Elektrodynamiikka, kevät 2003

Harjoitus 3 (to 13.2., pe 14.2.)

1. Olkoon funktio φ harmoninen alueessa, joka sisältää $\mathbf{r}$-keskisen R-säteisen pallon B. Osoita, että
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial B}\varphi(\mathbf{r}')dS'$$
missä ∂B on pallon pinta. Green III saattaa olla avuksi:
$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V dV'\frac{\nabla^2\varphi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &\quad +\frac{1}{4\pi}\oint_S dS'\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\varphi(\mathbf{r}')\right]\end{aligned}$$
missä $\partial/\partial n' = \mathbf{n}'\cdot\nabla'$.
2. Kaksi yhdensuuntaista johdelevyä ovat tasoilla $z=0$ ja $z=d$. Niiden välissä on xy-tason poikkileikkaukseltaan mielivaltaisen muotoinen homogeeninen eristekappale, jonka korkeus on d ja permittiivisyys ϵ. Johdelevyjen potentiaalit ovat V_1 ja V_2. Määritä levyjen välisen alueen sähkökenttä ja sähkövuon tiheys. Ohje: eristekappaleen poikkileikkauksen muoto ei ole oleellinen.
3. Koaksiaalikaapelin sisäjohtimen säde on a. Sen ympärille on asetettu säteen b etäisyydelle asti eriste, jonka suhteellinen permittiivisyys on ϵ_r. Tämän jälkeen on ilmaväli ulkojohtimen etäisyydelle c asti. Sisä- ja ulkojohtimen välinen jännite on V. Määritä suurin systeemissä esiintyvä sähkökenttä.
4. Eristepallossa (säde R) on vakiopolarisoituma $\mathbf{P}_0$ eikä muita sähkökentän lähteitä ole. Laske $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{D}$ pallon sisä- ja ulkopuolella (ulkopuolinen alue on ilmaa). Suoraviivaisin tapa lienee integroida polarisaatiovaraustiheyttä, jolloin palloharmonisista funktioista on hyötyä. Toinen mahdollisuus on huomata, että potentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön ja ratkaista se.
5. Säännöllisessä kuutiohilassa sijaitsevien molekyylien dipolimomenttivektorit ovat identtiset. Osoita, että jokaisessa hilapisteessä muiden dipolien aiheuttama sähkökenttä häviää. Oleta täysin yleinen dipolimomenttivektori, jolla on kolme komponenttia.

Ratkaisut on palautettava viimeistään tiistaina 11.2. klo 12.

Huom. 6.2. lähtien torstain aamuharjoitukset alkavat klo 8.30.