Luku 13

Liikkuvan varauksen kenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvan varauksen aiheuttamaan kenttään. Jokaisen sähködynaamikon on laskettava ainakin kerran elämässään Liénardin ja Wiechertin potentiaalit ja kentät.

13.1 Liénardin ja Wiechertin potentiaalit

Tarkastellaan yksittäistä varauksellista hiukkasta, jonka rata on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$. Varaus- ja virrantiheys ovat tällöin

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \tag{13.1}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\dot{\mathbf{r}}_q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \tag{13.2}$$

Käyttökelpoisten potentiaalien laskeminen ei ole aivan helppo tehtävä. Hahmotellaan tässä ratkaisumenetelmä Greenin funktioita käyttäen (yksityiskohdat HT).

Tehtävänä on ratkaista epähomogeeniset aaltoyhtälöt

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{13.3}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{13.4}$$

Kuten luvussa 9 todettiin, näiden ratkaisut ovat Greenin funktion avulla lausuttuina

$$\psi^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \int\int G^{\pm}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t')\, dV' dt' \tag{13.5}$$

missä $\psi^{\pm}(\mathbf{r}, t)$ ovat viivästyneet (+) ja edistyneet (–) skalaaripotentiaalit tai vektoripotentiaalin karteesiset komponentit ja $f(\mathbf{r}', t')$ vastaa lähdetermejä

$(\rho/\epsilon_0, \mu_0\mathbf{J})$. Nyt riittää käyttää viivästyneen potentiaalin Greenin funktiota

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{13.6}$$

Tekijä 4π on otettu Greenin funktion määritelmään, kun se luvussa 9 oli G:n aaltoyhtälössä.

Ensin integroidaan paikkaintegraalit lähdetermien δ-funktioiden avulla. Sen jälkeen aikaintegraalia laskettaessa käytetään hyväksi tulosta

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{13.7}$$

missä $g(x_i) = 0$. Lopputuloksena saadaan **Liénardin ja Wiechertin potentiaalit**:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R}\right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}\right]_{ret} \tag{13.8}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R}\right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}\right]_{ret} \tag{13.9}$$

missä $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ja $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Alaindeksi ret viittaa lausekkeen laskemiseen viivästyneellä ajalla t', joka on ratkaistava ehdosta

$$t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|/c = t \tag{13.10}$$

Havaitsija siis mittaa kentän pisteessä $\mathbf{r}$ hetkellä t.

Kaikkein eleganteinta (?), joskaan ei sen helpompaa, on tehdä ylläoleva lasku relativistisessa formalismissa, missä φ ja $\mathbf{A}$ ovat nelipotentiaalin A^α komponentit ja

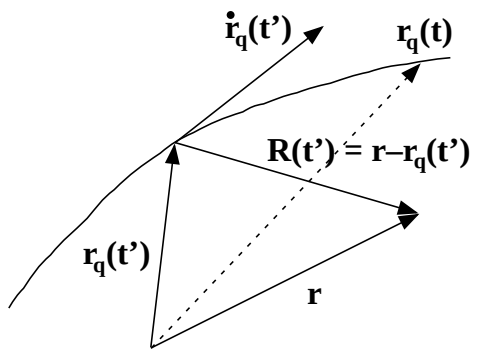
$$A^\alpha(x) = \int G(x - x')J^\alpha(x')\, d^4x' \tag{13.11}$$

(ks. Jackson tai CL luku 13.3).

13.2 Kenttien laskeminen

Kun potentiaalit tunnetaan, kentät saadaan derivoimalla, joka vaatii nyt kärsivällisyyttä. Hankaluuden aiheuttaa viivästyneen ajan implisiittisesti määrittelevä yhtälö 13.10. Aluksi kannattaa selvittää itselleen koordinaatisto (kuva 13.1). Sähkökenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\nabla(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2}\right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}\right] \tag{13.12}$$



Kuva 13.1: Varauksellisen hiukkasen liiketila hetkellä t' määrää kentän myöhempänä hetkenä t. Kenttä etenee pisteestä $\mathbf{r}_q(t')$ havaintopisteeseen $\mathbf{r}$ ajassa $R(t')/c$, jolloin hiukkanen on ehtinyt radallaan pisteeseen $\mathbf{r}_q(t)$.

Hakasulku viittaa lausekkeen laskemiseen viivästetyllä ajalla (jätetään sulut pois välivaiheissa).

Aloitetaan $R(t')$:n derivoinnista: koska t' riippuu paikkavektorista $\mathbf{r}$, niin $\nabla R(t') = -c\nabla t'$. Derivoidaan lauseketta 13.10 puolittain, jolloin esimerkiksi gradientin x-komponentti on

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x_q - c\boldsymbol{\beta}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)(\partial t'/\partial x)}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|} \tag{13.13}$$

Tässä on käytetty derivoinnin ketjusääntöä $\partial/\partial x = (\partial t'/\partial x)(\partial/\partial t')$. Nyt voidaan ratkaista

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-(x - x_q)}{c(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})} \tag{13.14}$$

joten

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})} \tag{13.15}$$

ja

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.16}$$

Tarvitaan myös $\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})$. Lasketaan taas x-komponentti:

$$(\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}))_x = \beta_x + \frac{\partial t'}{\partial x}(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{r}}_q) \tag{13.17}$$

Täten

$$\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}) = \boldsymbol{\beta} + (\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{r}}_q)\nabla t' = \frac{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{\beta} + (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.18}$$

Kokoamalla tulokset saadaan skalaaripotentiaalin gradientiksi

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{R} - (R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{\beta} - (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})^3}\right] \tag{13.19}$$

Vektoripotentiaalia varten täytyy laskea $\partial R/\partial t = c(1 - \partial t'/\partial t)$. Nyt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{13.20}$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.21}$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{cR\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.22}$$

Vektoripotentiaalin lausekkeessa esiintyvä aikaderivaatta on siis

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}\right] = \left[\frac{R(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (R\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} + c\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R} - cR\beta^2)\boldsymbol{\beta}}{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})^3}\right] \tag{13.23}$$

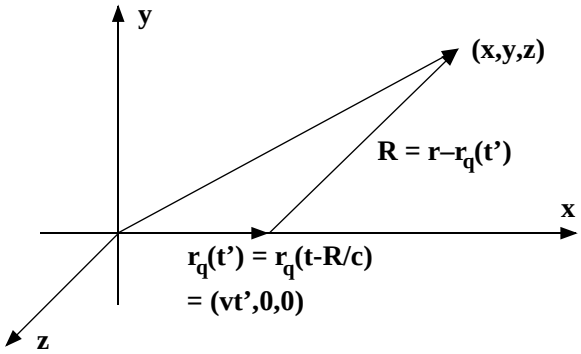
Sähkökentäksi saadaan lopulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R}\times((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})/c}{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})^3}\right]_{ret} \tag{13.24}$$

Samanlaisten veivausten (luonnollisesti HT) jälkeen saadaan magneettikentälle lauseke

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{R}}{R}\right]_{ret}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{13.25}$$

Välittömästi todetaan, että staattisen varauksen ($\boldsymbol{\beta} = 0$) sähkökenttä on Coulombin kenttä. Silloin sähkökenttä on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{R}$ kanssa, joten staattinen varaus ei odotetusti aiheuta magneettikenttää. Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä on selvästi tekemisissä Lorentzin muunnoksen kanssa. **Säteilykentäksi** kutsutaan kiihtyvyyteen $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ verrannollista termiä, joka pienenee kaukana varauksesta kuten $1/R$ eli kertalukua hitaammin kuin Coulombin kenttä. Tästä seuraa erityisesti se, että säteilykentän Poyntingin vuo ei mene nollaan äärettömyydessäkään. Tarkastellaan näitä tilanteita seuraavassa yksityiskohtaisemmin.



Kuva 13.2: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen kentän laskeminen.

13.2.1 Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä

Tarkastellaan x-akselia pitkin vakionopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvan varauksen kenttää (kuva 13.2). Kenttä pisteessä (x, y, z) lasketaan hetkellä t, jolloin varaus on ehtinyt pisteeseen $(vt, 0, 0)$ (varaus on ohittanut origon hetkellä $t = 0$).

Koska $R = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} = c(t - t')$, niin viivästynyt aika t' saadaan lausekkeesta

$$(1 - \beta^2)t' = t - \beta x/c - (1/c)\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \tag{13.26}$$

jolloin

$$[R - \mathbf{R} \cdot \beta]_{ret} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \tag{13.27}$$

Skalaaripotentiaali voidaan nyt esittää muodossa

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} \tag{13.28}$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Vektoripotentiaalilla on vain x-komponentti

$$A_x(x, y, z, t) = \beta\varphi(x, y, z, t)/c \tag{13.29}$$

Varauksen lepokoordinaatistossa potentiaalilla on tuttu lauseke

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{13.30}$$

Liikkuvan varauksen potentiaali saadaan (melkein) koordinaattimuunnoksella, jossa y ja z pysyvät ennallaan ja x:stä tulee $\gamma(x - vt)$. Vielä jää mietittäväksi, mistä tekijä γ ilmestyy kertomaan potentiaalia. Lisäksi täytyisi

selvittää, mistä vektoripotentiaali saadaan, kun se on nolla lepokoordinaatistossa. Tähän palataan suhteellisuusteoriassa, jossa **A**:n ja φ:n havaitaan yhdessä muodostavan nelivektorin.

Kentät saadaan derivoimalla (tällä kertaa helposti):

$$E_x(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x-vt)}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13.31}$$

$$E_y(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma y}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13.32}$$

$$E_z(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13.33}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}(x,y,z,t) \tag{13.34}$$

Nämä lausekkeet pätevät kaikilla nopeuksilla. Kaukana varauksesta kenttä heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön. Suurellakaan nopeudella liikkuva hiukkanen ei siis säteile.

Kenttää on mukavinta tarkastella varauksen kulloisenkin paikan suhteen. Kohtisuorassa suunnassa ($x - vt = 0$) sähkökentän voimakkuus on

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma}{y^2+z^2} \tag{13.35}$$

Tämä on Coulombin kenttä tekijällä γ suurennettuna (aina $\gamma \geq 1$). Varauksen edessä ja takana $y = z = 0$ ja

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\gamma^2(x-vt)^2} \tag{13.36}$$

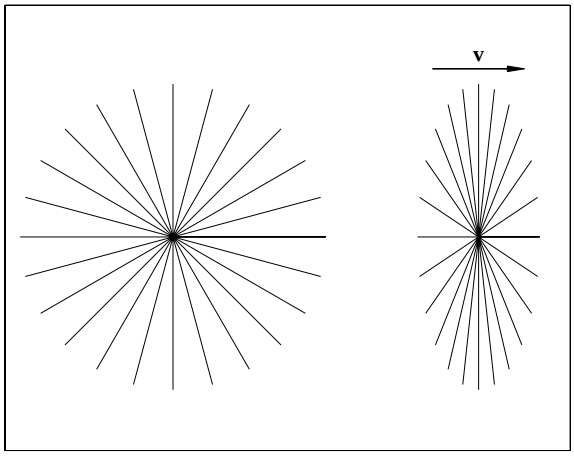
Tämä on puolestaan Coulombin kenttä tekijällä $1/\gamma^2$ pienennettynä.

Kenttäviivat saadaan piirtämällä ensin staattisen varauksen kenttäviivat ja sitten liikuttamalla kuviota suurella nopeudella silmien ohi, jolloin havaitaan Lorentz-kontraktio (ei onnistu kotioloissa kovin helposti). Vaihtoehtoisesti puristetaan x-akselia kasaan tekijän γ verran (kuva 13.3). Kannattaa kuitenkin muistaa, että kenttäviivat eivät ole todellisia fysikaalisia olioita. Magneettikentän hahmottaminen jää lukijan mietittäväksi samoin kuin hitaasti liikkuvan varauksen magneettikentän osoittaminen samaksi kuin luvussa 5.

13.2.2 Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä

Tarkastellaan aluksi epärelativistista rajaa ($\beta \ll 1$), jolloin $1/R$-säteilykentiksi tulee

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{v}})/R \tag{13.37}$$



Kuva 13.3: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen sähkökentän kenttäviivat. Vasemmalla staattinen varaus, oikealla liikkuva varaus.

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3}\,\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}/R \tag{13.38}$$

missä $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Näistä saadaan Poyntingin vektoriksi

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}|^2}{R^5}\mathbf{R} \tag{13.39}$$

Tämä vaimenee etäisyyden funktiona kuten $1/R^2$, joten Poyntingin vuo ei $1/R$-säteilykentillä mene nollaksi kaukanakaan varauksesta.

Säteilyteho avaruuskulmaan $d\Omega$ on siis

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2\dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta \tag{13.40}$$

missä θ on $\dot{\mathbf{v}}$:n ja $\mathbf{n}$:n välinen kulma. Suorittamalla kulmaintegroinnit saadaan **Larmorin kaava**

$$P = \frac{q^2\dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{13.41}$$

Tästä on oleellista ymmärtää, mistä verrannollisuus tekijään $(q\dot{\mathbf{v}})^2$ on peräisin.

Relativistisille hiukkasille t:n ja t':n välinen ero on tärkeä. Aikavälillä $t_1 = t_1' + R(t_1')/c ... t_2 = t_2' + R(t_2')/c$ säteilty energia on

$$W = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}]_{ret}\,dt = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\frac{dt}{dt'}dt' \tag{13.42}$$

On siis mielekästä määritellä hiukkasen säteilyn intensiteetti $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\ dt/dt' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\ (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ sen omassa ajassa ja omassa paikassa:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\left|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})\right|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \tag{13.43}$$

Kun $\beta \to 1$, niin $dP/d\Omega$:n nimittäjän merkitys kasvaa ja säteilykeila alkaa venyä hiukkasen liikkeen suuntaan. Maksimi-intensiteetti saavutetaan, kun $\theta_{max} \to 1/(2\gamma)$ ja keilan leveys on $\approx 1/\gamma$. Koska laskuissa ei ole tehty oletuksia kiihtyvyyden suunnasta, saadut kaavat kuvaavat sekä jarrutussäteilyä että syklotroni- ja synkrotronisäteilyä. Säteilyn kokonaisteho saadaan integroimalla kulmien yli (siis ei helposti) tai tekemällä Larmorin kaavalle Lorentzin muunnos (jos osataan suhteellisuusteoriaa). Lopputulos on

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c}\, \gamma^6 (\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2) \tag{13.44}$$