on magneettisen energian muutos ja dW_b on ulkoisten lähteiden tekemä työ, jotta virrat säilyvät ennallaan.

Eliminoidaan dW_b olettamalla silmukat jälleen jäykiksi ja lineaarinen väliaine. Magneettisen energian muutos on

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i\, d\Phi_i \tag{8.35}$$

Toisaalta

$$dW_b = \sum_i I_i\, d\Phi_i \tag{8.36}$$

joten $dW_b = 2\, dU$ ja $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ eli voima saadaan energian gradienttina olettaen virrat vakioiksi

$$\mathbf{F} = \nabla U \Big|_I \tag{8.37}$$

Usein tilanne on sellainen, että virtapiirin liike rajoittuu kiertymiseen jonkin akselin ympäri. Tällöin $dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$, missä $\boldsymbol{\tau}$ on magneettinen vääntömomentti ja $d\boldsymbol{\theta}$ on kiertymän kulmaelementti. Vääntömomentti akselin i suhteen on siten

$$\tau_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right)_I \tag{8.38}$$

Tarkasteltu tilanne on siis samantapainen kuin luvussa 4.4, jossa johdesysteemi pidettiin vakiopotentiaalissa ulkoisen jännitelähteen avulla.

Joissain tapauksissa virtapiirien läpi kulkeva magneettivuo voidaan olettaa vakioksi. Tällaisiin tilanteisiin joudutaan tarkasteltaessa hyvin johtavia väliaineita kuten suprajohteita tai täysin ionisoitunutta harvaa plasmaa. Tällöin mikään ulkoinen lähde ei tee työtä eli $dW_b = 0$ ja

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU \tag{8.39}$$

Nyt voiman ja vääntömomentin komponentit saadaan derivoimalla $-U$:ta pitäen Φ vakiona, mikä vastaa sähköstatiikassa vapaiden johteiden systeemiä.

Sovellusesimerkki on avaruusaluksen asennonsäätö. Maapallon magneettikentän vaikutuksen alaisena olevaan satellittiin rakennetaan kelajärjestelmä. Kun satelliittia halutaan kääntää, ajetaan keloihin sellaiset virrat, että satelliitti kääntyy haluttuun kulmaan magneettikenttään nähden. Menetelmän etuna on se, että operaatio voidaan tehdä aurinkoenergian avulla, haittana taas kentän pienuudesta johtuva vääntömomentin heikkous ja siten operaation hitaus.

Esimerkki. Kahden virtasilmukan välinen voima

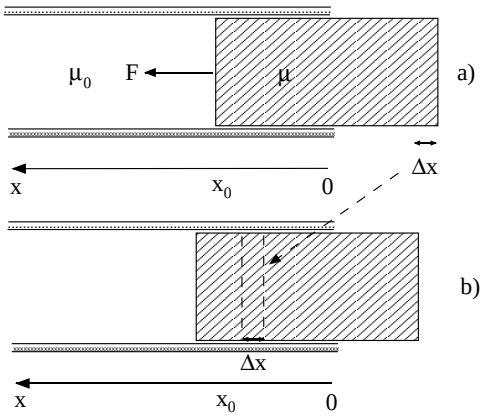
Palataan magnetostatiikan alkuun, missä kerrottiin Ampèren empiirisestä lausekkeesta voimalle kahden virtasilmukan välillä (5.28). Lasketaan sama tulos tämän luvun keinoin. Nyt on oltava tarkkana, sillä energian lauseketta on derivoitava silmukoiden välisen keskinäisen etäisyyden suhteen. Selvintä on määritellä $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{x}_2$, jolloin $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ on silmukoiden välinen keskinäinen etäisyys, josta systeemin magneettinen energia riippuu (silmukoiden oletetaan säilyttävän muotonsa ja suuntautumisensa). Tällöin silmukoiden välinen magneettinen voima on

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{R}) = I_1 I_2 \nabla_{\mathbf{R}} M(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \nabla_{\mathbf{R}} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad = \\ \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \nabla_{\mathbf{R}} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}\end{aligned} \tag{8.40}$$

Nyt derivointi voidaan viedä integrointien ohitse:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 \frac{\mathbf{R} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{R} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} \quad = \\ -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\end{aligned} \tag{8.41}$$

Ensi silmäyksellä näyttää kuin olisi saatu eri tulos kuin aiemmin. Näin ei ole, minkä osoittaminen jää harjoitustehtäväksi. Voiman lausekkeesta nähdään välittömästi, että voiman ja vastavoiman laki pätee umpinaisille virtasilmukoille.



Kuva 8.4: Solenoidiin työnnettyyn rautasauvaan vaikuttava voima.

Esimerkki. Rautatanko solenoidin sisällä

Luvussa 4 tarkasteltiin levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin kohdistuvaa voimaa. Tutkitaan nyt solenoidin sisällä olevaa rautatankoa, jonka poikkipinta-ala on A ja permeabiliteetti μ. (Kyseessä saa olla mikä tahansa aine, joka noudattaa yksinkertaista magnetoitumislakia.) Olkoon solenoidin pituus l ja olkoon sitä kierretty N kierrosta johteella, jossa kulkee vakiovirta I. Vedetään tankoa ulos solenoidista kunnes siitä on enää puolet sisällä ja lasketaan voima, joka yrittää vetää tankoa takaisin (kuva 8.4).

Ongelma olisi aika vaikea, jos kysyttäisiin alkuperäisen tai lopullisen tilanteen todellista magneettista energiaa, koska silloin olisi huomioitava reunojen vaikutukset. Koska voima on energian gradientti, sen määrittämiseksi riittää tarkastella kahden eri tilan eroa. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista lyhyttä siirrosta. Kuvien a) ja b) välinen ero on, että pituusalkio $\triangle x$ on siirretty kentän ulkopuolisesta osasta solenoidin sisään, kun taas hankalan reunan kohdalla kaikki näyttää samalta molemmissa kuvissa. Koska **H**-kenttä on lähes pitkittäinen alueessa $\triangle x$ ja koska **H**-kentän tangentiaalikomponentti on jatkuva sauvan sylinterinmuotoisen reunan yli, voidaan magneettinen energia laskea lausekkeesta

$$U = \frac{1}{2}\int \mu H^2\, dV \tag{8.42}$$

missä **H** on vakio sauvan sisä- ja ulkopuolella, koska I on vakio. Siirroksen jälkeen energia on

$$U(x_0 + \triangle x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}\int_{A\triangle x} (\mu - \mu_0) H^2\, dV$$

$$= \quad U(x_0) + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2}{l^2} A \triangle x \tag{8.43}$$

Koska voima on energian gradientti, se voidaan arvioida tästä

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2}\chi_m \mu_0 H^2 A \tag{8.44}$$

Voima osoittaa x:n positiiviseen suuntaan eli vetää sauvaa solenoidiin, jos $\chi_m > 0$.

8.6 Maxwellin jännitystensori magnetostatiikassa

Tarkastellaan aluetta V, jossa on stationaarinen virrantiheys $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Oletetaan lisäksi, että alueessa on vain tavallista ainetta, jolle $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Tilavuusalkioon dV kohdistuva magneettinen voima on Lorentzin lain mukaan $\mathbf{dF} = (\rho dV)\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$, joten voimatiheys on $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H}$. Amperen lain mukaan $\mathbf{f} = \mu_0(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$ ja komponenteittain (HT)

$$f_i = \mu_0 \sum_{j=1}^{3} H_j \partial_j H_i - \frac{1}{2}\mu_0 \partial_i \mathbf{H}^2 \tag{8.45}$$

Otetaan mallia sähköstatiikasta ja määritellään magnetostaattinen Maxwellin jännitystensori

$$T_{ij}^{(m)} = B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \tag{8.46}$$

jolloin

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j T_{ij}^{(m)} \tag{8.47}$$

Edelleen sähköstatiikan analogian perusteella saadaan kokonaisvoima

$$\mathbf{F} = \int_{\partial V} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\ dS) = \mathbf{F}^S \tag{8.48}$$

Pintavoima $\mathbf{F}^S$ voidaan osoittaa ekvivalentiksi voiman $\mathbf{F}$ kanssa samalla tavalla kuin sähköstatiikassa.