Luku 9

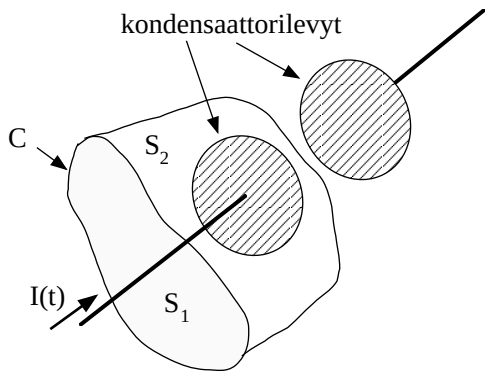
Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa elektrodynamiikan peruspilarit sillä tasolla, jolla ne tunnettiin 1860-luvun alussa. Maxwell huomasi yhtälöissä piilevän teoreettisen ongelman: Mitä tapahtuu, jos varaustiheys ja siten sähkökenttä muuttuvat ajallisesti? Ampèren laki on voimassa vain staattiselle systeemille ja ottamalla siitä divergenssi $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}$ nähdään, että $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Varaustiheyden muuttuessa ajallisesti pitäisi kuitenkin **jatkuvuusyhtälön** $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ olla voimassa.

9.1 Siirrosvirta

Kuvan 9.1 mukaisessa ajatuskokeessa varataan kondensaattoria sähkövirralla I. Ampèren lain mukaan

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = I \tag{9.1}$$



Kuva 9.1: Ampèren laki varattaessa kondensaattoria

missä S_1 on pinta, jonka läpi virta I kulkee. Nyt kuitenkaan mikään ei sano, missä silmukan C rajoittaman yhdesti yhtenäisen pinnan tulisi olla. Pinnaksi voidaan valita myös kondensaattorin levyjen välisen alueen kautta piirretty pinta S_2, joka ei leikkaa virtaa missään ja

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{9.2}$$

Molemmat integraalit on laskettu matemaattisesti oikein, joten ongelman täytyy olla puutteellisesti ymmärretyssä fysiikassa. Ratkaisu on siinä, että virta I tuo varausta kondensaattorin levylle eikä varaus poistu systeemistä samaan tahtiin. Virralla on siis divergenssiä pintojen S_1 ja S_2 rajaamassa tilavuudessa.

Tarkastellaan ongelmaa differentiaalimuodossa lähtien varauksen jatkuvuusyhtälöstä

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{9.3}$$

Varaustiheys voidaan ilmaista Gaussin lain avulla

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{9.4}$$

joten jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{9.5}$$

Maxwellin oivallus oli korvata virrantiheys Ampèren laissa ylläolevalla sulkulausekkeella ja tuloksena oli neljäs Maxwellin laeista

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.6}$$

jota voi hyvällä syyllä kutsua Ampèren ja Maxwellin laiksi. Termiä $\partial \mathbf{D}/\partial t$ kutsutaan **kentänmuutosvirraksi**, **kenttävirraksi** tai **siirrosvirraksi**.

Maxwellin idea siirrosvirrasta oli puhtaasti teoreettinen, sillä sen vaikutus on niin pieni, että mikään tuolloinen mittaus ei ollut ristiriidassa Ampèren lain kanssa. Siirrosvirta alkaa olla verrattavissa johtavuusvirtaan vasta, kun $\omega\epsilon/\sigma > 0.01$ eli johteiden tapauksessa taajuuksien on oltava erittäin korkeita. Eristeissä tilanne on toinen ja jo tavallisessa 50 Hz vaihtovirtapiirissä olevan kondensaattorin läpi kulkeva virta on siirrosvirtaa. Kondensaattorin sisäistä virtaa ei tosin useinkaan tarvitse tarkastella virtapiirianalyysissä, kuten RLC-piiriä koskeneessa esimerkissä.

Koska siirrosvirta tulee näkyviin vasta suurilla taajuuksilla, se liittyy sähkömagneettiseen aaltoliikkeeseen luonnollisella tavalla. Heinrich Hertz todensi vuonna 1888 siirrosvirran olemassaolon tutkiessaan sähkömagneettisia aaltoja. Tämän jälkeen myös Maxwellin alunperin teoreettinen oivallus sai kokeellisen perustan.

Varauksen **jatkuvuusyhtälö** seuraa nyt Ampèren ja Maxwellin laista yhdessä Gaussin lain kanssa, joten sitä ei tarvitse ottaa mukaan erillisenä yhtälönä. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että varauksen **säilymislaki** seuraisi Maxwellin yhtälöistä, vaan sitä, että annetussa tilavuudessa varauksen ajallinen muutos kompensoituu alueeseen tulevalla tai siitä poistuvalla sähkövirralla, koska varaus säilyy!

9.2 Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa koko Maxwellin yhtälöiden ryhmä

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Tässä lähdetermeinä ovat **ulkoiset ("vapaat") varaukset** ρ ja **ulkoiset ("vapaat") virrat** $\mathbf{J}$. Sidotut varaukset ja virrat on kätketty kenttiin $\mathbf{D}$ ja $\mathbf{H}$. Mikäli kyseessä on tyhjöä monimutkaisempi väliaine, tarvitaan lisäksi rakenneyhtälöt $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

Yhtälöryhmä 9.7 ei kuitenkaan ole sen yleisempi tai rajoitetumpi kuin luvussa 1 esitetty "tyhjömuodossa" kirjoitettu yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.8}$$

missä ρ ja $\mathbf{J}$ kuvaavat **kaikkia** varauksia ja virtoja. Esitysmuoto 9.7 on joitain merkintöjä vaille sama, jossa Maxwell itse esitti yhtälönsä. Muotoa 9.8 voi kuitenkin pitää jossain mielessä perustavampana, koska se ei ota mitään kantaa mahdollisen väliaineen sähköisiin tai magneettisiin ominaisuuksiin.

Vaikka usein puhutaan neljästä Maxwellin yhtälöstä, yhtälöryhmässä 9.8 on kuitenkin 8 yhtälöä (2 skalaariyhtälöä ja 6 vektoriyhtälöiden komponenttia). Yhtälöryhmä on **lineaarinen**, joten ratkaisuille pätee yhteenlaskuperiaate. Mikäli lähdetermit ρ ja $\mathbf{J}$ tunnetaan, on jäljellä 6 tuntematonta ja yhtälöryhmä riittää mainiosti $\mathbf{E}$:n ja $\mathbf{B}$:n määräämiseen. Jos kuitenkin etsitään itsekonsistentteja ratkaisuja, tuntemattomia on 10 kpl ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ ja ρ),

joten systeemistä tarvitaan lisätietoa. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi Ohmin laki ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). Kuten aina differentiaaliyhtälöitä ratkottaessa, myös **reunaehdot** täytyy määrittää oikein.

9.3 Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla

Luvuissa 3 ja 6 käsiteltiin staattisten sähkö- ja magneettikenttien reunaehtoja kahden aineen rajapinnalla. Magneettivuon tiheydelle saatiin yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ normaalikomponentin jatkuvuusehto

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{9.9}$$

Tämä pätee myös ajasta riippuvassa kentässä.

Tarkastellaan sitten sähkökentän tangentiaalikomponenttia. Sähköstaattisen yhtälön $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ sijasta on käytettävä Faradayn lakia

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9.10}$$

Tehdään samanlainen suorakulmainen silmukka kuin luvussa 3 ja integroidaan Faradayn laki silmukan sulkeman pinnan yli

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{9.11}$$

Sovelletaan Stokesin teoreemaa lausekkeen vasemmalle puolelle ja suoritetaan viivaintegraalit:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_1 E'_{1n} - h_2 E'_{2n} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{9.12}$$

missä l on silmukan pituus rajapinnan suunnassa, h_1 ja h_2 ovat silmukan etäisyydet rajapinnasta kummankin väliaineen puolella ja E_{in} ja E'_{in} ottavat huomioon, että sähkökentän normaalikomponentit saattavat poiketa toisistaan silmukan eri päissä. Kun silmukan korkeus litistetään häviävän pieneksi, häviävät sähkökentän normaalikomponentteja sisältävät termit ja samoin yhtälön oikea puoli, jos $\partial\mathbf{B}/\partial t$ pysyy äärellisenä. Lopullisesta yhtälöstä jää jäljelle sama jatkuvuusehto kuin sähköstatiikassa

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{9.13}$$

Sähkövuon tiheyden normaalikomponentin reunaehto on monimutkaisempi, koska nyt pintavaraustiheys voi muuttua. Sekaannusten välttämiseksi merkitään johtavuutta σ:lla ja pintavaraustiheyttä σ_s:llä. Yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ saadaan pillerirasialla samannäköinen tulos kuin sähköstatiikassa

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_s \tag{9.14}$$

missä $D_n = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ ja pinnan normaalivektori $\mathbf{n}$ osoittaa aineesta 1 aineeseen 2. Toisaalta varaustiheyden muutosta kontrolloi jatkuvuusyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.15}$$

josta seuraa analogisesti

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \tag{9.16}$$

Sovelletaan tätä yksinkertaiseen aaltoliikkeeseen eli oletetaan sähkökentän olevan muotoa $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Tällöin voidaan korvata $\partial/\partial t \to -i\omega$. Olettamalla lineaarinen väliaine ja käyttämällä rakenneyhtälöitä $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ja $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ voidaan D_n:n ja J_n:n reunaehdot kirjoittaa yhtälöparina

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} &= \sigma_s \\ \sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} &= i\omega\sigma_s \end{aligned} \tag{9.17}$$

Jos pintavaraustiheys häviää, on oltava $\epsilon_1/\sigma_1 = \epsilon_2/\sigma_2$, mikä voidaan saada aikaan valitsemalla sopivat väliaineet. Yleisesti σ_s ei häviä, joten se voidaan ratkaista yhtälöparista ja sähkökentän normaalikomponentille saadaan

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{\sigma_1}{\omega}\right) E_{1n} = \left(\epsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega}\right) E_{2n} \tag{9.18}$$

Tarkasteltaessa $\mathbf{H}$-vektorin tangentiaalikomponenttia täytyy kentänmuutosvirta huomioida

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.19}$$

Tangentiaalikomponentin reunehto löytyy jälleen suorakulmaisesta silmukasta. Samoin kuin Faradayn laissa oletettiin $\partial\mathbf{B}/\partial t$:n pysyvän äärellisenä silmukkaa kutistettaessa, nyt pidetään $\partial\mathbf{D}/\partial t$ äärellisenä ja jäljelle jää magnetostatiikasta tuttu reunaehto

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \tag{9.20}$$

missä $\mathbf{K}$ on pintavirran tiheys ja pinnan normaalivektori $\mathbf{n}$ osoittaa alueesta 1 alueeseen 2. Pintavirran tiheys on nolla, jos väliaineen johtavuus on äärellinen. Siis ellei väliaineen johtavuus ole ääretön, magneettikentän tangentiaalikomponentti on jatkuva.

Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa väliaineen 2 johtavuus on ääretön. Ampèren ja Maxwellin laki väliaineelle 2 on

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \tag{9.21}$$

Olettamalla harmoninen aikariippuvuus $e^{-i\omega t}$ ja käyttämällä rakenneyhtälöitä saadaan

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2}\nabla \times \mathbf{H}_2 \tag{9.22}$$

Jos $\nabla \times \mathbf{H}_2$ on rajoitettu, niin ehto $\sigma_2 \to \infty$ edellyttää, että $\mathbf{E}_2 = 0$. Olettaen myös $\mathbf{H}_2$:n aikariippuvuus harmoniseksi Faradayn laki ja lineaarinen rakenneyhtälö $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ antavat

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2}\nabla \times \mathbf{E}_2 \tag{9.23}$$

ja siten myös $\mathbf{H}_2$ häviää. Tämä kaikki tarkoittaa sitä, että sähkömagneettinen aalto ei etene äärettömän hyvään johteeseen.

9.4 Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä

Periaatteessa koko elektrodynamiikka on nyt hallinnassa. Kurssin alkuosassa tuli kuitenkin esille ongelmia liikemäärän ja liikemäärämomentin säilymislakien kanssa. Samoin jäi epäselväksi, mille oliolle esimerkiksi sähköstaattinen energia oikein kuuluu.

9.4.1 Poyntingin teoreema: energian säilyminen

Tarkastellaan aluksi yksittäistä sähkömagneettisessa kentässä liikkuvaa varauksellista hiukkasta. Siihen vaikuttaa Lorentzin voima $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Mekaniikassa on opittu, että voima tekee työtä teholla $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, joten hiukkasen mekaanisen energian muutosnopeuden määrää sähkökenttä, koska magneettikenttä ei tee työtä:

$$\frac{dW_{mek}}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \tag{9.24}$$

Muita kuin sähkömagneettisia voimia ei tässä yhteydessä oteta huomioon. Yleistys jatkuvalle virrantiheydelle alueessa V antaa hiukkassysteemin mekaanisen energian muutosnopeudeksi

$$\frac{dW_{mek}}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dV \tag{9.25}$$

Aletaan muokata pistetuloa $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ käyttäen Maxwellin yhtälöitä väliainemuodossa. Amperen ja Maxwellin laki antaa

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.26}$$

Oikean puolen ensimmäinen termi houkuttelee käyttämään tulon derivoimiskaavaa $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, josta Faradayn lakia käyttäen tulee

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \tag{9.27}$$

Tähän mennessä on siis saatu

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - (\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \tag{9.28}$$

Oletetaan nyt, että väliaine on yksinkertaista (LIH), jolloin

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \tag{9.29}$$

Statiikassa opitun perusteella on luonnollista tulkita, että jälkimmäisen sulkulausekkeen sisällä on sähkömagneettisen kentän energiatiheys

$$w_{em} = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \tag{9.30}$$

Kun vielä määritellään **Poyntingin vektori**

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{9.31}$$

saadaan **Poyntingin teoreema** differentiaalimuodossa jatkuvuusyhtälönä

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{9.32}$$

Tulkintaa helpottaa vertailu varauksen jatkuvuusyhtälöön $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, joka seuraa varauksen säilymislaista. Poyntingin teoreema on siis hiukkasten **ja** kentän muodostaman systeemin energian säilymislaki. Nähdään myös, että hyvällä syyllä sähkömagneettista kenttää voidaan pitää itsenäisenä fysikaalisena oliona. Tämä tulkinta vahvistuu muiden säilymislakien yhteydessä. Termi $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ilmaisee sen, että kenttä ja hiukkaset voivat vaihtaa energiaa keskenään.

Integroimalla jatkuvuusyhtälö alueen V yli ja käyttämällä divergenssiteoreemaa saadaan Poyntingin teoreema havainnolliseen integraalimuotoon

$$\frac{d}{dt}(W_{mek} + W_{em}) = -\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{dA} \tag{9.33}$$

Tämän perusteella voidaan kvalitatiivisesti ajatella, että Poyntingin vektori "kuljettaa energiaa" (yksikkö on $J/(m^2 s)$ eli energiavuon yksikkö). Tällainen tulkinta johtaa kuitenkin erikoiselta vaikuttaviin tilanteisiin yksinkertaisissakin esimerkeissä, kuten tasavirtajohtimessa.

Ei ole itsestään selvää, että Poyntingin vektorin "oikea" lauseke on 9.31. Poyntingin teoreeman differentiaalimuodon perusteella vektoriin $\mathbf{S}$ voitaisiin lisätä roottorikenttä. Monimutkaisempiakin muunnelmia on olemassa, mutta silloin myös energiatiheyden lauseketta on muutettava. Oleellista on, että energian säilymislain muoto ei muutu. Pohjimmiltaan kyse on siitä, ettei sähkömagneettisen kentän energiaa voida paikallistaa.

9.4.2 Maxwellin jännitystensori

Palataan kuvan 5.3 tilanteeseen: rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymislakia? Vastaus on kielteinen. Ratkaisu on siinä, että SM-kentällä on energian lisäksi **liikemäärää**. Säilyvä suure on hiukkasten **ja** kenttien yhteenlaskettu liikemäärä. Tämän näkemiseksi on tarkastellaan Maxwellin jännitystensoria ajasta riippuvassa tilanteessa.

Oletetaan väliaine tyhjön kaltaiseksi. Kaikkien tilavuudessa V olevien hiukkasten liikemäärien summa $\mathbf{p}_{mek}$ noudattaa Newtonin toista lakia

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} = \int_V \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dV = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})\, dV \tag{9.34}$$

joten **voimatiheys** on

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{9.35}$$

Eliminoidaan ρ ja $\mathbf{J}$ Maxwellin yhtälöiden avulla, jolloin

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} \tag{9.36}$$

Nyt

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \tag{9.37}$$

missä viimeisessä termissä on käytetty Faradayn lakia. Voimatiheys on siten

$$\mathbf{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{9.38}$$

Lauseke saadaan symmetrisemmäksi lisäämällä termi $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/\mu_0$, joka on aina nolla. Kenttien roottorilausekkeet voi kirjoittaa auki kaavalla (HT)

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \tag{9.39}$$

ja samoin $\mathbf{B}$:lle. Näin voimatiheys on saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{9.40}$$

Tämä siistiytyy määrittelemällä **Maxwellin jännitystensori** $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right) \tag{9.41}$$

Tensorin $\mathcal{T}$ divergenssi on vektori, jonka komponentit ovat

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \mathcal{T})_j &= \epsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \end{aligned} \tag{9.42}$$

Nämä ovat Poyntingin vektorin aikaderivaattaa vaille voimatiheyden komponentit, joten

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathcal{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \tag{9.43}$$

Integroidaan tämä tilavuuden V yli ja kirjoitetaan jännitystensorista riippuva osa pintaintegraaliksi. Tällöin kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} \, da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} \, dV \tag{9.44}$$

Staattisessa tilanteessa sähkömagneettinen kokonaisvoima määräytyy jännitystensorista pelkästään tarkasteltavan alueen reunalla. Siis $\mathcal{T}$ laskettuna alueen reunalla jotenkin pitää sisällään voimien kannalta olennaisen tiedon kentistä koko alueessa.

Voimien laskeminen jännitystensorista ei rajoitu elektrodynamiikkaan. Mekaniikasta tuttu energia-impulssitensori on formaalisti samanlainen otus, yleinen suhteellisuusteoria formuloidaan Einsteinin tensorin avulla jne.

9.4.3 Liikemäärän ja liikemäärämomentin säilyminen

Palataan sitten liikemäärän säilymiseen. Newtonin toisen lain mukaan hiukkaseen vaikuttava voima on yhtä suuri kuin sen liikemäärän aikaderivaatta

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} \tag{9.45}$$

missä alaindeksi *mek* viittaa mekaaniseen liiketilan muutokseen. Toisaalta

$$\frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} \, da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} \, dV \tag{9.46}$$

Tämän voi tulkita samaan tapaan kuin Poyntingin teoreeman. Oikean puolen ensimmäinen termi kertoo liikemäärän virtauksen aikayksikössä pinnan ∂V läpi ja jälkimmäinen termi puolestaan kenttiin kertyneen liikemäärän muutoksen. Siis **sähkömagneettisen kentän liikemäärä** on

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbf{S} \, dV \tag{9.47}$$

Yhteenlasketun sähkömagneettisen ja mekaanisen liikemäärän muutos vastaa tarkastelualueeseen kenttien mukanaan tuomaa liikemäärää.

Olkoon $\hat{p}_{mek}$ mekaaninen liikemäärätiheys. Määritellään vastaavasti SM-kentän **liikemäärätiheys**

$$\hat{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \tag{9.48}$$

Tällöin liikemäärän säilyminen voidaan ilmaista differentiaalimuodossa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{p}_{mek} + \hat{p}_{em}) = \nabla \cdot \mathcal{T} \tag{9.49}$$

Todetaan vielä lopuksi, että sähkömagneettisella kentällä on myös **liikemäärämomenttia** eli impulssimomenttia. Sen tiheys määritellään

$$\hat{l}_{em} = \mathbf{r} \times \hat{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{r} \times \mathbf{S} \tag{9.50}$$

Myös kokonaisimpulssimomentti on säilyvä suure.

9.5 Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet

9.5.1 Aaltoyhtälö tyhjössä

Siirrosvirtatermin ansiosta Maxwellin yhtälöillä on ratkaisunaan **sähkömagneettinen aaltoliike**. Tarkastellaan tilannetta ensiksi tyhjössä ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Ottamalla roottori Ampèren ja Maxwellin laista saadaan

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{9.51}$$

josta kirjoittamalla vasemman puolen roottorit auki ja käyttämällä magneettikentän lähteettömyyttä saadaan aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{9.52}$$

Ottamalla puolestaan roottori Faradayn laista ja huomioimalla, että myöskään sähkökentällä ei ole tyhjössä lähteitä, saadaan sähkökentälle sama yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{9.53}$$

Tällainen aalto etenee nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ eli valon nopeudella.

9.5.2 Potentiaaliesitys

Tarkastellaan seuraavaksi Maxwellin yhtälöiden ratkaisemista olettamalla kenttien lähteet ρ ja $\mathbf{J}$ tunnetuiksi. Esitetään tarkastelu tyhjönkaltaisessa väliaineessa (ϵ_0, μ_0) kentille $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}$. Siirtyminen lineaariseen väliaineeseen on suoraviivaista.

Ongelmaa on tehokkainta lähestyä käyttämällä kenttien skalaari- ja vektoripotentiaaleja ϕ ja $\mathbf{A}$. Yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ seuraa, että magneettivuon tiheys voidaan esittää muodossa $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sijoittamalla tämä Faradayn lakiin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \tag{9.54}$$

Fysikaalisen siisteille kentille aika- ja paikkaderivaattojen järjestyksen voi vaihtaa, joten

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{9.55}$$

eli voidaan kirjoittaa $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t = -\nabla \varphi$. Sähkökenttä on siis muotoa

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{9.56}$$

eli sähköstaattisen potentiaalin lisäksi Faradayn laki tuo vektoripotentiaalin aikamuutoksesta johtuvan osuuden sähkökenttään. Näin kenttien kuusi komponenttia on ilmaistu neljän muuttujan (φ, $\mathbf{A}$) avulla. Tähän on tarvittu neljä Maxwellin yhtälöiden kahdeksasta skalaarikomponentista, joten jäljellä on neljä yhtälöä neljän tuntemattoman ratkaisemiseen. Coulombin ja Ampèren ja Maxwellin lait saadaan muotoon

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0 \tag{9.57}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{9.58}$$

Saatu yhtälöryhmä näyttää pahemmalta kuin alkuperäiset Maxwellin yhtälöt, mutta sille löytyy käteviä ratkaisumenetelmiä.

Koska kentät $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{E}$ muodostuvat potentiaalien derivaatoista, voidaan potentiaaleihin lisätä sellaisia tekijöitä, jotka katoavat derivoitaessa. On helppo nähdä, että seuraava muunnos ei vaikuta kenttiin:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi \tag{9.59}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial \Psi / \partial t \tag{9.60}$$

Näitä **mittamuunnoksia** käsitellään tarkemmin luvussa 9.6.

Yksi tapa säilyttää alkuperäiset kentät on edellyttää, että

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{9.61}$$

Tätä kutsutaan **Lorenzin mittaehdoksi** ja kyseistä mittaa **Lorenzin mitaksi**. Tällöin jäljellä olevat yhtälöt yksinkertaistuvat **epähomogeenisiksi**

aaltoyhtälöiksi

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{9.62}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{9.63}$$

joille tunnetaan yleisiä ratkaisumenetelmiä. Historiallinen huomautus: kyseessä on todellakin Lorenzin mitta eikä Lorentzin mitta. Lorenz oli tanskalainen ja Lorentz hollantilainen fyysikko.

9.5.3 Viivästyneet potentiaalit

Edellä on löydetty itse asiassa neljä karteesisissa koordinaateissa toisistaan riippumatonta skalaariyhtälöä, joten ratkaisumenetelmän kannalta riittää tarkastella yhtälöä φ:lle. Staattisen kentän tapauksessa kyseessä olisi tuttu Poissonin yhtälö, jonka ratkaisuja ovat Laplacen yhtälön yleiset ratkaisut sekä jokin Poissonin yhtälön erikoisratkaisu.

Ratkaistaan aaltoyhtälö ensin yhdelle varaukselle, joka on sijoitettu origoon. Tällöin homogeeninen aaltoyhtälö

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0 \tag{9.64}$$

pätee kaikkialla muualla kuin origossa. Koska tilanne on pallosymmetrinen, $\varphi = \varphi(r)$ ja homogeeninen aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa pallokoordinaatistossa

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = 0 \tag{9.65}$$

Tällä on tutut $\pm r$-suuntiin etenevät ratkaisut

$$r\varphi = f(r - ct) + g(r + ct) \tag{9.66}$$

Näistä $f(r-ct)$ etenee poispäin varauksesta ja $g(r+ct)$ etenee kohti varausta. Koska haluamme ymmärtää varauksen vaikutusta ympäristöönsä, riittää tarkastella ratkaisua f.

On siis löydetty homogeeniselle aaltoyhtälölle pallosymmetrinen ratkaisu

$$\varphi = \frac{f(r - ct)}{r} \tag{9.67}$$

ja nyt määritetään funktion f muoto. Staattisessa tapauksessa potentiaali on

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{9.68}$$

ja nyt ilmeisesti $q = q(t)$. Kirjoitetaan f ajan funktiona $f(t - r/c)$, missä vakio $-c$ on upotettu määrättävään funktioon itseensä. Näin ollen ajanhetkellä $t - r/c$ on voimassa

$$f(t - r/c) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0} \tag{9.69}$$

ja yksittäisen varauksen epähomogeenisella aaltoyhtälöllä on ratkaisu

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{9.70}$$

Integroimalla kaikkien varausten yli saadaan

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{9.71}$$

missä $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ on **viivästynyt aika**. Potentiaalia φ kutsutaan **viivästyneeksi skalaaripotentiaaliksi**, koska se huomioi ajan, joka kuluu kustakin pisteestä tarkastelupisteeseen nopeudella c etenevältä signaalilta (HT: piirrä kuva).

Vektoripotentiaalin aaltoyhtälön kukin komponentti on matemaattisesti aivan samanlainen kuin skalaripotentiaalin aaltoyhtälö, joten jokaiselle komponentille on olemassa sama ratkaisu. Kokoamalla kaikki komponentit yhteen saadaan **viivästynyt vektoripotentiaali**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{9.72}$$

Näin on ratkaistu skalaari- ja vektoripotentiaalit annettujen varaus- ja virtajakautumien funktioina. Sähkö- ja magneettikentät saadaan näistä suoraviivaisesti: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ja $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Käytännössä derivaattojen laskeminen on usein työlästä. Sen vaikeutta on hyvä kokeilla sijoittamalla potentiaalien integraalilausekkeet takaisin aaltoyhtälöön.

Tutustumme kurssin lopulla suppeampaan suhteellisuusteoriaan, jossa vektori- ja skalaaripotentiaalien aaltoyhtälöt voidaan koota **nelipotentiaalin** $A^\alpha = (\varphi, A_i)$ aaltoyhtälöksi

$$\partial^2 A^\alpha \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^\alpha = -j^\alpha \tag{9.73}$$

missä **nelivirran** j^α komponentit ovat $(\rho/\epsilon_0,\ \mu_0 J_i)$. Osoittautuu, että Maxwellin yhtälöt ovat Lorentz-invariantteja eli valmiiksi kelvollisia suhteellisuusteorian pätevyysalueelle. Historiallisesti juuri elektrodynamiikka johti Einsteinin suhteellisuusteorian jäljille. Taas historiallinen huomautus: mitta on Lorenzin, mutta invarianssi Lorentzin.

9.5.4 Aaltoyhtälön Greenin funktio

Tarkastellaan aaltoyhtälön ratkaisua käyttämällä luvussa 2.11 esitettyä Greenin funktion ideaa. Sekä $\mathbf{A}$:n että φ:n aaltoyhtälöt ovat muotoa

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r},t) \tag{9.74}$$

missä $f(\mathbf{r},t)$ on tunnettu lähdetermi. Tehdään sekä ψ:lle että f:lle Fourier-muunnos ajan suhteen

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\ ;\ f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{9.75}$$

Sijoittamalla nämä aaltoyhtälöön ja merkitsemällä $k = \omega/c$ saadaan Fourier-komponenteille

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi(\mathbf{r},\omega) = -4\pi f(\mathbf{r},\omega) \tag{9.76}$$

Tämä on **epähomogeeninen Helmholtzin aaltoyhtälö**, joka tapauksessa $k = 0$ palautuu Poissonin yhtälöksi. Sen Greenin funktion täytyy toteuttaa yhtälö

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{9.77}$$

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on silloin

$$\psi(\mathbf{r},\omega) = \int G_k(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)f(\mathbf{r}',\omega)\,dV' \tag{9.78}$$

johon voidaan lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja.

Koska aaltoyhtälöä joudutaan käytännössä ratkomaan heijastavien reunojen, aaltoputkien jne. yhteydessä, Greenin funktion muoto riippuu ongelman reunaehdoista (vrt. pallon Greenin funktio luvussa 2.11). Tarkastellaan nyt reunatonta avaruutta, jolloin G_k on pallosymmetrinen ja riippuu ainoastaan tarkastelupisteen ja lähdepisteen etäisyydestä $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, joten pallokoordinaateissa

$$\nabla^2 G_k = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G_k}{\partial R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\,G_k) \tag{9.79}$$

Koska R on ainoa muuttuja, voidaan käyttää kokonaisderivaattaa

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(R\,G_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{9.80}$$

Muualla kuin pisteessä $R = 0$ tämä yksinkertaistuu yhtälöksi

$$\frac{d^2}{dR^2}(R\,G_k) + k^2(R\,G_k) = 0 \tag{9.81}$$

jonka ratkaisut ovat

$$R\,G_k = A\,e^{ikR} + B\,e^{-ikR} \tag{9.82}$$

Rajalla $R \to 0$ $kR \ll 1$ ja 9.80 palautuu Poissonin yhtälöksi, jonka ratkaisu käyttäytyy kuten $1/R$. Tämä antaa sidosehdon $A+B = 1$ ja Greenin funktio on muotoa

$$G_k(R) = A\,G_k^+(R) + B\,G_k^-(R) \tag{9.83}$$

missä $G_k^\pm = e^{\pm ikR}/R$. G_k^+ kuvaa origosta poispäin etenevää palloaaltoa ja G_k^- origoon tulevaa palloaaltoa kuten edellisessäkin luvussa esitetyssä ratkaisussa.

A ja B määräytyvät reunaehdoista **ajan** suhteen. Jos lähde on hiljaa hetkeen $t = 0$ asti ja alkaa sitten vaikuttaa, ulospäin etenevä ratkaisu $A\,G_k^+$ on fysikaalisesti mielekäs valinta. Jos aallon amplitudi on annettu sopivilla reunaehdoilla, myös $B\,G_k^-$ voi olla käyttökelpoinen.

Tarkastellaan sitten **ajasta riippuvaa** Greenin funktiota, joka toteuttaa yhtälön

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \tag{9.84}$$

Koska

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{iwt'}\, e^{-iwt} \tag{9.85}$$

voidaan lähdetermi yhtälössä 9.77 kirjoittaa muodossa $-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{i\omega t'}$ ja ajasta riippuva Greenin funktio on

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R}\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega \tag{9.86}$$

missä $\tau = t - t'$. Äärettömän avaruuden Greenin funktio riippuu siis vain lähteen ja havaitsijan välisestä etäisyydestä R ja aikaerosta $t - t'$. Koska $k = \omega/c$, voidaan ω-integraali laskea ja lopputulos on

$$G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,\delta(t' - [t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c]) \tag{9.87}$$

Nyt G^+ on **viivästynyt** Greenin funktio ja G^- puolestaan **edistynyt** Greenin funktio.

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on siis

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int\int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t')\, dV' dt' \tag{9.88}$$

johon voi lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja. Viivästyneelle Greenin funktiolle ratkaisu on tietenkin sama kuin edellä suoremmalla laskulla löytynyt ratkaisu. Tässä esitetty menetelmä on kuitenkin yleisempi ja käyttökelpoisempi tarkasteltaessa monimutkaisempia olosuhteita kuin yksinkertaista lähdettä reunattomassa avaruudessa.

9.6 Mittainvarianssi

Aaltoyhtälön ratkaisu helpottui valitsemalla sopiva mitta. Tämän teki mahdolliseksi Maxwellin yhtälöiden tärkeä ominaisuus: **mittainvarianssi**. Kenttien potentiaaleja voidaan muuttaa tietyllä yleisellä tavalla ilman, että kentät itse muuttuvat. Elektrodynamiikan mittamuunnokset ovat muotoa

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \tag{9.89}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t \tag{9.90}$$

Funktiota Ψ kutsutaan **mittafunktioksi** ja se voidaan valita usealla eri tavalla. Yksi näistä on edellä käytetty Lorenzin mittaehto

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0 \tag{9.91}$$

Tällöin mittafunktion Ψ on toteutettava aaltoyhtälö

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{9.92}$$

Jos siis potentiaalit $\mathbf{A}$ ja φ eivät toteuttaisi Lorenzin mittaehtoa, niin uudet potentiaalit $\mathbf{A}'$ ja φ' toteuttavat sen edellyttäen, että Ψ voidaan ratkaista aaltoyhtälöstä.

Voidaan osoittaa, että Lorenzin mittaehdon toteuttava funktio Ψ on aina olemassa, mutta se ei ole yksikäsitteinen. Lorenzin mitan etu on, että sitä käytettäessä yhtälöiden Lorentz-kovarianssi näkyy eksplisiittisesti ja tulokset on suoraviivaista siirtää koordinaatistosta toiseen. Käytännön laskut voivat kuitenkin olla hyvin monimutkaisia.

Useissa tapauksissa laskennallisesti yksinkertaisempi vaihtoehto on **Coulombin mitta**, jonka mittaehto on

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \tag{9.93}$$

Vektoripotentiaali saadaan muunnoksella

$$\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \tag{9.94}$$

joka määrittää mittafunktion additiivista vakiota vaille yksikäsitteisesti, jos $\mathbf{A} \to 0$ ja $\varphi \to 0$, kun $r \to \infty$. Coulombin mitassa skalaaripotentiaali ratkaistaan yhtälöstä 9.57

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{9.95}$$

Nyt aika ei ole viivästetty, vaan skalaaripotentiaali määräytyy samanaikaisesta varausjakautumasta kaikkialla. Tämä merkitsee, että Coulombin mitta ei ole Lorentz-kovariantti. Koska mitta on kuitenkin kelvollinen Maxwellin yhtälöille, tästä ei seuraa ristiriitaa kenttien $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}$ osalta. Coulombin mittaa käytettäessä on kuitenkin oltava tarkkana koordinaatistonmuutosten kanssa.

Coulombin mitassa vektoripotentiaalille tulee aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{J} \tag{9.96}$$

Oikean puolen ensimmäinen termi on pyörteetön. Helmholtzin teoreeman mukaan vektorikenttä $\mathbf{F}$ voidaan jakaa pyörteettömään ja lähteettömään osaan

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \ ; \ \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0$$

missä l viittaa **pitkittäiseen** (longitudinaaliseen, pyörteettömään) ja t **poikittaiseen** (transversaaliseen, lähteettömään) osuuteen. Käyttämällä virran jatkuvuusyhtälöä aaltoyhtälö saadaan muotoon (ks. esim. Jackson)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t \tag{9.97}$$

Koska vektoripotentiaali määräytyy vain virran poikittaisesta komponentista, Coulombin mittaa kutsutaan usein poikittaismitaksi. Se tunnetaan myös nimellä säteilymitta, koska sähkömagneettiset säteilykentät saadaan lasketuksi viivästyneestä vektoripotentiaalista

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_t(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{9.98}$$

mikä on olennaisesti helpompaa kuin säteilykenttien laskeminen Lorenzin mitasta. Coulombin mitta erottelee annetussa koordinaatistossa sähkökentän staattiseen (s) ja induktiiviseen (i) osaan

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\varphi \ ; \ \mathbf{E}_i = -\partial \mathbf{A}/\partial t \tag{9.99}$$

Klassinen elektrodynamiikka on ensimmäinen esimerkki mittainvarianteista fysiikan perusteorioista. Mittakentän käsitteestä on tullut erittäin keskeinen osa fysiikan perusteorioissa kuten kvanttielektrodynamiikassa, sähköheikon vuorovaikutuksen teoriassa, kvanttikromodynamiikassa ja näitä yhdistävissä yhtenäiskenttäteorioissa. Esimerkkinä olkoon vuoden 1999 Nobelin palkinto, jonka saivat Gerardus t'Hooft ja Martinus Veltman töistään kvanttikromodynamiikan ei-abelisten mittakenttien parissa.