# Elektrodynamiikka

Hannu Koskinen ja Ari Viljanen

Kevät 2004

Tämä luentomoniste on päivitetty versio Ari Viljasen keväiden 2002-03 luennoista, jotka puolestaan perustuivat Hannu Koskisen aiempiin luentoihin. Vuoteen 2003 verrattuna aineisto on suunnilleen sama, mutta vuoden 2003 luku 14 (säteilevät systeemit) on jätetty pois. Merkintöjä on yhtenäistetty ja painovirheitä korjattu. Ylikurssiaineisto on merkitty esimerkiksi alaviitteellä "kuuluu yleissivistykseen". Nämäkin kohdat pyritään silti käymään luennoilla läpi ja niistä voi olla laskuharjoituksia. Tekstiin on myös siroteltu entistä enemmän harjoitustehtäviä. Luennot ovat saatavissa kokonaan sähköisessä muodossa. Paperiversio on kopioitavana kirjaston luentomonistehyllyssä.

Uusimmassa monisteessa olevista virheistä voi ilmoittaa Ari Viljaselle (ari.viljanen@fmi.fi).

Kevään 2004 luennot: ma, to klo 10-12, sali E204.

Harjoitukset (2t/vk, sali D104): to 8-10, 12-14; pe 10-12 (Elina Keihänen ja Tiera Laitinen). Saa käydä missä ryhmässä tahansa.

1. välikoe ti 9.3. klo 10.00-14.00 (D101)
2. välikoe pe 14.5. klo 9.00-13.00 (D101)

Kurssin arvosana määräytyy siten, että kummankin välikokeen paino on 40 % ja laskuharjoitusten 20 %. Ohjeelliset arvosanarajat löytyvät opinto-oppaasta teoreettisen fysiikan kohdalta.

Täyden laskuharjoitushyvityksen saa ratkaisemalla tavallisista kolmen pisteen tehtävistä viisi kuudesosaa (ylimenevästä osasta saa lisäpisteitä). Laskuharjoituksissa tehtävän ratkaisun esittäminen taululla palkitaan yhdellä lisäpisteellä (korkeintaan yksi lisäpiste/harjoitus). Ratkaisujen esittäminen kuuluu fyysikon ammattitaitoon. Tarjolle tulee myös muutamia ylimääräisiä "harrastustehtäviä". Lisäkannustimena välikokeissa on perinteisesti ollut yksi tehtävä sellaisenaan tai lähes sellaisenaan koealueen harjoituksista.

# Luku 1

# Johdanto

*It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.*

R. P. Feynman

## 1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on kuuden opintoviikon paketti elektrodynamiikkaa, joka voidaan sisällyttää joko fysiikan laudatur-oppimäärään tai teoreettisen fysiikan cum laude- oppimäärään. Muutamana viime vuonna nämä aikanaan erilliset kurssit on luennoitu yhdessä. Kahden lähestymistavoiltaan erilaisen kurssin yhdistäminen ei ole ollut aivan helppo asia osin erilaisen oppimateriaalin, mutta myös opiskelijoiden erilaisen taustan ja mielenkiinnon kohteiden vuoksi.

Tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaan tulevissa tilanteissa. Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtäminen kuuluu jokaisen fyysikon yleissivistykseen. Se on opiskelijalle ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä on ratkaiseva osa. Toisaalta sähkömagnetismi on keskeisessä osassa niin kaikkialla fysiikassa kuin arkipäivässäkin. Parempaa syytä elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Tavoitteena on saada sähkö- ja magnetostatiikka sekä induktiolaki käsiteltyä ensimmäisen puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää pääasiassa dynaamisia ilmiöitä, jolloin samalla mennään syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön.

Kurssin **lähtötasoksi sähkömagnetismin osalta oletetaan fysiikan peruskurssien hallinta**. Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa ovat Kaarle ja Riitta Kurki-Suonion oppikirjat *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet* (KSII) ja *Aaltoliikkeestä dualismiin* (KSIII). Joillakin opiskelijoilla saattaa olla taustalla peruskurssin sijasta fysiikan approbatur, mikä tietenkin hyvin opiskeltuna riittää sekin.

Yksi elektrodynamiikan opiskelun vaikeuksista on varsin vaativien matemaattisten apuneuvojen tarve. Tällä kurssilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MAPU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Myös FYMM II olisi hyödyllinen, mutta koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat suorittavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä, tätä ei varsinaisesti edellytetä. **FYMM II:n opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on kuitenkin erittäin suositeltavaa**. Tärkeimpiä matemaattisia apuneuvoja kerrataan myös laskuharjoituksissa.

Laskuharjoitustehtävien ratkaiseminen on olennainen osa oppimista. Vaikeimpien ongelmien kohdalla aktiivinen ryhmätyö on erittäin hyödyllistä, kuten myös kirjallisuuden käyttö. Physicumin kirjasto tarjoaa loistavat mahdollisuudet tähän. On myös täysin luvallista kysyä vihjeitä luennoitsijalta ja assistenteilta.

## 1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti formaalisesti nykyasunsa vuonna 1864, kun *James Clerk Maxwell* julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan "Treatise on Electricity and Magnetism". Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen teoreettinen rakennelmansa perustui aiempien fyysikoiden töille, joista mainittakoon 1700-luvulta vaikkapa *Cavendish, Coulomb, Franklin, Galvani, Gauss* ja *Volta* sekä aiemmalta 1800-luvulta *Ampère, Arago, Biot, Faraday, Henry, Savart* ja *Ørsted*.

Tärkeimpiä Maxwellin teorian ennustuksia oli valon nopeudella etenevä sähkömagneettinen aaltoliike, jonka *Heinrich Hertz* onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suureen murroskauteen. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksia olivat esimerkiksi liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri tällaisia ongelmia selittämään *Albert Einstein* kehitti suppeamman suhteellisuusteoriansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian perusteet voikin olla havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria. Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korrektisti muotoilluksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi myös kvanttifysiikan kehitys. Se aiheutti paljon enemmän elektrodynamiikkaan liittyviä ongelmia, sillä ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi riittävän yleinen myös mikromaailmassa. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset muotoilut, kuten Schrödingerin yhtälö, ovat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennen kuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan **kvanttielektrodynamiikaksi** (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat *Julian Schwinger*, *Richard Feynman*, *Sin-itiro Tomonaga* ja *Freeman Dyson*. Nykyään elektrodynamiikka QED:n klassisena rajana on osa menestyksekästä **standardimallia**, jonka uskotaan olevan oikea tapa yhdistää sähkömagneettinen, heikko ja vahva perusvuorovaikutus. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on perusta paljon pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle!

HT: Kertaa perusvuorovaikutukset.
HT: Kertaa aaltohiukkasdualismi.

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka on tullut osaksi kvanttimaailman ihmeellisyyttä, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä aina ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Se on keskeistä materiaalifysiikassa, hiukkassuihkujen fysiikassa, röntgenfysiikassa, elektroniikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta myös menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Elektrodynamiikan perusongelmia ovat
1. Varauksellisten hiukkasten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän määrittäminen.
2. Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.
3. Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.
4. Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.
5. Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

## 1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päätyen **Maxwellin yhtälöihin** ikäänkuin olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei ole aivan totta enää tällä kurssilla, vaan käytännössä kaikki ovat jo tutustuneet ainakin päällisin puolin Maxwellin yhtälöihin ja tietävät yhtä ja toista elektrodynamiikan rakenteesta. Pohditaan jo kurssin aluksi hieman, mistä on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt "tyhjömuodossaan":

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} &\quad (1.1)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 &\quad (1.2)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\quad (1.3)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &\quad (1.4)
\end{aligned}
$$

Sähkökentän **E** ja magneettikentän (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden) **B** aiheuttajina ovat sähkövaraukset $\rho$ ja sähkövirrat **J**. Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein kenttien **D** ja **H** avulla, mihin palataan myöhemmin.

Yllä $\epsilon_0$ on tyhjön sähköinen permittiivisyys ja $\mu_0$ on tyhjön magneettinen permeabiliteetti. Näiden ja valon nopeuden $c$ välillä on yhteys $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. Koska valon nopeus tyhjössä on vakio, sille annetaan nykyään *tarkka* arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Koska sekunti määritellään tietyn Ce-133 siirtymäviivan avulla, tulee metristä johdannaissuure, joka on aika tarkkaan samanmittainen kuin Pariisissa säilytettävä platinatanko. Myös $\mu_0$ määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

joten myös tyhjön permittiivisyydelle tulee tarkka arvo $\epsilon_0 = (c^2\mu_0)^{-1}$, jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Nopeudella **v** liikkuvaan varaukseen $q$ vaikuttaa **Lorentzin voima**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

Tämä on suureen määrään kokeita perustuva **empiirinen laki**, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä perustavammasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan "nähdä", ne ovat fysikaalisia olioita. Niillä on energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mikroskooppisessa kuvailussa QED:n tasolla sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Tähän ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratoriokokeissa, mikä käy ilmi seuraavista esimerkeistä (HT: tarkasta lukuarvot peruskurssien tietojen avulla):

• Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on suunnilleen 50 V/m. Tämä merkitsee $10^{15}$ näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.

• Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Vastaavan fotonin liikemäärä on $2,2 \cdot 10^{-34}$ Ns. Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.

• Varausten diskreettisyyttä ei myöskään tarvitse yleensä huomioida. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan $10^{15}$ alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljetukseen tarvitaan $6,2 \cdot 10^{12}$ varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman $1/r^2$-etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin päätellä, että riippuvuus on ainakin lähes tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa $1/r^{2+\varepsilon}$, voidaan mittauksilla etsiä rajoja $\varepsilon$:lle. *Cavendish* päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen $|\varepsilon| \leq 0,02$. Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$, ja nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen $|\varepsilon| \leq (2,7 \pm 3,1) \cdot 10^{-16}$.

Teoreettisesti voi perustella, että $1/r^2$-etäisyysriippuvuus on yhtäpitävää fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin Cavendishin menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa $1,6 \cdot 10^{-50}$ kg. Geomagneettisilla mittauksilla yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi: $1,4 \cdot 10^{-51}$ kg. Fotonin massattomuus ja sähköisen voiman $1/r^2$-etäisyysriippuvuus ovat erittäin hyvin todennettuja *kokeellisia* tosiasioita. Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin kävi selväksi, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

## 1.4 Pari sanaa laskennasta

Elektrodynamiikassa **on** osattava laskea sujuvasti. Osa menetelmistä on tuttuja ennestään mapuilta ja vastaavilta kursseilta. Osa opitaan FYMM II:lla ja/tai tällä kurssilla. Sähköstatiikassa ja vähän myöhemmin magnetostatiikassa tulee vastaan vektorilaskenta, johon kuuluu erinäinen kokoelma derivointi- ja integrointitaitoja. Ne on syytä opetella heti kunnolla, koska niitä tarvitaan ihan oikeasti (jopa myöhemmin esimerkiksi tutkijan työssä). Erikoisfunktioista ei pidä hermostua, koska ne ovat vain funktioita. Muuta perustarvikkeistoa ovat esimerkiksi Fourier-sarjat ja kompleksiluvut. Eksoottisinta lienee tensorilaskenta, jota tarvitaan suhteellisuusteoriassa. Sen perusteet opetellaan tällä kurssilla myös riippumattomasti.

Kokeissa on syytä "laskennallisissa" tehtävissä kirjoittaa lyhyt sanallinen perustelu. Oikein ymmärretystä fysiikasta voi herua irtopisteitä, vaikka laskenta olisi epäonnistunut. Sanattomat kaavailut puolestaan eivät ole ansiokkaita.

## 1.5 Kirjallisuutta

• Cronström, C., ja P. Lipas, Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan, Limes ry., 2000 (jatkossa viite CL).

Uudistettu laitos TFO:n monivuotisesta luentomonisteesta. Suositeltavaa oheislukemistoa.

• Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, The Feynman lectures on physics, vol. II, Addison-Wesley, 1964.

Erittäin suositeltavaa oheislukemistoa sisältäen erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua ilman hankalaa laskennallista käsittelyä.

• Griffiths, D. J., Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall, 1999.

Suosittu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.

• Jackson, J. D., Classical electrodynamics, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.

Klassisen elektrodynamiikan piplia. Harjoitustehtävät ovat riittävän vaikeita. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.

• Kurki-Suonio, K. ja R., Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet ja Aaltoliikkeestä dualismiin, Limes ry., useita painoksia.

Erittäin fysikaalista tekstiä selvällä suomen kielellä. Tukee erityisen hyvin sähkö- ja magnetostatiikkaa ja aaltoliikkeen perusteita.

• Lindell, I., Sähkötekniikan historia, Otatieto, 1994.

Sähkömagnetismin historiaa ammoisista ajoista 1900-luvun alkuun.

• Lindell, I. ja A. Sihvola, Sähkömagneettinen kenttäteoria. 1. Staattiset kentät, Otatieto, 1999. Sihvola, A. ja I. Lindell, Sähkömagneettinen kenttäteoria. 2. Dynaamiset kentät, Otatieto, 2000. Sihvola, A., Sähkömagneettisen kenttäteorian harjoituskirja, Otatieto, 2001.

Elektrodynamiikkaa suunnilleen vastaava kokonaisuus TKK:lla. Hieman erilainen lähestymistapa, mutta tutustumisen arvoinen.

# Luku 2

# Staattinen sähkökenttä

Tässä luvussa tutustutaan sähkövarausten aiheuttamaan staattiseen sähkökenttään. Asia on periaatteessa tuttua peruskurssilta, mutta laskennallinen käsittely on huomattavasti järeämpää. Kannattaa olla kärsivällinen, sillä hyvin opittu sähköstatiikka helpottaa magnetostatiikan omaksumista.

## 2.1 Sähkövaraus ja Coulombin laki

Maailmankaikkeudessa on tietty määrä positiivisia ja negatiivisia sähkövarauksia. Nykytietämyksen mukaan niitä ei voida hävittää eikä luoda. Minkään suljetun systeemin varausten määrä ei siis voi muuttua. Käytännössä useimmat systeemit ovat neutraaleja, eli niissä on yhtä paljon positiivisia ja negatiivisia varauksia. Makroskooppisen kokonaisuuden varauksella tarkoitetaan yleensä sen nettovarausta eli poikkeamaa neutraalisuudesta. Nettovaraus säilyy, ellei systeemi ole vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa.

1700-luvun lopulla oli opittu, että varauksia on vain kahta lajia, joita nykyisin kutsutaan positiivisiksi ja negatiivisiksi. *Charles Augustin de Coulomb* muotoili kokeisiinsa perustuen lain: kaksi pistevarausta vaikuttavat toisiinsa voimilla, joiden suunta on niitä yhdistävän suoran suuntainen ja kääntäen verrannollinen varausten välisen etäisyyden neliöön. Voimat ovat verrannollisia varausten tuloon siten, että samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa. (Laiskan fyysikkoslangin mukaisesti puhutaan varauksista, vaikka parempi termi olisi ”varauksellinen hiukkanen”.)

**Coulombin laki** nykyaikaisin merkinnöin kertoo, että varaus $q_2$ vaikuttaa varaukseen $q_1$ **sähköstaattisella** voimalla

$$\mathbf{F}_1 = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \tag{2.1}$$

missä $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ on varauksesta $q_2$ varaukseen $q_1$ osoittava vektori[1]. Sähköstaattinen vuorovaikutus noudattaa voiman ja vastavoiman lakia. Jos varaukset liikkuvat, tilanne muuttuu ratkaisevasti, mutta siihen palataan myöhemmin. Jos varauksia on useita, varaukseen $q_i$ vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_i = k \sum_{j \neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \tag{2.2}$$

Tämä laki ilmaisee myös voimien kokeellisesti oikeaksi todetun yhteenlaskuperiaatteen eli **superpositioperiaatteen**.

Coulombin laki edellyttää vuorovaikutuksen välittymistä äärettömän nopeasti koko avaruuteen. Tämä on approksimaatio, koska mikään tieto ei etene suuremmalla kuin valon nopeudella. Toisaalta valon nopeuden suuren arvon vuoksi staattisuus on aivan kelvollinen oletus monissa käytännön tilanteissa.

Verrannollisuuskerroin $k$ riippuu käytetystä yksikköjärjestelmästä. Sähköopissa käytetään yhä usein cgs-yksiköitä (Gaussin yksiköitä), joissa $k = 1$. Tällöin varauksen yksikkö määritellään siten, että se aiheuttaa 1 cm etäisyydellä 1 dynen voiman (1 dyn = $10^{-5}$ N) toiseen yksikkövaraukseen. Me käytämme SI-yksiköitä eli MKSA-järjestelmää, jossa

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{2.3}$$

missä $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m on **tyhjön permittiivisyys**. Täten kertoimen numeroarvo on $k \approx 8,9874 \cdot 10^9$ $\mathrm{Nm^2C^{-2}}$ (muistisääntö: $9 \cdot 10^9$ SI-yksikköä). Näissä yksiköissä sähkövirta on perussuure. Palataan siihen tuonnempana, mutta todettakoon tässä, että virran SI-yksikkö on ampeeri (A) ja varauksen yksikkö coulombi (C = As). $\epsilon_0$:n yksikkö on faradi/metri (F/m = $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$).

Coulombin laki perustuu kokeellisiin havaintoihin ja voisi siten olla esimerkiksi $1/r^2$-riippuvuuden osalta vain likimääräinen tulos. Modernin fysiikan teoreettiset perusteet ja erittäin tarkat mittaukset viittaavat siihen, että $1/r^2$-riippuvuus on täsmällinen luonnonlaki. Myös painovoima riippuu etäisyydestä kuten $1/r^2$, mutta on olemassa vain yhdenmerkkistä massaa. Lisäksi se on paljon sähköstaattista voimaa heikompi (HT: vertaa kahden elektronin välistä sähköstaattista ja gravitaatiovuorovaikutusta.).

Tarkastellaan sitten varausta itseään. Mitattavissa oleva varaus on kvantittunut yhden elektronin varauksen suuruisiin kvantteihin. Makroskooppisessa mielessä alkeisvaraus on erittäin pieni ($e \approx 1,6019 \cdot 10^{-19}$ C). Kvarkeilla on $\pm 1/3$ ja $\pm 2/3$ $e$:n suuruisia varauksia, mutta ne näyttävät olevan

[1] Vektoreita merkitään lihavoiduilla symboleilla. Myös käsin kirjoitettaessa kuuluu hyviin tapoihin erottaa selvästi vektorit skalaareista vaikka piirtämällä viiva symbolin yläpuolelle tai mato sen alle.

Taulukko 2.1: Sähkövarausten suuruuksia ja suuruusluokkia. HT: Mieti, mikä ylläpitää Maan pinnan varausta.

| | varaus [C] |
|---|---:|
| elektroni | $1,6019 \cdot 10^{-19}$ |
| pieni kondensaattori | $10^{-7}$ |
| 1 A virta sekunnissa | 1 |
| salamaniskun kuljettama varaus | 1-100 |
| auton akusta saatavan virran kuljettama varaus | $10^5$ |
| Maan pinta | $10^6$ |

aina sidottuja toisiinsa siten, että kaikkien alkeishiukkasten varaukset ovat $\pm e$:n monikertoja ja elektronin varaus on siten pienin luonnossa vapaana esiintyvä varaus. HT: Kertaa peruskurssilta Millikanin koe.

Yksikkövarauksen pienuudesta johtuen makroskooppinen varausjakautuma muodostuu yleensä suuresta joukosta alkeisvarauksia, ja varaustiheyden käsite on hyödyllinen (vrt. taulukko 2.1). Kolmiulotteisen avaruuden **varaustiheys** määritellään muodollisesti

$$\rho = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{\triangle q}{\triangle V} \tag{2.4}$$

ja **pintavaraustiheys** vastaavasti

$$\sigma = \lim_{\triangle S \to 0} \frac{\triangle q}{\triangle S} \tag{2.5}$$

missä $V$ on tarkasteltava tilavuus ja $S$ tarkasteltava pinta. Jos tilavuudessa $V$ on varausjakautuma $\rho$ ja $V$:tä rajoittavalla pinnalla $S$ pintavarausjakautuma $\sigma$, niin pisteessä $\mathbf{r}$ olevaan varaukseen $q$ vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}')\, dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}')\, dS' \tag{2.6}$$

## 2.2 Sähkökenttä

Sähköstaattinen vuorovaikutus on luontevaa ajatella kaksivaiheiseksi: staattinen systeemi aiheuttaa kentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, joka vaikuttaa pisteessä $\mathbf{r}$ olevaan varaukselliseen hiukkaseen (varaus $q$) voimalla

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{2.7}$$

joka voidaan mitata. Sähköstatiikalle tyypillinen kokeellinen ongelma on se, että kenttään tuodaan tällöin "ylimääräinen" varattu kappale. Se voi vaikuttaa huomattavasti siihen varausjakaumaan, joka aiheuttaa kentän: kappaleet polarisoituvat. Tämän vuoksi useat oppikirjat puhuvat pienistä testivarauksista, jotka eivät vaikuta kentän aiheuttajaan. Sähkökentän voimakkuuden määritelmä ei kuitenkaan edellytä testivarauksen käsitettä. HT: Kuinka painovoima eroaa tässä suhteessa sähköstaattisesta voimasta?

Yksittäisten varausten ja varausjakautumien yhteenlaskettu sähkökenttä on voimien yhteenlaskuperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma(\mathbf{r}')\,dS' \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tässä vaiheessa on syytä tehdä itselleen kristallinkirkkaaksi lausekkeessa esiintyvien vektorimuuttujien merkitykset. Vektori $\mathbf{r}$ on kentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ havaintopiste. Vektori $\mathbf{r}'$ käy puolestaan läpi kaikki jatkuvan varausjakauman pisteet eli se on integroimismuuttuja; $\mathbf{r}_i$ on yksittäisen pistevarauksen paikka.

Yksittäiset pistevaraukset voidaan käsitellä myös samalla tavalla kuin varausjakautumat ottamalla käyttöön Diracin deltafunktio $\delta(\mathbf{r})$, jolloin pisteessä $\mathbf{r}_i$ olevaan varaukseen $q_i$ liittyvä varaustiheys on $\rho(\mathbf{r}) = q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$. Deltafunktion tutuiksi oletettuja perusominaisuuksia ovat

$$\delta(\mathbf{r}) = 0\,, \quad \text{jos } \mathbf{r} \neq 0 \tag{2.9}$$

$$\int F(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = F(\mathbf{r}_0) \tag{2.10}$$

Periaatteessa sähkökenttä voidaan siis määrittää laskemalla kaikkien varausjakautumien ja yksittäisten hiukkasten aiheuttamat kentät. Käytännössä tämä on usein täysin ylivoimainen tehtävä. Myöskään mielikuvan luominen sähkökentästä ei ole aivan yksinkertaista. *Faraday* otti käyttöön **kenttäviivan** käsitteen. Vektorikentän kenttäviiva on matemaattinen käyrä, joka on jokaisessa pisteessä kyseisen vektorin suuntainen. Se on oikein käytettynä hyödyllinen apuväline, mutta se on turvallisinta ymmärtää vain keinoksi havainnollistaa sähkökenttää, joka on varsinainen fysikaalinen suure.

HT: Kuinka kuvailisit sähkökenttää (tai magneettikenttää) henkilölle, joka ei ole fyysikko? Pohdi asiaa uudestaan kurssin loppuvaiheissa, kun dynamiikka on tullut tutuksi.

HT: Kuinka selittäisit jonkin arkipäiväisen sähköstaattisen ilmiön pienelle lapselle? Kokeile samaa myöhemmin magnetostatiikassa.

## 2.3 Sähköstaattinen potentiaali

Vektorianalyysin alkeista tiedetään, että

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \tag{2.11}$$

joten staattisen sähkökentän roottori häviää:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.12}$$

Sähkökenttä voidaan siis esittää **sähköstaattisen potentiaalin** $\varphi$ avulla:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \tag{2.13}$$

Pisteessä $\mathbf{r}_1$ sijaitsevan hiukkasen aiheuttama potentiaali on siten

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \tag{2.14}$$

kun sovitaan, että äärettömyydessä potentiaali häviää. Vastaavasti mielivaltaiselle varausjoukolle

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dS' \tag{2.15}$$

Sähköstaattinen kenttä on esimerkki **konservatiivisesta** voimakentästä. Tämä merkitsee, että **potentiaalienergia** $U$ eli voiman $\mathbf{F}$ viivaintegraali annetusta vertailupisteestä $\mathbf{r}_0$ tarkastelupisteeseen $\mathbf{r}$

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \tag{2.16}$$

on riippumaton integrointitiestä. Koska itse fysikaalinen suure sähkökenttä riippuu vain potentiaalin derivaatasta, potentiaalin nollakohdan voi valita mieleisekseen. Asettamalla $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$ saadaan $U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r})$.

Potentiaalin käsitteestä on suurta hyötyä erilaisissa sähkökenttään liittyvissä ongelmissa. Tämä johtuu osaksi siitä, että sähkökentän integroiminen varausjakautumista on monimutkaisempi tehtävä kuin yksinkertaisemman potentiaalin laskeminen. Potentiaali on vielä derivoitava, mutta se on helpompaa kuin integrointi. Merkittävä syy potentiaalin käyttökelpoisuudelle on se, että matematiikan potentiaaliteoria tarjoaa koko joukon hyödyllisiä apuneuvoja.

SI-järjestelmässä voiman yksikkö on newton (N) ja varauksen yksikkö on coulombi (C), joten sähkökentän yksikkö on N/C. Energian yksikkö on puolestaan joule (J = Nm) eli sähköstaattisen potentiaalin yksikkö on siten J/C. Sähköopissa potentiaalin yksikköä kutsutaan voltiksi (V = J/C) ja sähkökentän yksikkö ilmaistaan yleensä muodossa V/m.

## 2.4 Gaussin laki

### 2.4.1 Maxwellin ensimmäinen yhtälö

Tarkastellaan origossa olevan pistevarauksen $q$ kenttää

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.17}$$

Olkoon $V$ jokin tilavuus varauksen ympärillä ja $S$ sen reuna. Integroidaan sähkökentän normaalikomponentti reunan yli:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS \tag{2.18}$$

missä $\mathbf{n}$ on pinnan $S$ yksikköulkonormaali. Nyt $(\mathbf{r}/r)\cdot\mathbf{n}\,dS$ on pinta-alkiovektorin $\mathbf{dS} = dS\ \mathbf{n}$ projektio $\mathbf{r}$:ää vastaan kohtisuoralle tasolle ja tämä pinta-ala jaettuna $r^2$:lla on avaruuskulma-alkio $d\Omega$, joka pallokoordinaatistossa on $\sin\theta\,d\theta\,d\phi$. Valitaan $V$:n sisäpuolelta origokeskinen pallo, jonka reuna on $S'$. Infinitesimaalinen pinta-alkio $dS'$ kattaa yhtä suuren avaruuskulman $d\Omega$ kuin elementti $dS$, joten

$$\oint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{r'^3}\,dS' = \oint_{S'} d\Omega = 4\pi \tag{2.19}$$

mistä seuraa

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = q/\epsilon_0 \tag{2.20}$$

Jos varaus on tilavuuden $V$ ulkopuolella, se ei vaikuta pintaintegraaliin. Tämän näkee tarkastelemalla varauksen kohdalta kohti tilavuutta $V$ avautuvaa avaruuskulmaelementin $d\Omega$ suuruista kartiota. Tämä kartio läpäisee tilavuuden $V$ sekä sisään- että ulospäin ja pinta-alkioiden integraalit summautuvat nollaan (HT: piirrä kuva).

Tulos yleistyy $N$:n varauksen parvelle:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \tag{2.21}$$

Jos suurta varausjoukkoa tarkastellaan varausjakautumana, voidaan $\rho\,dV$ ajatella alkioksi, joka tuo osuuden $\rho\,dV/\epsilon_0$ eli integroituna tilavuuden $V$ yli

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dV \tag{2.22}$$

mikä on peruskurssilta tuttu **Gaussin laki** integraalimuodossa.

Vektorianalyysin **divergenssiteoreeman** eli **Gaussin lauseen** mukaan riittävän siistille vektorikentälle $\mathbf{u}$ pätee

$$\oint_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{u}\,dV \tag{2.23}$$

missä $\mathbf{n}$ on tilavuutta $V$ ympäröivän pinnan $S$ ulkonormaalivektori. Sovelletaan tätä Gaussin lain vasemmalle puolelle, jolloin

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV \tag{2.24}$$

Tämän täytyy olla riippumaton tilavuuden $V$ valinnasta, eli

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{2.25}$$

Tämä on Gaussin laki differentiaalimuodossa eli Maxwellin ensimmäinen yhtälö.

### 2.4.2 Gaussin lain soveltamisesta

Gaussin laki on kätevä esimerkiksi tilanteessa, jossa voidaan päätellä kentän olevan vakio jollain koordinaatiston tasa-arvopinnalla. Lisäksi on tiedettävä kenttävektorin suunta.

#### Pallosymmetrinen varausjakautuma

Pallosymmetrisessä tapauksessa varaustiheys on muotoa $\rho = \rho(r)$, jolloin sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan etäisyydestä origosta: $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, mikä on helppo päätellä suoraan Coulombin laista. Tarkastellaan Gaussin lakia pallokoordinaateissa, kun pinnaksi $S$ valitaan $r$-säteinen pallo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} E(r)\mathbf{e}_r \cdot (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{e}_r) = 4\pi r^2 E(r) \tag{2.26}$$

Toisaalta pallon sisään jää varaus

$$\int \rho dV = \int_0^r \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(r')(r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{2.27}$$

joten pallosymmetrisen varausjakautuman sähkökenttä on

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{2.28}$$

Sovelletaan tätä tasaisesti varatulle $R$-säteiselle pallolle, jonka sisällä varaustiheys on $\rho_0$ ja ulkopuolella nolla. Pallon kokonaisvaraus on $Q = 4\pi R^3 \rho_0/3$. Integrointi antaa sähkökentäksi

$$\begin{aligned} r \leq R: \qquad & E(r) = \frac{Q\, r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ r > R: \qquad & E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Varausjakautuman ulkopuolella sähkökenttä on siis sama kuin origossa olevan pistevarauksen $Q$ kenttä.

### Viivavaraus

Esimerkkinä sylinterisymmetrisestä tapauksesta tarkastellaan pitkää tasaisesti varattua ohutta lankaa, jonka varaustiheys pituusyksikköä kohti on $\lambda$. Symmetrian perusteella sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan radiaalisesta etäisyydestä. Tarkastellaan langan ympärillä olevaa $r$-säteistä sylinteriä, jonka pituus on $l$. Integroitaessa sähkökentän normaalikomponenttia sylinterin pinnan yli sylinterin päät eivät tuota mitään. Vaipan pinta-ala on $2\pi rl$ ja sylinterin sisällä oleva varaus $\lambda l$, joten Gaussin laki antaa $2\pi rlE_r = \lambda l/\epsilon_0$ eli

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{2.30}$$

Viivavarauksen kenttä pienenee siis kuten $r^{-1}$. Kentän potentiaali on

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(r/r_0) \tag{2.31}$$

missä $r_0$ on vakio. Tässä tapauksessa ei voida sopia potentiaalia nollaksi äärettömän kaukana.

### Johdekappale

Kappaletta, jolla voi olla sisäistä varausta, kutsutaan **eristeeksi** (engl. dielectric). **Johteissa** on puolestaan tarpeeksi liikkuvia varauksia, jotka jatkavat liikettään, kunnes sähkökenttä kappaleen sisällä on nolla. Varaukset joutuvat tällöin kappaleen pinnalle, eli sisällä varaustiheys on nolla ja kappaleen mahdollinen nettovaraus on pintavarausta. Jotta tilanne olisi staattinen, pinnalla olevan sähkökentän täytyy olla pinnan normaalin suuntainen: $\mathbf{E}_n = E_n\mathbf{n}$, koska muuten varaukset liikkuisivat pitkin pintaa.

Sovelletaan Gaussin lakia sylinterinmuotoiseen pillerirasiaan (korkeus $h$), jonka ulompi pinta yhtyy tarkasteltavan kappaleen pintaan ja jonka tilavuus on $h\,dS$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$, $dS$ pohjan pinta-ala) (kuva 2.1). Saadaan

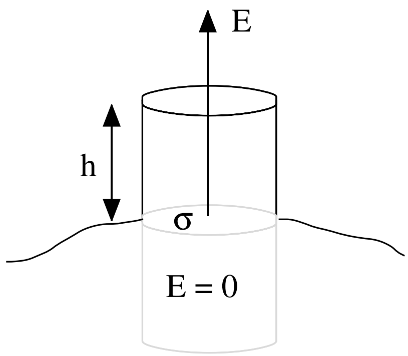
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_n\cdot\mathbf{n}\,dS - \mathbf{E}_i\cdot\mathbf{n}\,dS + \int_{vaippa}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.32}$$

missä $\mathbf{E}_i$ on kenttä pillerirasian sisemmällä pinnalla, siis 0. Rajalla $h \to 0$ integraali vaipan yli menee myös nollaksi ja

$$\mathbf{E}_n\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dV = \frac{\sigma\,dS}{\epsilon_0} \tag{2.33}$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla pinta-alkioilla, on sähkökenttä johdekappaleen pinnalla suoraan verrannollinen pintavaraukseen:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{n} \tag{2.34}$$




Kuva 2.1: Pillerirasia johdekappaleen reunalla.

Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että mielivaltaisen johdekappaleen ympäröimässä tyhjässä onkalossa ei ole sähköstaattista kenttää. Samoin jää mietittäväksi, miksi tämä on merkittävä tulos Coulombin lain kokeellisen testaamisen kannalta.

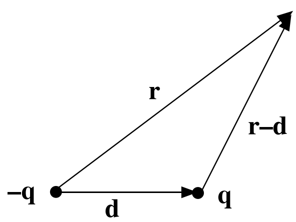
HT: Laske tasaisesti varatun äärettömän tason aiheuttama sähkökenttä ja vertaa ylläolevaan tulokseen.

## 2.5 Sähköinen dipoli

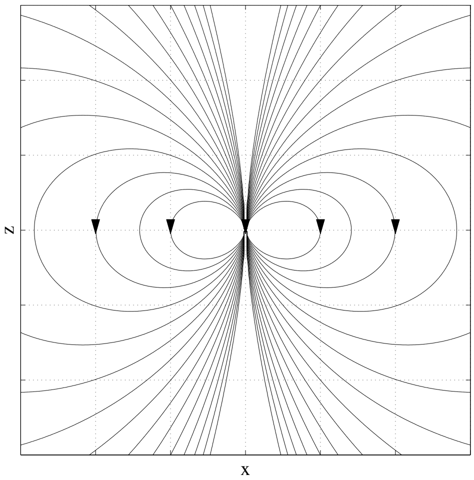
Olkoon origossa varaus $-q$ ja pisteessä $\mathbf{d}$ varaus $q$ (kuva 2.2). Tällöin potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) \tag{2.35}$$

Tämä lauseke on täysin yleinen riippumatta varausten etäisyydestä. Sähköisellä dipolilla tarkoitetaan raja-arvoa $d \to 0$, mikä on sama asia kuin dipolin




Kuva 2.2: Sähködipoli muodostuu kahdesta lähekkäisestä samansuuruisesta vastakkaismerkkisestä varauksesta.




Kuva 2.3: Dipolikentän kenttäviivat $xz$-tasossa. Dipoli sijaitsee origossa ja on $z$-akselin suuntainen.

katselu kaukaa ($|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$). Binomisarjan avulla saadaan

$$|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^{-1} = [r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{d} + d^2]^{-1/2} = \frac{1}{r}(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + ...) \tag{2.36}$$

Rajalla $d \to 0$ potentiaali häviää, ellei $q$ kasva rajatta. Pistedipoli on idealisaatio, jonka varaus on nolla, mutta jonka **dipolimomentti** $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ on äärellinen. Origossa olevan sähködipolin potentiaali on siis

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tag{2.37}$$

Ottamalla tästä gradientin vastaluku saadaan sähkökentäksi (HT)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p\cos\theta}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} \tag{2.38}$$

missä $\theta$ on dipolimomentin ja vektorin $\mathbf{r}$ välinen kulma. Myöhemmin saadaan magneettiselle dipolille samanmuotoiset lausekkeet. Dipolikentän kenttäviivat on hahmoteltu kuvaan 2.3.

## 2.6 Sähkökentän multipolikehitelmä

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista varausjakautumaa $\rho(\mathbf{r}')$ origon ympäristössä. Sen aiheuttama potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{2.39}$$

Kehitetään $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ binomisarjaksi, kun $r > r'$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right] + \frac{3}{8}[\;\;]^2 + ...\right\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Sijoitetaan tämä potentiaalin lausekkeeseen, jätetään $\mathbf{r}'$:n toista potenssia korkeammat termit pois ja järjestetään termit $\mathbf{r}'$:n kasvavien potenssien mukaan. Tämä antaa potentiaalin multipolikehitelmän **kvadrupolimomenttia** myöten

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_V \rho(\mathbf{r}')\,dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int_V \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dV' \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\int_V (3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(\mathbf{r}')\,dV'\right\} \end{aligned} \tag{2.41}$$

missä $x_i$:t ovat paikkavektoreiden karteesisia komponentteja ja $\delta_{ij}$ on Kroneckerin delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{2.42}$$

Multipolikehitelmän ensimmäinen tekijä vastaa origoon sijoitetun varausjakautuman osuutta potentiaaliin. Toinen tekijä vastaa origoon sijoitettua dipolimomenttien jakautumaa. Kolmas termi on muotoa

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij}$$

missä $Q_{ij}$ on **kvadrupolimomenttitensori**. Potentiaalin multipolikehitelmä voidaan siis kirjoittaa sarjana

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij} + ...\right\} \tag{2.43}$$

Kaukana varausjakautumasta potentiaali on likimain ensimmäisen nollasta poikkeavan termin aiheuttama potentiaali. Atomien ytimissä dipolimomentti on nolla, mutta korkeammat multipolit ovat tärkeitä ydinfysiikassa.

## 2.7 Poissonin ja Laplacen yhtälöt

Sähköstatiikka olisi aika suoraviivaista, jos tietäisimme kaikkien varausjakautumien paikkariippuvuudet. Näin ei kuitenkaan ole monissa käytännön ongelmissa. Koska $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ja $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, Gaussin laki differentiaalimuodossa vastaa matematiikan **Poissonin yhtälöä**

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.44}$$

Jos varaustiheys on nolla, niin Poissonin yhtälö yksinkertaistuu **Laplacen yhtälöksi**

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{2.45}$$

Laplacen yhtälön toteuttavaa funktiota kutsutaan harmoniseksi.

Poissonin yhtälö voidaan ratkaista, jos varausjakautuma ja oikeat reunaehdot tunnetaan. Tarkastellaan sähköstaattista systeemiä, joka koostuu $N$ johdekappaleesta. Kunkin johteen pinnalla potentiaali on $\varphi_i,\ i = 1, \ldots, N$. Reunaehtoja on kahta perustyyppiä:

1. Tunnetaan potentiaali $\varphi$ alueen reunalla (**Dirichlet'n reunaehto**).

2. Tunnetaan potentiaalin derivaatan normaalikomponentti $\partial\varphi/\partial n$ alueen reunalla (**von Neumannin reunaehto**).

Selvitetään, ovatko mahdollisesti löydettävät ratkaisut yksikäsitteisiä. On selvää, että jos $\varphi_1(\mathbf{r}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{r})$ ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja, niin

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum C_i\varphi_i(\mathbf{r})$$

missä $C_i$:t ovat mielivaltaisia vakioita, on Laplacen yhtälön ratkaisu.

**Yksikäsitteisyyslause:** kaksi annetut reunaehdot täyttävää Poissonin yhtälön ratkaisua ovat additiivista vakiota vaille samat. Tarkastellaan tämän todistamiseksi johteiden pinnat $S_1, \ldots, S_N$ sisäänsä sulkevaa tilavuutta $V_0$, joka on pinnan $S$ sisällä (pinta voi olla äärettömyydessä). Olkoot $\varphi_1$ ja $\varphi_2$ kaksi Poissonin yhtälön toteuttavaa ratkaisua, jotka täyttävät samat reunaehdot johteiden pinnalla $S_I$, siis joko $\varphi_1 = \varphi_2$ tai $\partial\varphi_1/\partial n = \partial\varphi_2/\partial n$ näillä pinnoilla sekä pinnalla $S$. Tarkastellaan funktiota $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Tilavuudessa $V_0$ on selvästi $\nabla^2\Phi = 0$. Reunaehdoista puolestaan seuraa, että kaikilla reunoilla

$$\text{joko} \quad \Phi = 0 \quad \text{tai} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

Sovelletaan sitten divergenssiteoreemaa vektoriin $\Phi\nabla\Phi$:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi)\, dV = \oint_{S+S_1+\ldots+S_N} (\Phi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

koska joko $\Phi$ tai $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$ on pinnoilla 0. Toisaalta

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

eli

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2 \, dV = 0$$

Koska $(\nabla\Phi)^2 \geq 0$ koko alueessa $V_0$, sen on oltava nolla kaikkialla. Tästä seuraa, että $\Phi$ on vakio koko alueessa $V_0$ ja yksikäsitteisyyslause on siten todistettu.

Tämä ei ole todistus ratkaisun olemassaololle vaan sille, että mahdolliset ratkaisut ovat yksikäsitteisiä. Tuloksen tärkeys on siinä, että jos löydetään millä keinolla tahansa annetut reunaehdot täyttävä Poissonin yhtälön ratkaisu, se on Dirichlet'n reunaehdolla yksikäsitteinen ja von Neumannin reunaehdolla vakiota eli potentiaalin nollatasoa vaille yksikäsitteinen.

## 2.8 Laplacen yhtälön ratkaiseminen

Laplacen yhtälö on fysiikan keskeisimpiä yhtälöitä. Sähköopin lisäksi se esiintyy lämmönsiirtymisilmiöissä, virtausmekaniikassa jne. Kovin monimutkaisissa tilanteissa yhtälöä ei voi ratkaista analyyttisesti, mutta joskus ongelman symmetriasta on hyötyä. Laplacen yhtälö, joka on osittaisdifferentiaaliyhtälö, saadaan separointimenetelmällä muunnettua ryhmäksi tavallisia yhden muuttujan differentiaaliyhtälöitä. Laplacen yhtälö voidaan separoida kaikkiaan 11 erilaisessa koordinaatistossa, joista tässä esiteltävät kolme tapausta ovat tavallisimmat.

### 2.8.1 Karteesinen koordinaatisto

Kirjoitetaan Laplacen yhtälö ensin karteesisissa koordinaateissa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.46}$$

ja etsitään sille ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.47}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.46) ja jaetaan tulolla $XYZ$, jolloin saadaan

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \tag{2.48}$$

Nyt jokainen termi riippuu vain yhdestä muuttujasta, jotka ovat keskenään riippumattomia. Niinpä kunkin termin on oltava erikseen vakioita

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2\,; \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2\,; \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \tag{2.49}$$

missä $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Kukin yhtälöistä (2.49) on helppo ratkaista:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{\beta y} + B_2 e^{-\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Yleisesti kompleksiarvoiset vakiot $A_i$, $B_i$, $C_i$ ja $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ määräytyvät ongelman reunaehdoista. Koko ratkaisu on muodollisesti summa

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.51}$$

missä separointivakioille $\alpha, \beta, \gamma$ tulee tilanteesta riippuvia rajoituksia.

### Esimerkki. Potentiaali laatikossa

Tarkastellaan laatikkoa $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$. Olkoon potentiaali nolla muilla reunoilla paitsi yläkannella ($z = c$), jossa se on tunnetuksi oletettu funktio $V(x, y)$. Ratkaistaan potentiaali laatikon sisällä.

Edellä saatua ratkaisua voitaisiin käyttää suoraan, mutta kirjoitetaankin nerokkaasti

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \\ Y(y) &= B_1 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \\ Z(z) &= C_1 \sinh(\gamma z) + C_2 \cosh(\gamma z) \end{aligned} \tag{2.52}$$

missä $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ (HT: totea, että yrite on kelvollinen). Tässä on tarkoituksella valittu trigonometriset funktiot $x$- ja $y$-suunnissa ja hyperboliset funktiot $z$-suunnassa. Reunaehtoja soveltamalla nähdään heti, että voidaan valita $A_2 = B_2 = C_2 = 0$, kun separointivakiot $\alpha$ ja $\beta$ toteuttavat seuraavat ehdot (reunaehdoista sivuilla $x = a$ ja $y = b$):

$$\begin{aligned} \alpha &= m\pi/a \\ \beta &= n\pi/b \end{aligned} \tag{2.53}$$

missä $m, n$ ovat kokonaislukuja, ja ne voidaan rajoittaa lisäksi positiviisiksi. Myös kolmas separointivakio saa silloin vain diskreettejä arvoja:

$$\gamma = \gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \tag{2.54}$$

Samaan tulokseen olisi luonnollisesti päädytty, vaikka olisi lähdetty liikkeelle eksponenttifunktioiden avulla kirjoitetusta ratkaisusta. Tilanteesta riippuu, mikä muoto on laskuteknisesti mukavin.

Tähän mennessä on siis saatu ratkaisuksi Fourier-sarja

$$\varphi(x,y,z)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)\sinh(\gamma_{mn}z) \tag{2.55}$$

On järkevää tarkastaa vielä kerran, että tämä toteuttaa Laplacen yhtälön ja antaa potentiaaliksi nollan vaadituilla reunoilla. Tuntemattomat kertoimet $A_{mn}$ saadaan asettamalla $z=c$:

$$\varphi(x,y,c)=V(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)\sinh(\gamma_{mn}c) \tag{2.56}$$

Loppu on Fourier-kertoimien määrittämistä. Jos funktio $V(x,y)$ on riittävän siisti, kertoimet saadaan laskettua ortogonaalisuusintegraalien avulla. Tämä lienee tuttua FYMM I:ltä.

Edellä ei mietitty sitä mahdollisuutta, että jotkin separointivakioista olisivat voineet olla nollia. Huolellinen lukija tutkikoon erikseen tämän tilanteen. Lyhyemmin voidaan kuitenkin todeta, että löydetty ratkaisu on selvästi kelvollinen ja yksikäsitteisyyslauseen mukaan ongelma on sillä selvä.

### 2.8.2 Pallokoordinaatisto

Koska pistevarauksen kenttä on pallosymmetrinen, pallokoordinaatisto on usein erittäin käyttökelpoinen. Laplacen yhtälö on tällöin

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0 \tag{2.57}$$

Etsitään tälle ratkaisua muodossa

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{2.58}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.57), kerrotaan suureella $r^2\sin^2\theta$ ja jaetaan $R\Theta\Phi$:llä:

$$r^2\sin^2\theta\left(\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0 \tag{2.59}$$

Ainoastaan viimeinen termi riippuu $\phi$:stä, joten sen on oltava vakio, jota merkitään $-m^2$:llä:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2 \tag{2.60}$$

Tämän ratkaisut ovat muotoa

$$\Phi(\phi)=Ce^{\pm im\phi} \tag{2.61}$$

Yleisesti $m$ on kompleksinen, mutta fysikaalinen ehto rajaa sen mahdolliset arvot: jotta potentiaali olisi jatkuva, kun $\phi \to 0$ ja $\phi \to 2\pi$, on oltava $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, joten $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Jatkuvuus on luonnollinen vaatimus, koska sähköstaattinen potentiaali voidaan tulkita yksikkövarauksen potentiaalienergiaksi.

Yhtälön (2.59) ensimmäisen termin on oltava puolestaan $m^2$, joten

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) = 0 \tag{2.62}$$

Tämän yhtälön ensimmäinen ja toinen termi riippuvat kumpikin ainoastaan omasta muuttujastaan ja ovat siten yhtäsuuria vastakkaismerkkisiä vakioita, jota merkitään mukavuussyistä $l(l+1)$:llä

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = l(l+1) \tag{2.63}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.64}$$

Yhtälön (2.63) yleinen ratkaisu löydetään yritteellä $R(r) = r^s$:

$$R(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} \tag{2.65}$$

missä $A$ ja $B$ ovat vakioita. Kirjoittamalla $\xi = \cos\theta$ saadaan $\Theta$:n yhtälöksi

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right) \Theta = 0 \tag{2.66}$$

Jotta tämän ratkaisut olisivat äärellisiä pisteissä $\xi = \pm 1$ eli $\theta = 0, \pi$, on oltava $l = |m|, |m|+1, \ldots$. Tietyllä tavalla normitettuja ratkaisuja ovat **Legendren liittofunktiot** $P_l^m(\xi)$. Niille on voimassa ehto $|m| \leq l$, joten

$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l \tag{2.67}$$

Erikoistapauksessa $m = 0$ Laplacen yhtälön ratkaisu ei riipu $\phi$:sta, jolloin Legendren liittofunktiot palautuvat **Legendren polynomeiksi** $P_l$:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\, l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \tag{2.68}$$

Legendren liittofunktiot saadaan puolestaan Legendren polynomeista:

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \tag{2.69}$$

Yleisesti Laplacen yhtälöllä on siis pallokoordinaatistossa jokaista $l$ kohti $2l+1$ kulmista $\theta$ ja $\phi$ riippuvaa ratkaisua. Ne voidaan sopivasti normittaen lausua **palloharmonisten funktioiden**

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{2.70}$$

avulla. Normitus on valittu siten, että pallofunktiot $Y_{lm}$ muodostavat ortonormitetun täydellisen funktiojärjestelmän pallon pinnalla:

$$\int Y_{lm}^*(\theta,\phi) Y_{np}(\theta,\phi)\, d\Omega = \delta_{ln}\delta_{mp} \tag{2.71}$$

Palloharmonisten yhteenlaskuteoreema antaa kahden vektorin välisen etäisyyden käänteisluvun summana

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta',\phi') \tag{2.72}$$

missä vektorin $\mathbf{r}$ suuntakulmat ovat $\theta,\phi$ ja vektorin $\mathbf{r}'$ suuntakulmat $\theta',\phi'$ sekä $r_< = min(r,r')$ ja $r_> = max(r,r')$. Tämä on hyödyllinen tulos, koska se erottelee pisteiden $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$ koordinaatit $(r,\theta,\phi)$ ja $(r',\theta',\phi')$. Moni integraali olisi vaikea laskea ilman tätä kaavaa.

Mikä hyvänsä riittävän säännöllinen pallon pinnalla määritelty funktio voidaan kehittää palloharmonisten sarjaksi. Esimerkkinä käy maapallon magneettikenttä, jonka sarjakehitelmän johtava termi vastaa magneettista dipolia ja korkeammat termit johtuvat kentän lähteen poikkeamisesta dipolista, magneettisen maa-aineksen epätasaisesta jakautumasta ja maapallon yläpuolisissa ionosfääreissä ja magnetosfääreissä kulkevista sähkövirroista. Palloharmonisia funktioita tarvitaan paljon myös atomifysiikassa ja kvanttimekaniikassa mm. tarkasteltaessa impulssimomenttioperaattoreita. Tekijä $(-1)^m$ kaavassa (2.70) on vaihetekijä, joka voidaan jättää pois tai ottaa mukaan jo $P_l^m$:n määritelmässä (2.69). Sen ottaminen mukaan on hyödyllistä etenkin kvanttimekaniikan laskuissa (katso esim. $Arfken$).

Kootaan lopuksi Laplacen yhtälön separoituva ratkaisu, kun $0 < r < \infty$:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta,\phi) + \sum_{lm} B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{2.73}$$

missä summaus on

$$\sum_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}$$

ja kertoimet $A_{lm}, B_{lm}$ määräytyvät reunaehdoista.

**Esimerkki. Kiertosymmetrinen tilanne**

Rajoitutaan nyt tapaukseen, jossa $\partial\varphi/\partial\phi = 0$ eli $\varphi = \varphi(r,\theta)$. Tällaisia ovat esimerkiksi pistevarauksen tai dipolin kentät. Laplacen yhtälö on nyt

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{2.74}$$

Toistetaan harjoituksen vuoksi edellä ollut muuttujien separointi etsimällä ratkaisua yritteellä $\varphi(r,\theta) = Z(r)P(\theta)$, jolloin

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = -\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) \tag{2.75}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin jokin vakio $k$ kaikilla $r$:n ja $\theta$:n arvoilla. Näin osittaisdifferentiaaliyhtälö on hajotettu kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Kulman $\theta$ yhtälöä kirjoitettuna muodossa

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + kP = 0 \tag{2.76}$$

kutsutaan **Legendren yhtälöksi**. Kuten edellä todettiin, fysikaalisesti kelvolliset ratkaisut kaikilla $\theta \in [0,\pi]$ edellyttävät, että $k = n(n+1)$, missä $n$ on positiivinen kokonaisluku. Ratkaisut ovat Legendren polynomeja $P_n(\cos\theta)$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}[\cos^2\theta - 1]^n \tag{2.77}$$

Muutama ensimmäinen $P_n$ on

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= \cos\theta \\
P_2 &= \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\
P_3 &= \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Radiaalisen yhtälön

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = n(n+1)Z \tag{2.78}$$

kaksi riippumatonta ratkaisua ovat muotoa $r^n$ ja $r^{-(n+1)}$. Täydellinen ratkaisu on näiden lineaariyhdistelmä

$$Z_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \tag{2.79}$$

ja koko Laplacen yhtälön ratkaisu kiertosymmetriassa on muotoa

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{2.80}$$

Integroimisvakiot $A_n$ ja $B_n$ on määritettävä reunaehdoista.

**Esimerkki. Johdepallo vakiosähkökentässä**

Tuodaan tasaiseen sähkökenttään $\mathbf{E}_0$ varaamaton $a$-säteinen johdepallo. Johde pakottaa alunperin suorat kenttäviivat taipumaan siten, että ne osuvat pintaan kohtisuoraan. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä ja $z$-akseli on sähkökentän suuntainen. Tällöin ongelma on kiertosymmetrinen. Johteen pinta on kaikkialla samassa potentiaalissa $\varphi(a, \theta) = \varphi_0$. Kaukana pallosta sähkökenttä lähestyy vakioarvoa

$$\mathbf{E}(r, \theta)_{r \to \infty} = E_0 \mathbf{e}_z \tag{2.81}$$

joten kaukana potentiaali lähestyy lauseketta

$$\varphi(r, \theta)_{r \to \infty} = -E_0 z + C = -E_0 r \cos\theta + C \tag{2.82}$$

Kirjoitetaan auki potentiaalin muutama ensimmäinen termi lausekkeesta 2.80:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos\theta + \frac{B_1}{r^2} \cos\theta + A_2 r^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 3\cos^2\theta - 1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{B_2}{r^3} \left[ \frac{1}{2} \left( 3\cos^2\theta - 1 \right) \right] + \ldots \end{aligned} \tag{2.83}$$

Kun $r \to \infty$, niin $\varphi = -E_0 r \cos\theta$, joten $A_n = 0$ kaikille $n \geq 2$ ja $A_1 = -E_0$. Koska pallon kokonaisvaraus on nolla, potentiaalissa ei ole $1/r$-riippuvuutta, eli $B_0 = 0$. Jäljellä olevat $\cos^n\theta$-termit ($n \geq 2$) ovat kaikki lineaarisesti riippumattomissa polynomeissa $P_n$, joten ne eivät voi kumota toisiaan pallon pinnalla, missä ei ole $\theta$-riippuvuutta, eli $B_n = 0$ kaikille $n \geq 2$. Jäljelle jää

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \tag{2.84}$$

$$\varphi(r, \theta) = C - E_0 r \cos\theta + \frac{B_1}{r^2} \cos\theta \tag{2.85}$$

Kun $r = a$, $\cos\theta$-termien on kumottava toisensa, joten $C = \varphi_0$ ja $B_1 = E_0 a^3$. Reunaehdot täyttävä Laplacen yhtälön ratkaisu on siis

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 + \left( \frac{a^3 E_0}{r^2} - E_0 r \right) \cos\theta \tag{2.86}$$

Sähkökentän $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ komponentit ovat

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0 \left( 1 + 2\frac{a^3}{r^3} \right) \cos\theta \tag{2.87}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin\theta \tag{2.88}$$

Pallon pintavaraustiheys on

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r = a) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{2.89}$$

Indusoituva pintavarausjakautuma on $\theta$:n funktio. Sen dipolimomentti on

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \int_{pallo} \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\, dV = \int_{r=a} (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)(3\epsilon_0 E_0 \cos\theta) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 6\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \int_0^\pi \mathbf{e}_z \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = 4\pi\epsilon_0\, a^3 E_0\, \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{2.90}$$

Pallon ulkopuolella sen osuus kentästä on sama kuin origoon sijoitetun dipolin, jonka dipolimomentti on $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0\, a^3 E_0\, \mathbf{e}_z$.

### 2.8.3 Sylinterikoordinaatisto

Tarkastellaan sitten sylinterisymmetristä tilannetta ja oletetaan lisäksi, ettei tilanne muutu sylinterin suunnassa. Nyt $\partial\varphi/\partial z = 0$ ja Laplacen yhtälö on

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{2.91}$$

**Huom.** Sylinterikoordinaatistossa $r$:llä ja $\theta$:lla on eri merkitys kuin pallokoordinaatistossa! Kirjallisuudessa käytetään usein radiaalietäisyydelle symbolia $\rho$ ja kiertokulmalle $\phi$.

Laplacen yhtälö separoituu yritteellä $\varphi = Y(r)S(\theta)$:

$$\frac{r}{Y}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) = -\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\theta^2} = n^2 \tag{2.92}$$

missä separointivakiolle $n^2$ tulee jälleen rajoituksia kulmayhtälöstä

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} + n^2 S = 0 \tag{2.93}$$

Tämän ratkaisut ovat $\sin(n\theta)$ ja $\cos(n\theta)$. Jos kulma $\theta$ saa kaikki arvot välillä $0 \le \theta \le 2\pi$, on oltava $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$. Tästä seuraa, että $n$ on kokonaisluku, joka voidaan rajoittaa positiiviseksi. Lisäksi tapauksessa $n = 0$ saadaan ratkaisu $S = A_0\theta + C_0$ (ehto $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ ei silloin toteudu, mutta pidetään tämäkin termi mukana täydellisyyden vuoksi). Radiaalisesta yhtälöstä tulee nyt

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) - n^2 Y = r^2\frac{d^2Y}{dr^2} + r\frac{dY}{dr} - n^2 Y = 0 \tag{2.94}$$

joka ratkeaa yritteellä $Y = r^s$. Saadaan $s = \pm n$, joten ratkaisufunktiot ovat muotoa $Y = r^n$ ja $Y = r^{-n}$. Tapaus $n = 0$ antaa lisäksi $Y = \ln(r/r_0)$. Kokonaisuudessaan ratkaisu on

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta) \\ &\quad + (A_0 \ln (r/r_0)) (C_0 \theta + D_0) \end{aligned} \tag{2.95}$$

Vakiot on jälleen selvitettävä tarkasteltavan tilanteen ominaisuuksista ja reunaehdoista.

**Huom.** Jos kulmariippuvuus on rajattu johonkin sektoriin, on pallo- ja sylinterikoordinaatistossa kulmayhtälöiden separointivakioiden arvot määritettävä tapauskohtaisesti. Esimerkiksi pallokalotin tapauksessa päädytään kalottiharmonisiin funktioihin, jotka ovat paljon konstikkaampia kuin palloharmoniset funktiot.

## 2.9 Kuvalähdemenetelmä

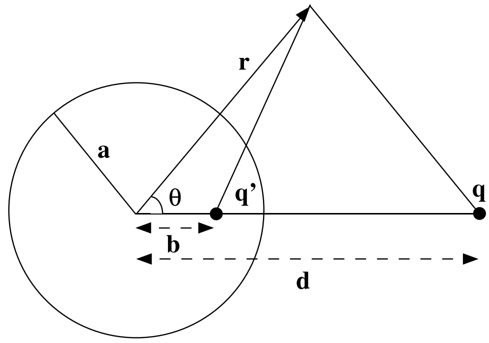
Laplacen yhtälön yksikäsitteisyys antaa ratkaisijalle vapauden käyttää mieleisiään kikkoja ratkaisun löytämiseen. Tietyissä geometrisesti yksinkertaisissa tapauksissa peilivarausmenetelmä on kätevä keino välttää differentiaaliyhtälön ratkaiseminen. Tarkastellaan tilannetta, jossa on joko annettu tai varausjakautumasta helposti laskettavissa oleva potentiaali $\varphi_1(\mathbf{r})$ ja johteita, joiden pintavarausjakautuma olkoon $\sigma(\mathbf{r})$. Kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\, dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.96}$$

Ratkaisuun johdesysteemin ulkopuolella ei vaikuta lainkaan, kuinka varaus on jakautunut johteen pinnan takana, kunhan pinnalla on voimassa samat reunaehdot. Voidaan siis ajatella, ettei kyseessä olekaan johdekappale vaan pinta, jonka takana on varausjakautuma, joka antaa samat reunaehdot kuin oikea johdekappaleen pintavaraus. Kuvamenetelmää voidaan käyttää myös ajasta riippuvissa tilanteissa sekä varausten että virtojen yhteydessä muidenkin aineiden kuin johteiden yhteydessä. Teknillisen korkeakoulun Sähkömagnetiikan laboratoriossa on kehitetty tätä menetelmää erittäin pitkälle.

### Esimerkki. Pistevaraus johdetason lähellä

Valitaan johdetasoksi $(y, z)$-taso ja asetetaan varaus $q$ $x$-akselille pisteeseen $x = d$. Taso oletetaan maadoitetuksi, jolloin sen potentiaali voidaan valita nollaksi. Toisaalta taso saadaan nollapotentiaaliin asettamalla varaus $-q$




Kuva 2.4: Pistevaraus johdepallon lähellä.

pisteeseen $(-d, 0, 0)$. Ratkaisujen yksikäsitteisyyden vuoksi näin saadaan oikea ratkaisu alueessa $x \geq 0$. Puoliavaruuteen $x < 0$ tätä menetelmää ei saa soveltaa, koska siellä ei ole oikeasti varausta. Kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|}\right) \tag{2.97}$$

missä $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$. Tästä saa suoraan sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r}+\mathbf{d}}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|^3}\right) \tag{2.98}$$

ja johteen pintavaraustiheyden

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{2.99}$$

Varaus vetää pintaa puoleensa samalla voimalla kuin se vetäisi etäisyydellä $2d$ olevaa vastakkaismerkkistä varausta. HT: integroi pintavaraustiheys koko tason yli.

Tässä esimerkissä siis pisteessä $(d, 0, 0)$ olevan pistevarauksen potentiaali toteuttaa Poissonin yhtälön alueessa $x > 0$. Tämä ei kuitenkaan riitä ratkaisuksi, koska reunaehto johdetasolla ei toteudu. Pisteessä $(-d, 0, 0)$ olevan kuvalähteen potentiaali puolestaan toteuttaa Laplacen yhtälön alueessa $x > 0$ ja sen lisäksi varmistaa reunaehdon toteutumisen. Yhteenlaskettu potentiaali on siis haettu ratkaisu alueessa $x > 0$.

**Esimerkki. Pistevaraus maadoitetun johdepallon lähellä**

Valitaan origoksi pallon keskipiste, olkoon $a$ pallon säde ja $d$ etäisyys origosta varaukseen $q$ (kuva 2.4). Etsitään potentiaali $\varphi(\mathbf{r})$ $(r \geq a)$ reunaehdolla $\varphi(a) = 0$. Symmetrian perusteella peilivarauksen $q'$ täytyy olla suoralla, joka kulkee varauksen $q$ ja origon kautta. Varauksen ja peilivarauksen yhteenlaskettu potentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}+\frac{q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{b}|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}}\right]\end{aligned} \tag{2.100}$$

Pallon pinnalla potentiaali on nolla kaikilla $\theta, \phi$. Sijoittamalla $r = a$ ja asettamalla $\theta = 0$ ja $\theta = \pi$ saadaan peilivarauksen paikka ja suuruus

$$b = \frac{a^2}{d},\ q' = -\frac{a}{d}q \tag{2.101}$$

ja ongelma on ratkaistu.

Mikäli palloa ei olisi maadoitettu, sen keskipisteeseen voitaisiin asettaa toinen peilivaraus $q''$, joka puolestaan sovitettaisiin antamaan pinnalla oikea reunaehto. Pallon kokonaisvaraus olisi tällöin $Q = q' + q''$.

## 2.10 Greenin funktiot[2]

Edellä tarkasteltiin tilanteita, joissa oli joko pelkästään johdekappaleita tai johdekappaleita ja yksittäisiä varauksia. Yleisessä tilanteessa voi olla annettu varausjakautuma $\rho$ sekä johdekappaleita, joiden pintavarausjakautuma on tuntematon. Tällöin on ratkaistava Poissonin yhtälö

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.102}$$

Tämä voidaan tehdä integroimalla varausjakautuman yli

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{2.103}$$

ja lisäämällä tähän Laplacen yhtälön sellainen ratkaisu $\varphi_2$, että yhteenlaskettu potentiaali toteuttaa reunaehdot johdekappaleiden pinnalla.

Aiemmat esimerkit ovat perustuneet hyvin yksinkertaiseen geometriaan. Yleisemmin voidaan osoittaa, että Laplacen ja Poissonin yhtälöt, jotka toteuttavat joko Dirichlet'n tai von Neumannin reunaehdot, voidaan ratkaista käyttäen Greenin teoreemaa ja Greenin funktioita.

Suoraviivainen HT on johtaa divergenssiteoreemasta Greenin ensimmäinen kaava (GI):

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\,dV = \oint_S \varphi\nabla\psi\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{2.104}$$

[2]Tämä luku kuuluu yleissivistykseen

ja Greenin toinen kaava (GII):

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\, dV = \oint_S (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot \mathbf{n}\, dS \tag{2.105}$$

joka tunnetaan myös nimellä Greenin teoreema. Kolmas Greenin kaava (GIII) saadaan soveltamalla GII:ta tapaukseen

$$\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

missä $\mathbf{r}$ on jokin kiinteä piste alueessa $V$. Muodollisesti voidaan kirjoittaa

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.106}$$

Sijoittamalla nämä GII:een (2.105) saadaan GIII

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla^2\varphi(\mathbf{r}') \\ &+ \frac{1}{4\pi}\oint_S dS' \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.107}$$

GIII:a ei voi käyttää suoraan, koska siinä esiintyvät sekä Dirichlet'n että von Neumannin reunaehdot. Oletetaan, että $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ on jokin alueessa $V$ määritelty harmoninen funktio eli funktio, joka toteuttaa Laplacen yhtälön $\nabla^2 F(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$, missä derivoidaan pilkuttoman koordinaatin suhteen. Nyt GII antaa tuloksen

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_V dV' F(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2\varphi(\mathbf{r}') \\ &+ \oint_S dS' \left(F(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial F(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\varphi(\mathbf{r}')\right) \end{aligned} \tag{2.108}$$

Muodostetaan sitten **Greenin funktio**

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2.109}$$

Summaamalla (2.107) ja (2.108) saadaan tulos

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V dV' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2\varphi(\mathbf{r}') \\ &+ \frac{1}{4\pi}\oint_S dS' \left(G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\varphi(\mathbf{r}')\right) \end{aligned} \tag{2.110}$$

Valitsemalla $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sopivasti saadaan tästä Poissonin yhtälön ratkaisu annetuilla reunaehdoilla. Greenin funktiolla on selvästi ominaisuus

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2.111}$$

Greenin funktioiden käyttö ei rajoitu Poissonin yhtälön ratkomiseen, vaan niillä on keskeinen osa ratkottaessa erilaisia integraaliyhtälöitä.

**Esimerkki. Pallon Greenin funktio**

Tarkastellaan esimerkkinä pallon Greenin funktiota Dirichlet'n reunehdolla, että potentiaali pallon pinnalla on tunnettu. Tällöin valitaan

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{2.112}$$

reunaehdolla

$$\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right]_{\mathbf{r}' \in S} = 0 \tag{2.113}$$

missä $S$ on pallon pinta. Jo aiemmin on ratkaistu identtinen ongelma yhdelle pistevaraukselle pallon ulkopuolella ehdolla, että potentiaali pinnalla on nolla yhtälössä (2.100). Siellä saatu ratkaisu on vakiota $q/4\pi\epsilon_0$ vaille yhtälön (2.113) ratkaisu, joten

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' \, |\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \tag{2.114}$$

missä $a$ on origokeskisen pallon säde. Havaitaan, että Greenin funktio on symmetrinen muuttujien $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$ suhteen. Tämä ominaisuus pätee yleisemminkin (ks. esim. *Jackson*).

Potentiaali saadaan integroimalla

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \, dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') \, dS' \tag{2.115}$$

missä on $V$ viittaa pallon sisäosaan ja $S$ pintaan. Normaalivektori $\mathbf{n}$ suuntautuu ulospäin siitä alueesta, jossa potentiaali halutaan laskea. Tarkasteltaessa aluetta pallon sisällä $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ja ulkopuolista aluetta tutkittaessa $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. Ulospäin suuntautuva normaaliderivaatta on

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}'}{a} \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}' \in S} &= -\frac{1}{a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\Big|_{\mathbf{r}' \in S} \\
&= \frac{r^2 - a^2}{a} (a^2 - 2\,ar\, \cos\gamma + r^2)^{-3/2} \qquad (2.116)
\end{aligned}$$

missä $\gamma$ on $\mathbf{r}$:n ja $\mathbf{r}'$:n välinen kulma.

Sovelletaan Greenin funktiota tapaukseen, jossa pallon sisällä ei ole varausta eli ratkaistaan Laplacen yhtälö reunaehdolla $\varphi(a) = f(\mathbf{r})$, kun $\mathbf{r}$ on pallon pinnalla. Tämä antaa Poissonin kaavana tunnetun tuloksen

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2\,ar\, \cos\gamma + r^2)^{3/2}} \, dS' \\
&= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2\,ar\, \cos\gamma + r^2)^{3/2}} \, d\Omega' \qquad (2.117)
\end{aligned}$$

joka ilmaisee siis potentiaalin alueen *sisällä* olettaen potentiaali tunnetuksi pallon pinnalla. Jos puolestaan halutaan tarkastella potentiaalia pallon ulkopuolella, pintaintegraalissa normaalin suunta määritellään ulospäin ja ainoa muutos on korvata $(a^2 - r^2) \to (r^2 - a^2)$.

# Luku 3

# Sähkökenttä väliaineessa

Edellä tarkasteltiin sähköstaattista kenttää tilanteissa, joissa oli annettuja varausjakautumia tai vapaita varauksia johdekappaleiden pinnalla. Läheskään kaikki aineet eivät kuitenkaan ole johteita. Hyvän johteen vastakohta on ideaalinen eriste, jossa ei ole lainkaan vapaita varauksia. Aine on kuitenkin koostunut positiivisista atomiytimistä ja negatiivisista elektroneista. Jos eriste asetetaan sähkökenttään, kenttä aiheuttaa voimavaikutuksen eristeen rakenneosasiin. Vaikutuksen suuruus riippuu aineen mikroskooppisista ominaisuuksista. Eristeeseen syntyvää makroskooppista vaikutusta kuvataan eristeen erimerkkisten varausten siirtymänä toistensa suhteen. Aineen sanotaan tällöin polarisoituneen. Sisäisen polarisoituman ja ulkoisen kentän vuorovaikutusketju on usein hyvin monimutkainen, sillä polarisoituma muuttaa puolestaan ulkoista kenttää. Mikäli eristeen lähellä on johdekappaleita, niiden pinnalle indusoituva varausjakautuma muuttuu, mikä puolestaan muuttaa eristeeseen vaikuttavaa ulkoista kenttää.

## 3.1 Sähköinen polarisoituma

Palautetaan ensin mieleen, että sähköstatiikka hallitaan yhtälöillä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3.2}$$

Erityisesti on huomattava, että $\rho$ sisältää *kaikki* varaukset eikä mitään jakoa "vapaisiin" ja "'muihin" varauksiin tarvitse tehdä. Periaatteessa polarisoituva aine voidaan siis käsitellä varausjakaumien avulla.

Tarkastellaan polarisoituneen aineen pientä tilavuusalkiota $\triangle V$, jonka dipolimomentti on $\triangle \mathbf{p}$. **Sähköinen polarisoituma** määritellään dipolimomenttitiheytenä

$$\mathbf{P} = \frac{\triangle \mathbf{p}}{\triangle V} \tag{3.3}$$

Tämä määritelmä edellyttää, että $\triangle V$ on makroskooppisessa mielessä pieni. Varsinaisesta raja-arvosta $\triangle V \to 0$ ei ole kysymys, koska tilavuusalkiossa täytyy olla monta molekyyliä, jotta polarisaatio ylipäänsä syntyisi. Makroskooppiselta kannalta polarisoitumaa voi kuitenkin tarkastella jatkuvana paikan funktiona. Polarisoituman SI-yksikkö on C/m$^2$, joten $[\mathbf{P}] = [\epsilon_0][\mathbf{E}]$. Cgs-yksiköissä tyhjön permittiivisyys on $1/4\pi$, joten niissä polarisoitumalla on sama yksikkö kuin sähkökentällä.

## 3.2 Polarisoituman aiheuttama sähkökenttä

Tarkastellaan pisteessä $\mathbf{r}'$ sijaitsevan pienen eristealkion $dV'$ dipolimomenttia $\mathbf{dp} = \mathbf{P}dV'$. Oletetaan, että korkeampien multipolien vaikutus voidaan jättää huomiotta. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että havaintopiste $\mathbf{r}$ on niin etäällä, että tämän alkion aiheuttama sähköinen potentiaali saadaan laskemalla pelkän dipolimomentin potentiaali

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{dp} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{3.4}$$

Kokonaispotentiaali pisteessä $\mathbf{r}$ on tämän integraali

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{3.5}$$

Mikäli polarisoituma tunnetaan, potentiaali voidaan laskea tästä suoraan. Käytännössä sama asia on hyödyllistä ilmaista hieman eri tavalla. Koska

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{3.6}$$

voidaan potentiaalin integrandi kirjoittaa

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \tag{3.7}$$

Käyttämällä kaavaa $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$ saadaan

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \tag{3.8}$$

Tämän avulla ja soveltamalla divergenssiteoreemaa potentiaali voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'\, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}'))\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \oint_{S_0} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')\, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \end{aligned} \tag{3.9}$$

missä $S_0$ on eristeen pinta.

Potentiaali voidaan siis laskea lausekkeista, jotka muistuttavat edellisessä luvussa olleita avaruus- ja pintavaraustiheyden integraaleja. Tämä on käytännön ongelmissa usein näppärin tapa laskea potentiaali. Suureita

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \tag{3.10}$$

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{3.11}$$

kutsutaan **polarisaatiovaraustiheyksiksi**. Niiden laatu on varaus/pinta-ala ($\sigma_P$) ja varaus/tilavuus ($\rho_P$) ja ne aiheuttavat eristeen ulkopuolella todellisen potentiaalin $\varphi$, josta saadaan sähkökenttä $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Kyse ei ole kuitenkaan oikeista vapaista varauksista, vaan tavasta kuvata eristeen ominaisuuksia varausjakautuman avulla. Tämän vuoksi polarisaatiovarauksia kutsutaan usein näennäisiksi varauksiksi, mikä ei kuitenkaan tee niille täyttä oikeutta. Eriste on kokonaisuudessaan neutraali, joten kokonaisvaraus

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla \cdot \mathbf{P})\, dV' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{3.12}$$

mikä seuraa suoraan divergenssiteoreemasta.

## 3.3 Sähkövuon tiheys

Edellä oletettiin eristeen polarisoituma $\mathbf{P}$ tunnetuksi. Todellisuudessa näin ei yleensä ole, vaan polarisoituma syntyy vasteena ulkoiseen sähkökenttään. Tarkastellaan eristettä, jonka sisällä on mahdollisesti ulkoisia (”vapaita”) varauksia. Sovelletaan Gaussin lakia eristeen sisällä olevalla pinnalla $S$, joka sulkee sisäänsä niin ulkoiset varaukset kuin polarisaatiovarauksenkin:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0}(Q + Q_P) \tag{3.13}$$

missä $Q = \sum_{i=1,\ldots,N} q_i$ on ulkoisten varausten summa ja

$$Q_P = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P})\, dV = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{3.14}$$

on polarisaatiovaraus. Tässä on implisiittisesti oletettu, että ulkoiset varaukset ovat pistemäisiä. Jos eristeen sisällä olisi makroskooppisia johdekappaleita, niiden pinnoilta tulisi osuus polarisaatiovaraukseen $Q_P$. Nämä pintatermit kuitenkin kumoutuisivat muutettaessa tilavuusintegraalit pintaintegraaleiksi.

Saadaan siis

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}\, dS = Q \tag{3.15}$$

eli vektorin

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.16}$$

vuo suljetun pinnan läpi on sama kuin pinnan sulkemaan tilavuuteen sijoitettu nettovaraus. Tätä vektoria kutsutaan **sähkövuon tiheydeksi** (electric displacement). Käyttämällä taas divergenssiteoreemaa ja toteamalla, että $Q = \int_V \rho \, dV$, saadaan Gaussin laki eristeessä differentiaalimuotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{3.17}$$

missä $\rho$ on nyt *ulkoisten* varausten tiheys ja kokonaisvaraustiheys on $\rho + \rho_P$.

**Huom.** Ulkoisia varauksia kutsutaan usein vapaiksi, mutta tämä saattaa aiheuttaa sekaannusta, sillä eristeessä oleva ulkoinen varaus ei ole vapaa samassa mielessä kuin johteen pinnalla oleva varaus.

Sähköstatiikan peruslait on nyt siis puettu muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{3.18}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3.19}$$

Etuna tässä on se, että ulkoinen varaus on helpommin hallittavissa kuin polarisaatiovaraus. Kuitenkin sähkökenttä $\mathbf{E}$ on suure, joka loppujen lopuksi halutaan määrittää. Siksi on vielä tunnettava **rakenneyhtälö** $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$.

## 3.4 Dielektrisyys ja suskeptiivisuus

Sähköinen polarisoituma aiheutuu sähkökentästä. Niiden riippuvuus voidaan usein ilmaista **sähköisen suskeptiivisuuden** $\chi(\mathbf{E})$ avulla:

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E} \tag{3.20}$$

$\chi(\mathbf{E})$ määräytyy väliaineen mikroskooppisesta rakenteesta. Yleisesti $\chi(\mathbf{E})$ on tensori, jolloin polarisoituma ei välttämättä ole samansuuntainen kuin sähkökenttä eli eriste voi olla epäisotrooppista. Tällaisia väliaineita ovat esimerkiksi kiderakenteet, joissa epäisotropia aiheuttaa kahtaistaittavuuden. Tällöin eri tavoin polarisoituneet sähkömagneettiset aallot taittuvat eri tavoin. Kahtaistaittavuutta tapahtuu myös vapaista varauksista koostuvassa magnetoituneessa plasmassa. Toinen ongelmakenttä ovat väliaineet, joissa $\chi(\mathbf{E})$ on sähkökentän funktio, jolloin $\mathbf{P}$ riippuu sähkökentästä epälineaarisesti. Tämä ilmiö esiintyy yleensä vain hyvin voimakkailla sähkökentillä. Kaikissa aineissa ei edes ole suoraa relaatiota $\mathbf{P}$:n ja $\mathbf{E}$:n välillä. Ferrosähköisissä aineissa on polarisoitumaa myös ilman ulkoista sähkökenttää.

Tarkastellaan nyt vain isotrooppisia eristeitä, joille $\chi(\mathbf{E})$ on skalaari ja rajoitutaan lineaarisiin väliaineisiin, joille $\chi$ on sähkökentästä riippumaton

Taulukko 3.1: Eristeiden ominaisuuksia. Tässä annettu ilman läpilyöntikestävyys $E_{max}$ koskee kuivaa ilmaa, muissa oloissa arvo on pienempi. Lasin suhteellinen permittiivisyys vaihtelee kemiallisesta koostumuksesta riippuen.

| aine | $\epsilon_r$ | $E_{max}$ [MV/m] |
|---|---:|---:|
| akryyli | 3,3 | 20 |
| eboniitti | 2,7 | 10 |
| kuiva ilma | 1,0006 | 4,7 |
| lasi | 5-10 | 15 |
| kova paperi | 5 | 15 |
| eristyspaperi | 5 | 30 |
| posliini | 5,5 | 35 |
| tislattu vesi | 81 | 30 |

suure. Tällöin vallitsevat rakenneyhtälöt

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E} \tag{3.21}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{3.22}$$

missä **permittiivisyys** $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ voi olla paikan funktio. Laadutonta suuretta

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \tag{3.23}$$

kutsutaan väliaineen eristevakioksi, dielektrisyysvakioksi tai **suhteelliseksi permittiivisyydeksi**.

Riittävän suuri kenttä repii elektroneja ulos molekyyleistä, jolloin aine alkaa johtaa sähköä. Tätä rajaa kutsutaan aineen dielektriseksi vahvuudeksi tai **läpilyöntikestävyydeksi**. Taulukossa 3.1 on joidenkin aineiden eristevakioita ja dielektrisiä vahvuuksia. Ilma on sähköisesti hyvä eriste. Veden eristevakio on taas suuri, mikä merkitsee vahvaa polarisoitumista ja siten kohtuullisen hyvää sähkönjohtokykyä polarisoitumisvarausten kantamana.

## 3.5 Sähkökenttä rajapinnalla

Eristeet ovat usein paljon hankalampia käsiteltäviä kuin johteet. Hyvän johteen ominaisuus on, että sen sisäinen sähkökenttä on nolla ja kaikki varaus kertyy pinnalle. Eristeet sen sijaan polarisoituvat ja erilaiset eristeet polarisoituvat eri tavoin. Eristeongelmissa joudutaan usein tarkastelemaan kenttien ominaisuuksia eri eristeiden tai eristeiden ja johteiden rajapinnoilla.

Tarkastellaan tilannetta kahden **yksinkertaisen** (lineaarinen, isotrooppinen, homogeeninen = LIH) eristeen rajapinnalla ja oletetaan rajapinta makroskooppisessa mielessä ohueksi. Tämä tarkastelu voidaan ulottaa myös epähomogeenisiin eristeisiin, jos eriste voidaan kuvata eri eristevakiolla varustettuina kerroksina. Merkitään väliaineita indekseillä 1 ja 2 ja olkoon $\sigma$ pintavaraustiheys rajapinnalla. Tarkastellaan pientä sylinterinmuotoista pillerirasiaa, jonka kannet ovat eri väliaineissa (kuva 3.1).

Sovelletaan Gaussin lakia

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \triangle S_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \triangle S_2 + \oint_{vaippa} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS = Q \tag{3.24}$$

Annetaan pillerirasian korkeuden lähestyä nollaa. Tällöin integraali vaipan yli on nolla ja pillerirasian sisällä oleva varaus on pintavaraus kerrottuna pinta-alalla: $Q = \sigma \triangle S$, missä $\triangle S = \triangle S_1 = \triangle S_2$. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, voidaan kirjoittaa **reunaehto** sähkövuon tiheyden normaalikomponentille:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \tag{3.25}$$

tai

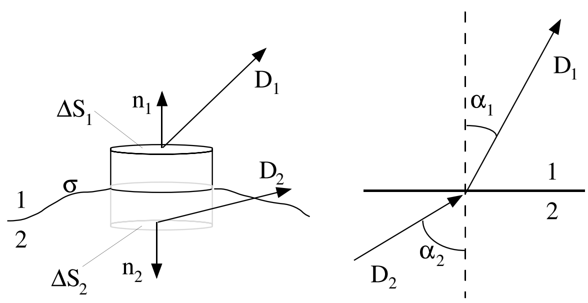
$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{3.26}$$

Mikäli kahden eristeen rajapinnalla ei ole ulkoista varausta, sähkövuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi. Koska eristeet polarisoituvat, on tarkasteltava nimenomaan sähkövuon tiheyttä eikä sähkökenttää.

Myös sähköstaattiselle kentälle löytyy reunaehto rajapinnalla. Koska $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, niin viivaintegraali

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{3.27}$$

pitkin mitä tahansa suljettua silmukkaa. Sovelletaan tätä suorakulmaiseen silmukkaan $ABCD$ eristeiden rajapinnalla. Olkoot rajapinnan suuntaiset




Kuva 3.1: Pillerirasia kahden väliaineen rajapinnalla ja sähkövuon tiheyden taittumiskulmien määritelmä.

sivut $AB$ ja $CD$ kumpikin eri väliaineessa ja pituudeltaan $\triangle l$. Väliaineesta toiseen kulkevat sivut $BC$ ja $DA$ oletetaan häviävän lyhyiksi. Tällöin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \triangle \mathbf{l} = 0 \tag{3.28}$$

joten

$$E_{2t} = E_{1t} \tag{3.29}$$

eli sähkökentän tangentiaalikomponentti on jatkuva rajapinnan yli. Tämä tulos on voimassa riippumatta mahdollisesta pintavarauksesta.

Tutkitaan sitten vektorin $\mathbf{D}$ taittumista rajapinnalla tapauksessa $\sigma = 0$. Olkoon $\alpha_1$ "rajapinnalle tulevan" vektorin $\mathbf{D}_1$ ja $\mathbf{n}_1$:n välinen kulma ja $\alpha_2$ "rajapinnalta lähtevän" vektorin $\mathbf{D}_2$ ja $\mathbf{n}_2$:n välinen kulma. Koska väliaineet on oletettu yksinkertaisiksi, niin

$$D_{1t} = \epsilon_1 E_{1t} \ ; \ D_{2t} = \epsilon_2 E_{2t} \tag{3.30}$$

Tällöin

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{D_{2t}}{D_{2n}} \frac{D_{1n}}{D_{1t}} = \frac{\epsilon_2 E_{2t}}{\epsilon_1 E_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \tag{3.31}$$

Sähkövuon tiheysvektori taittuu siis poispäin normaalin suunnasta mentäessä huonommasta parempaan eristeeseen. Tämä on sukua aaltojen taittumiselle eri väliaineiden rajapinnalla, johon tutustutaan luvussa 11.

Tarkastellaan sitten potentiaalin reunaehtoa rajapinnalla. Oletetaan jälleen $\sigma = 0$, jolloin $D_{2n} = D_{1n}$ ja $\epsilon_{r2}\epsilon_0 E_{2n} = \epsilon_{r1}\epsilon_0 E_{1n}$. Koska $E_n = -\partial\varphi/\partial n$, tulee reunaehdoksi

$$\epsilon_{r2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \epsilon_{r1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \tag{3.32}$$

Tämän lisäksi $\varphi$ on jatkuva reunan yli. Tämä nähdään tarkastelemalla kahta pistettä $r_1$ ja $r_2$ reunan molemmin puolin. Tällöin

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \ \rightarrow 0 \tag{3.33}$$

kun $r_1$ ja $r_2$ lähestyvät toisiaan eri puolilta rajapintaa sillä fysikaalisella oletuksella, että sähkökenttä on äärellinen rajapinnalla.

### 3.5.1 Eristepallo sähkökentässä

Yksinkertaisessa väliaineessa $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, joten $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$. Ainoa muodollinen ero edellisten lukujen käsittelyyn on korvata $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. Useissa käytännön ongelmissa eristeessä ei ole ulkoista varausta, joten $\nabla^2\varphi = 0$ koko eristeessä. Tarkastellaan $a$-säteistä eristepalloa homogeenisessa sähkökentässä $\mathbf{E}_0$. Ratkaisumenetelmä on samanlainen kuin johdepallon tapauksessa. Valitaan $z$-akseli alkuperäisen sähkökentän suuntaiseksi: $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$, jolloin kaukana pallosta $\varphi = -E_0 r \cos\theta$. Asetetaan origo pallon keskipisteeseen ja todetaan kiertosymmetria $z$-akselin suhteen: $\varphi = \varphi(r,\theta)$. $\epsilon_r$ on vakio eristeessä ja $\epsilon = \epsilon_0$ muualla. Ilman ulkoisia varauksia $\rho = 0$ kaikkialla ja Laplacen yhtälö on voimassa eristeessä ja sen ulkopuolella. Kirjoitetaan ratkaisu jälleen vyöhykeharmonisten funktioiden sarjana (2.80):

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos\theta) \tag{3.34}$$

Merkitään termejä pallon ulkopuolella ($r > a$) indeksillä 1 ja sisäpuolella ($r < a$) indeksillä 2. Etäällä pallosta ratkaisu lähenee alkuperäistä potentiaalia $-E_0 r \cos\theta$, joten pallon ulkopuolella

$$A_{1n} = 0, \text{ kun } n \geq 2 \ ; \ A_{11} = -E_0$$

jolloin

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) - E_0 r \cos\theta \tag{3.35}$$

Pallon sisällä potentiaalin on oltava äärellinen origossa, joten kaikki kertoimet $B_{2n}$ ovat nollia ja sisäratkaisu on muotoa

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos\theta) \tag{3.36}$$

Käytetään sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Potentiaalin on oltava jatkuva eli $\varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta)$, joten

$$\begin{aligned} & -E_0 a \cos\theta + \frac{B_{10}}{a} + \frac{B_{11}}{a^2}\cos\theta + \frac{B_{12}}{a^3} P_2(\cos\theta) + \ldots \\ = \ & A_{20} + A_{21} a \cos\theta + A_{22} a^2 P_2(\cos\theta) + \ldots \end{aligned} \tag{3.37}$$

Toisaalta potentiaalin derivaatan reunaehdosta

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(r,\theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = \epsilon_r \left. \frac{\partial \varphi_2(r,\theta)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

seuraa

$$\begin{aligned} & -E_0 \cos\theta - \frac{B_{10}}{a^2} - \frac{2\,B_{11}}{a^3}\cos\theta - \frac{3\,B_{12}}{a^4} P_2(\cos\theta) + \ldots \\ = \ & \epsilon_r A_{21} \cos\theta + 2\epsilon_r A_{22} a P_2(\cos\theta) + \ldots \end{aligned} \tag{3.38}$$

Koska Legendren polynomit muodostavat ortonormaalin kannan, kunkin $P_n$-termin täytyy toteuttaa yhtälöt erikseen. Nyt molemmat yhtälöt (3.37) ja (3.38) toteutuvat vain, jos $A_{2n} = 0$ ja $B_{1n} = 0$ kaikilla $n \geq 2$. Yhtälön (3.38) ainoa $\cos\theta$:sta riippumaton termi on $B_{10} = 0$, joka sijoitettuna yhtälöön (3.37) antaa $A_{20} = 0$ ja jäljelle jää yhtälöpari

$$-E_0 a + \frac{B_{11}}{a^2} = A_{21} a \tag{3.39}$$

$$-E_0 - \frac{2\,B_{11}}{a^3} = \epsilon_r A_{21} \tag{3.40}$$

joiden ratkaisuna saadaan

$$A_{21} = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} \; ; \; B_{11} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \tag{3.41}$$

Kaiken kaikkiaan ratkaisu pallon ulkopuolella on

$$\varphi_1(r,\theta) = -\left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\frac{a^3}{r^3}\right) E_0 r\cos\theta \tag{3.42}$$

ja pallon sisällä

$$\varphi_2(r,\theta) = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 r\cos\theta = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 z \tag{3.43}$$

Pallon sisällä on siis vakiokenttä $\mathbf{E}_2 = 3\mathbf{E}_0/(\epsilon_r + 2)$, mikä on erona johdepalloon, jossa pintavaraukset kumoavat sisäkentän. Koska $\epsilon_r \geq 1$, niin kenttä eristeen sisällä on pienempi kuin ulkopuolella. Eristepallon aiheuttama häiriö pallon ulkopuolella on dipolikenttä.

Sähkövuon tiheydellä ei ole lähteitä, vaan kaikki kenttäviivat jatkuvat pallon läpi. Sitävastoin polarisoitumisesta johtuva pintavarauskate aiheuttaa sen, että sähkökentällä on lähteitä ja nieluja pallon pinnalla ja osalla kenttäviivoista pää on pallon pinnalla. Siksi kenttäviivat eivät myöskään ole kohtisuorassa pallon pintaa vastaan (HT: piirrä kuva). Tämä osoittaa, että polarisaatiovarauksen kutsuminen näennäiseksi on kyseenalaista.

### 3.5.2 Pistevaraus eristepinnan lähellä

Jakakoon $xy$-taso avaruuden kahteen homogeeniseen eristealueeseen: $(z > 0, \epsilon_1)$ ja $(z < 0, \epsilon_2)$. Asetetaan varaus $q$ pisteeseen $(0, 0, d)$ alueeseen 1. Oletetaan, ettei rajapinnalla ole ulkoisia varauksia. Tehtävänä on laskea potentiaali koko avaruudessa. Helpoimmalla päästään kuvalähteiden avulla. Maadoitetun johdetason tapauksessa ongelma ratkesi peilikuvavarauksella $-q$ pisteessä $(0, 0, -d)$. Eristeenkin tapauksessa potentiaali alueessa 1 yritetään esittää varauksen $q$ ja jonkin *alueessa 2* sijaitsevan kuvavarauksen $q'$ avulla. Sivistynyt arvaus on sijoittaa kuvavaraus pisteeseen $z = -d$, jolloin potentiaali *alueessa 1* on sylinterikoordinaateissa lausuttuna Poissonin yhtälön toteuttava

$$\varphi_1(r,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}}\right) \tag{3.44}$$

Kiertosymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, mutta tehtävä ratkeaisi sujuvasti myös karteesisessa koordinaatistossa.

Alue 2 on eriste, joten johdetilanteesta poiketen sielläkin on kenttä. Koska alueessa 2 ei ole varauksia, potentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön. Ainakin laskennallisesti kelvollinen ratkaisu alueessa 2 saadaan *alueessa 1* sijaitsevan kuvavarauksen $q''$ avulla, joka viisaasti sijoitetaan pisteeseen $z = d$. Tällöin potentiaali *alueessa 2* on

$$\varphi_2(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \tag{3.45}$$

Mikäli kuvavarausten suuruudet saadaan sovitettua siten, että reunaehdot toteutuvat, niin ongelma on ratkaistu. Reunaehtojen mukaan sähkövuon tiheyden $z$-komponentti on jatkuva rajapinnalla (ei pintavarausta) samoin kuin sähkökentän $r$-komponentti. Jälkimmäinen on yhtäpitävää sen kanssa, että potentiaali on jatkuva. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2} q'' \end{aligned} \tag{3.46}$$

Kuvavaraukset ovat siten

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\, q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\, q \end{aligned} \tag{3.47}$$

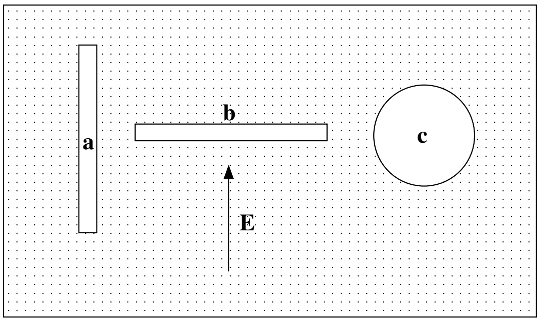
HT: Laske polarisoitumaan liittyvä varaustiheys aineiden rajapinnalla. Jos väliaine 2 on johde, niin ratkaisu saadaan muodollisesti asettamalla $\epsilon_2$ äärettömäksi, jolloin potentiaali alueessa 2 häviää ja $q' = -q$.

Viimeistään reunaehtoja sovellettaessa tuli selväksi, että kuvalähteet kannatti sijoittaa nimenomaan pisteisiin $z = -d$ ja $z = d$. Paikkariippuvuudet supistuvat silloin pois reunaehtoyhtälöistä. Kuvalähteet ovat vain kuvitteellisia apuvälineitä, jotka eivät oikeasti sijaitse missään. Kun ratkaisu on löydetty, kuvalähteet voidaan unohtaa ja todeta saaduista lausekkeista, että kaikki vaadittavat yhtälöt reunaehtoineen toteutuvat.

## 3.6 Molekulaarinen polarisoituvuus

Tarkastellaan yksinkertaista väliainetta, jossa yksittäisen molekyylin dipolimomentti $\mathbf{p}_m$ on verrannollinen polarisoivaan sähkökenttään $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{p}_m = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}_m \tag{3.48}$$




Kuva 3.2: Sähkökentän määrittäminen erilaisissa onkaloissa.

Suuretta $\alpha$ kutsutaan polarisoituvuudeksi (yksikkö $m^3$). Oletetaan, ettei molekyylillä ole pysyvää dipolimomenttia. Tavoitteena on lausua molekyylin polarisoituvuus makroskooppisesti mitattavien suureiden avulla. Polarisoiva sähkökenttä on kenttä, jonka aiheuttavat kaikki ulkoiset lähteet ja väliaineen polarisoituneet molekyylit lukuunottamatta tarkasteltavaa molekyyliä itseään. Poistetaan makroskooppisesti pieni, mutta mikroskooppisesti suuri palanen ainetta molekyylin ympäriltä ja lasketaan kenttä jäljelle jäävässä onkalossa. Kenttä molekyylin kohdalla on silloin

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{near} \tag{3.49}$$

Tässä $\mathbf{E}$ on keskimääräinen kenttä koko kappaleessa, $\mathbf{E}_p$ onkalon pinnan polarisaatiovarauksen aiheuttama kenttä ja $\mathbf{E}_{near}$ on onkalossa olevien kaikkien muiden molekyylien aiheuttama kenttä. Aivan tarkasteltavan molekyylin kohdalla on siis otettava huomioon aineen yksityiskohtainen rakenne.

Kenttä $\mathbf{E}_{near}$ on nolla esimerkiksi säännöllisen kuutiohilan hilapisteissä, jos molekyylien dipolimomenttivektorit ovat identtisiä (HT). Samoin voidaan olettaa $\mathbf{E}_{near}$ nollaksi nesteissä ja kaasuissa, joissa molekyylit ovat täysin satunnaisesti jakautuneita. Useista molekyylityypeistä koostuvissa aineissa se voi kuitenkin poiketa nollasta. Jatkossa oletetaan, että $\mathbf{E}_{near} = 0$.

Kenttä $\mathbf{E}_p$ riippuu onkalon muodosta (kuva 3.2). Jos se on kapean suorakaiteen muotoinen ja pitkä sivu on kentän $\mathbf{E}$ suuntainen (a), niin kenttä on onkalossa sama kuin väliaineessa kentän tangentiaalikomponentin jatkuvuuden perusteella. Jos suorakaidetta käännetään 90 astetta (b), niin onkalossa $\mathbf{E}_b = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0$ sähkövuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuuden vuoksi (pinnoilla on polarisaatiovarausta, mutta ei vapaata varausta).

Luonnolliselta tuntuva vaihtoehto on olettaa onkalo palloksi (c). Kenttä onkalossa saadaan vähentämällä tasaisesti polarisoituneen pallon kenttä kentästä $\mathbf{E}$. Voidaan käyttää hyväksi analogiaa tilanteeseen, jossa tasaisesti polarisoituneen pallon sisällä on vakiokenttä $-\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$ (HT), ja onkalossa

$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)$. Tämä on jonkinlainen välimuoto suorakaiteen muotoisten onkaloiden kentistä.

Jos molekyylien lukumäärätiheys on $n$, polarisoituma on määritelmän mukaan $\mathbf{P} = n\mathbf{p}_m$, joten

$$\mathbf{P} = n\alpha\epsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)) \tag{3.50}$$

Toisaalta $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$, joten saadaan Clausiuksen ja Mossottin yhtälö

$$\alpha = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{n(\epsilon_r + 2)} \tag{3.51}$$

jossa $\epsilon_r$ ja $n$ ovat makroskooppisia suureita. Voidaan esimerkiksi mitata kaasun $\epsilon_r$ ja $n$, jolloin saadaan $\alpha$ laskettua. Jos polarisoitumismekanismi on samanlainen myös nesteessä, voidaan tunnettujen tiheyksien avulla ennustaa sen suhteellinen permittiivisyys. Näin saadaan varsin hyviä tuloksia esimerkiksi aineille $CS_2, O_2$ ja $CCl_4$. Vedelle tulisi vastaavalla tavalla ennusteeksi negatiivinen permittiivisyys, joten pysyvästi polarisoituneelle aineelle esitetty malli ei päde.

Pysyvän polarisaation $\mathbf{P}_0$ tapauksessa ulkoisen kentän ollessa nolla $\mathbf{E}_m = \mathbf{P}_0/(3\epsilon_0)$, joten on oltava $n\alpha = 3$. Useimmilla aineilla $n\alpha/3 < 1$, joten ne käyttäytyvät kuten tavalliset eristeet. Jotkin kristallirakenteiset kiinteät aineet kuitenkin toteuttavat ehdon ja niitä kutsutaan ferroelektrisiksi materiaaleiksi. Esimerkiksi $BaTiO_3$ on ferroelektristä alle 120° C:n lämpötilassa (Feynman Lectures, osa II, luku 11-7).

Pysyvästi polarisoitunut kappale (elektretti) on kestomagneetin sähköinen vastine. Se eroaa kuitenkin magneetista ratkaisevasti, koska elektretin pinnalle "sataa" vähitellen väliaineesta varauksia, jotka neutralisoivat polarisaatiopintavarauksen. Ferroelektrisyydelle ominainen pysyvä polarisoituvuus aiheuttaa **hystereesi-ilmiön**. Kun aine on kerran polarisoitu tasolle $P$, niin polarisaatio ei katoa vietäessä sähkökenttä nollaan, vaan vasta selvästi nollan alapuolella. Kasvatettaessa negatiivista sähkökenttää polarisaatio saavuttaa uudelleen uuden tason $-P$, josta ei puolestaan päästä eroon kasvattamalla sähkökenttä nollaan, vaan kenttää on kasvatettava riittävän paljon nollan yläpuolelle. Polarisaation ja sähkökentän välinen yhteys ei ole yksikäsitteinen. Vastaavaan ilmiöön tutustutaan myöhemmin ferromagnetismin yhteydessä.

# Luku 4

# Sähköstaattinen energia

Voiman, työn ja energian käsitteet ovat keskeisiä fysiikassa. Sähkö- ja magneettikenttiä mitataan voimavaikutuksen kautta. Kun voima vaikuttaa varaukselliseen hiukkaseen, se tekee työtä ja hiukkasen energia muuttuu. Kuten mekaniikassa, myös elektrodynamiikassa energia voidaan jakaa liike- ja potentiaalienergiaan. Sähköstaattinen energia on potentiaalienergiaa. Kun varaus $q$ siirtyy pisteestä $A$ pisteeseen $B$ sähköstaattisessa kentässä, kenttä tekee työn

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A) \tag{4.1}$$

Työn ja energian SI-yksikkö on joule (J), joka on sama kuin wattisekunti (Ws). Työ on myös varaus kertaa sähköinen potentiaali, jonka yksikkö on CV tai elektronivoltti (eV). Koska elektronin varaus on $1,6022 \cdot 10^{-19}$ C, on 1 eV $= 1,6022 \cdot 10^{-19}$ J.

## 4.1 Varausjoukon potentiaalienergia

Varausjoukon sähköstaattisella energialla tarkoitetaan systeemin potentiaalienergiaa verrattuna tilanteeseen, jossa kaikki varaukset ovat äärettömän kaukana toisistaan. Energia saadaan laskemalla yhteen työ, kun kukin varaus tuodaan yksitellen paikalleen varausjoukkoon. Koska alunperin tarkasteltavassa systeemissä ei ole varauksia, ensimmäinen varaus $q_1$ saadaan pisteeseen $\mathbf{r}_1$ ilman työtä, $W_1 = 0$. Toisen varauksen $q_2$ tuominen merkitsee työntekoa voimaa $\mathbf{F} = q_1\mathbf{r}_1/4\pi\epsilon_0|r_1|^3$ vastaan, joten varauksen sijoittamiseksi pisteeseen $\mathbf{r}_2$ on tehtävä työtä

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} \tag{4.2}$$

Kolmannelle varaukselle

$$W_3 = q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right)$$

ja niin edelleen kaikille $N$ kappaleelle varauksia. Koko systeemin sähköstaattinen energia $U$ on

$$U = \sum_{j=1}^{N} W_j = \sum_{j=1}^{N} \left( \sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \tag{4.3}$$

Summaus voidaan järjestää uudelleen muotoon

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left( {\sum_{k=1}^{N}}' \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \tag{4.4}$$

missä $\sum'$ merkitsee, että termit $j = k$ jätetään pois. Energia voidaan siis ilmaista varaukseen $j$ vaikuttavien kaikkien muiden varausten potentiaalin

$$\varphi_j = {\sum_{k=1}^{N}}' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \tag{4.5}$$

avulla:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} q_j \varphi_j \tag{4.6}$$

## 4.2 Varausjakautuman sähköstaattinen energia

Tarkastellaan seuraavassa jatkuvia varausjakautumia. Osa varauksista voi olla johteiden pinnalla ja lisäksi systeemissä saa olla eristeitä, mutta ne on oletettava lineaarisiksi. Syy tähän on, että epälineaarisilla eristeillä varaussysteemin kokoaminen riippuu tiestä, jota pitkin varaukset tuodaan äärettömyydestä tarkastelualueeseen.

Suoraviivaisimmin energian lausekkeen saa yleistämällä diskreettien varausjakautumien tulokset jatkuville jakautumille eli muuttamalla summa integraaliksi:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dV \tag{4.7}$$

Tässä ei ole kirjoitettu erikseen näkyviin mahdollisia pintavarauksia tai diskreettejä pistevarauksia. Johdekappaleet on käytännöllistä käsitellä erikseen, sillä niiden varaukset $Q_j$ ovat kokonaan pinnoilla $S_j$ ja kunkin johteen potentiaali $\varphi_j$ on vakio:

$$U = \frac{1}{2} \int_{S_j} \sigma \varphi \, dS = \frac{1}{2} Q_j \varphi_j \tag{4.8}$$

Varausjakautuman sähköstaattinen energia on kaiken kaikkiaan

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j \tag{4.9}$$

missä jälkimmäisessä termissä summataan yli kaikkien johdekappaleiden.

Koska johdekappaleen pinnalla on suuri määrä varauksia, ei johdekappaleita summattaessa kappaleen omaa osuutta (itseisenergiaa) voida jättää huomiotta, kuten tehtiin yksittäisten varausten tapauksessa edellisessä luvussa. Pistevarausten itseisenergia voidaan jättää huomiotta makroskooppisissa tarkasteluissa, mutta aikoinaan muotoiltaessa kvanttitason elektrodynamiikkaa tästä aiheutui ongelmia.

## 4.3 Sähköstaattisen kentän energia

Edelläoleva tarkastelu edellyttää potentiaalin tuntemista koko systeemissä. Usein tunnetaan kuitenkin sähkökenttä ja halutaan määrittää sen avulla sähköstaattinen energia. Eristeissä $\rho = \nabla\cdot\mathbf{D}$ ja johteiden pinnalla $\sigma = \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}$, jolloin

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varphi\nabla\cdot\mathbf{D}\, dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{4.10}$$

Tilavuusintegraali lasketaan alueessa, jossa $\nabla\cdot\mathbf{D} \neq 0$ ja pintaintegraali on johteiden pintojen yli. Muotoillaan tilavuusintegraalin integrandia kirjoittamalla $\varphi\nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\varphi\mathbf{D}) - \mathbf{D}\cdot\nabla\varphi$. Tässä oikean puolen jälkimmäinen termi on $+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$ ja ensimmäisen termin tilavuusintegraali voidaan muuttaa Gaussin lauseen avulla pintaintegraaliksi, jolloin saadaan

$$U = \frac{1}{2}\int_{S+S'} \varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{4.11}$$

Tässä pinta $S + S'$ on koko tilavuutta $V$ rajoittava pinta, joka muodostuu johteiden pinnoista $S$ ja tilavuuden $V$ ulkopinnasta $S'$. Molemmissa tapauksissa $\mathbf{n}'$ osoittaa ulospäin tilavuudesta $V$. Viimeisen integraalin $\mathbf{n}$ puolestaan osoittaa johdekappaleista ulospäin eli tilavuuden $V$ sisään. Integraalit johdekappaleiden yli kumoavat siis toisensa.

Pinnan $S'$ yli laskettava integraali häviää, kun pinta viedään kauas varausjakautumasta. Kaukana $\varphi \propto 1/r$ ja $D(\mathbf{r}) \propto 1/r^2$ ja pinta-alkiolle puolestaan pätee $dS \propto r^2$. Tällöin $|\varphi\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}' dS| \propto 1/r$ eli integraali katoaa. (**Huom.** Tämä pätee vain staattisille kentille. Myöhemmin tutustutaan säteilykenttiin, jotka kuljettavat energiaa mukanaan äärettömyyksiin.)

Energian lauseke on siis

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dV \tag{4.12}$$

Tässä $V$ on koko avaruus sisältäen myös johdekappaleet, joiden sisällä $\mathbf{E} = 0$. Lausekkeen integrandi on **sähköstaattinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \tag{4.13}$$

Koska on oletettu lineaarinen väliaine, tämä voidaan kirjoittaa myös

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon} \tag{4.14}$$

**Huom.** Sovellettaessa tätä formalismia systeemiin, jossa on pistevarauksia, niiden ääretön itseisenergia on vähennettävä eksplisiittisesti.

HT: Laske homogeenisen varauspallon sähköstaattinen energia kolmella eri tavalla: kokoamistyöllä, energiatiheyttä integroimalla, potentiaalin ja varaustiheyden tuloa integroimalla.

HT (vaikea): Kuuluuko sähköstaattinen energia hiukkasille vai kentälle?

Toinen tapa johtaa tulos (4.13) on esitetty yksityiskohdittain CL:n luvussa 5.2. Lähdetään liikkeelle varausjakautumasta $\rho(\mathbf{r})$ ja tehdään siihen pieni häiriö $\delta\rho$. Häiriöön liittyy työ

$$\delta U = \int_V \delta\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, dV \tag{4.15}$$

ja siirtymäkenttä $\delta\mathbf{D}$, jolle $\nabla \cdot (\delta\mathbf{D}) = \delta\rho$, joten osittaisintegroimalla lauseketta (4.15) saadaan

$$\delta U = \int_V (\nabla \cdot \delta\mathbf{D})\varphi\, dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}\, dV \tag{4.16}$$

Nyt voidaan kirjoittaa muodollisesti

$$U = \int_V dV \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} \tag{4.17}$$

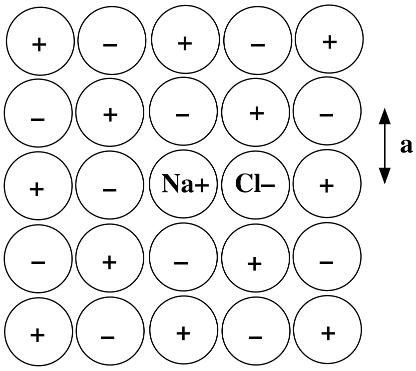
missä integrointi $\mathbf{D}$:n suhteen riippuu integroimistiestä. Yksinkertaiselle väliaineelle

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \tag{4.18}$$

joten

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dV \tag{4.19}$$

Tässä on oletettu, että tarkasteltava systeemi on mekaanisesti jäykkä, joten yksinkertaisellekin väliaineelle energiatiheyden lauseke (4.13) on vain approksimaatio. Epälineaarisille väliaineille energia on laskettava suoraan lausekkeesta (4.17). Tämä liittyy jälleen hystereesi-ilmiöön.




Kuva 4.1: $NaCl$-kiteen poikkileikkaus.

**Esimerkki. Ionikiteen sähköstaattinen energia**

Tarkastellaan tavallista ruokasuolaa ($NaCl$, kuva 4.1). Kokeellisesti tiedetään, että suolan hajottaminen $Na^+$ ja $Cl^-$-ioneiksi vaatii energiaa 7,92 eV molekyyliä kohti. Lasketaan, onko tämä sama kuin yhden molekyylin sähköstaattinen potentiaalienergia kaikkien muiden kiteen ionien kentässä.

Yhden $Na^+$-ionin potentiaalienergia on

$$U_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{4.20}$$

missä $q_i$ on $\pm e$ ($e$ = alkeisvaraus) ja $r_i$ on kunkin ionin etäisyys origoon sijoitetusta $Na^+$-ionista. $N$ voidaan turvallisesti olettaa äärettömäksi makroskooppisille kiteille. Koska halutaan yhden molekyylin potentiaalienergia $U$, on laskettava summa $U = 2U_1$:

$$U = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{eq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{4.21}$$

Röntgendiffraktiokokeista tiedetään, että ionit ovat kuutiohilassa, jossa kuution sivun pituus $a$ on noin $2,82 \cdot 10^{-10}$ m. Koska $e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx 5,1$ eV, niin suuruusluokan puolesta ollaan oikeilla jäljillä. Energian lauseke voidaan kirjoittaa summana

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\sum_{m,n,p=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{4.22}$$

missä ei pidä ottaa mukaan termiä $m = n = p = 0$. Numeerisesti saadaan $U \approx -1,747e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \approx -8,91eV$. Tämä on hieman liian suuri arvo, koska edellä ei otettu huomioon hyvin lähellä toisiaan olevien ionien välillä vallitsevaa poistovoimaa. Sen vaikutus pienentää molekyylin hajottamiseen tarvittavaa energiaa. Lisäksi pieni korjaus tulisi ottamalla huomioon kidevärähtelyistä johtuva liike-energia.

**Esimerkki. Eristekappaleen energia**

Oletetaa että muuten tyhjässä avaruudessa on varausjakauman $\rho_0(\mathbf{r})$ aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}_0$. Tuodaan avaruuteen yksinkertaisesta aineesta muodostuva eristekappale $V_1$ (permittiivisyys $\epsilon_1$) siten, että alkuperäisen kentän $\mathbf{E}_0$ aiheuttava varausjakauma ei muutu. Ennen eristekappaleen tuontia sähköstaattinen energia on

$$U_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 \, dV \tag{4.23}$$

missä $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Kappaleen tuonnin jälkeen energia on

$$U_1 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV \tag{4.24}$$

Energioiden erotus $U = U_1 - U_0$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) \, dV + \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) \, dV \tag{4.25}$$

Jälkimmäisessä integraalissa voidaan kirjoittaa $\mathbf{E} + \mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi$. Integrandiksi tulee osittaisintegroinnin jälkeen lauseke $\varphi\nabla\cdot(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)$. Tämä on nolla, koska alkuperäinen varausjakauma $\rho_0$ oletetaan muuttumattomaksi. Energian muutos on siis

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) \, dV \tag{4.26}$$

Huomataan vielä, että integroimisalue on ainoastaan $V_1$, sillä sen ulkopuolella $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Integrandiksi tulee siis $-\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$ polarisoituman määritelmän perusteella. Ulkoiseen kenttään $\mathbf{E}_0$ tuodun eristekappaleen energiatiheys on siten $u = -\frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$. Tuloksen avulla voidaan päätellä, mihin suuntaan kappale pyrkii liikkumaan (HT).

## 4.4 Sähkökentän voimavaikutukset

Sähkökenttä määriteltiin alunperin operatiivisesti voimavaikutuksen kautta. Johdetaan nyt sähköstaattisesta energiasta voimavaikutus. Oletetaan eristetyn systeemin kaikki energia sähköstaattiseksi energiaksi. Voiman $\mathbf{F}$ tekemä työ systeemin pienessä siirroksessa $d\mathbf{r}$ on

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4.27}$$

Koska systeemi on eristetty, tämä työ on tehtävä sähköstaattisen energian $U$ kustannuksella:

$$dW = -dU \tag{4.28}$$

Näistä seuraa, että voima on energian gradientin vastaluku:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \tag{4.29}$$

Jos voima puolestaan kiertää systeemiä kulman $d\boldsymbol{\theta}$ verran (vrt. väkipyörä), tehty työ on

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \tag{4.30}$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on vääntömomentti, joka saadaan siis energian negatiivisena gradienttina kiertymäkulman suhteen:

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}\Big|_Q \tag{4.31}$$

Koska systeemi on eristetty, gradientit lasketaan olettaen varaus $Q$ vakioksi.

Käytännössä sähköstaattiset systeemit eivät useinkaan ole eristettyjä, vaan muodostuvat esimerkiksi johdekappaleista, jotka pidetään kiinteässä potentiaalissa ulkoisen energialähteen (pariston) avulla. Siirtyköön osa systeemistä jälleen sähköisten voimien vaikutuksesta. Nyt

$$dW = dW_b - dU \tag{4.32}$$

missä $dW_b$ on paristosta peräisin oleva työ. Johdekappaleiden energia on $U = (1/2)\sum \varphi_j Q_j$. Koska ulkoinen paristo pitää johdekappaleet samassa potentiaalissa, saadaan

$$dU = \frac{1}{2}\sum_j \varphi_j dQ_j \tag{4.33}$$

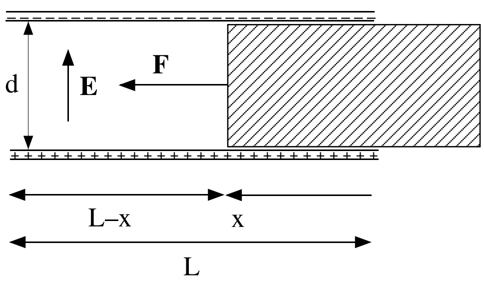
Toisaalta paristosta saatava työ on yhtä suuri kuin työ, joka tarvitaan siirtämään varauksen muutos $dQ_j$ nollapotentiaalista johdekappaleen potentiaaliin:

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j = 2dU \tag{4.34}$$

eli voima on

$$\mathbf{F} = (\nabla U)_\varphi \tag{4.35}$$

Alaindeksi $\varphi$ viittaa siihen, että ulkoinen energialähde pitää johdekappaleiden potentiaalit vakioina siirroksen $d\mathbf{r}$ ajan.




Kuva 4.2: Eristepalkki levykondensaattorin sisällä.

**Esimerkki. Levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin vaikuttava voima**

Olkoon kondensaattorin levyjen sisällä koko kondensaattorin täyttävä eristepalkki, jonka permittiivisyys on $\epsilon$ (kuva 4.2). Kondensaattorin levyjen etäisyys on $d$, niiden pituus $L$ ja leveys $w$. Ulkoinen virtalähde pitää kondensaattorin jännitteen vakiona $\triangle\varphi$. Lasketaan, kuinka suuri voima vetää palkkia kondensaattoriin.

Kondensaattorissa on sekä ilmassa että eristeessä sama sähkökenttä $E = \triangle\varphi/d$, joten sen energiasisältö on

$$U = \frac{1}{2}\int_V \epsilon E^2 \, dV \tag{4.36}$$

jättämällä kondensaattorin reunavaikutukset huomiotta. Systeemin energia kuvan tilanteessa on

$$U(x) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\triangle\varphi}{d}\right)^2 wxd + \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\triangle\varphi}{d}\right)^2 w(L-x)d \tag{4.37}$$

Voima

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2}\, w\, \frac{(\triangle\varphi)^2}{d} = \frac{\epsilon_r - 1}{2}\, \epsilon_0 E^2 wd \tag{4.38}$$

osoittaa kasvavan $x$:n suuntaan vastustaen ulosvetämistä. HT: miten tämän voi selittää eristepalkkiin indusoituvien varausten avulla?

## 4.5 Maxwellin jännitystensori sähköstatiikassa

Tutustutaan lopuksi tyylikkääseen tapaan laskea voimavaikutukset jännitystensorin avulla. Oletetaan, että muuten tyhjässä avaruudessa on staattinen sähkökenttä $\mathbf{E}$ ja äärellisessä alueessa $V$ varausjakautuma $\rho$. Alueeseen $V$ vaikuttava kokonaisvoima on Coulombin lain mukaan

$$\mathbf{F} = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{r}) dV \tag{4.39}$$

missä $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}$ on voimatiheys eli voima tilavuusalkiota kohti. Jälleen kerran pyritään muuttamaan tilavuusintegraali pintaintegraaliksi.

Todetaan ensin, että

$$f_x = \epsilon_0(\frac{1}{2}\partial_x(E_x^2) + \partial_y(E_yE_x) + \partial_z(E_zE_x) - E_y\partial_yE_x - E_z\partial_zE_x) \quad (4.40)$$

Koska sähköstaattinen kenttä on pyörteetön eli $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, niin

$$\partial_xE_y = \partial_yE_x, \partial_yE_z = \partial_zE_y, \partial_zE_x = \partial_xE_z \quad (4.41)$$

Saadaan

$$f_x = \epsilon_0(\partial_x(E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2) + \partial_y(E_yE_x) + \partial_z(E_zE_x)) \quad (4.42)$$

ja vastaava tulos muille komponenteille (HT).

Vektorilaskennasta tunnetaan divergenssiteoreeman sukuinen tulos

$$\int_V \nabla\psi \; dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \; \psi \; dS \quad (4.43)$$

Tämän avulla saadaan kokonaisvoiman $x$-komponentiksi

$$F_x = \int_V f_x(\mathbf{r})dV = \epsilon_0 \int_S (n_x(E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2) + n_yE_yE_x + n_zE_zE_x) \; dS \quad (4.44)$$

ja koko vektoriksi

$$\mathbf{F} = \int_S (\epsilon_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{n}\mathbf{E}^2) \; dS \quad (4.45)$$

Alueeseen $V$ vaikuttava kokonaisvoima $\mathbf{F}$ voidaan siis korvata vain alueen pintaan $S$ kohdistuvalla pintavoimalla $\mathbf{F}^S$, jonka pintatiheyden $\mathbf{f}^S$ komponentti $i$ on

$$f_i^S = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}n_j \quad (4.46)$$

missä on määritelty **Maxwellin jännitystensori**

$$T_{ij} = \epsilon_0(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{E}^2) \quad (4.47)$$

Voimatiheys voidaan esittää tensorin divergenssinä:

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j T_{ij} \quad (4.48)$$

Voimien $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{F}^S$ ekvivalenssin toteamiseksi on vielä osoitettava niiden momenttien yhtäsuuruus mielivaltaisen pisteen suhteen. On siis näytettävä, että $\mathbf{N} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} \; dV$ on sama kuin $\mathbf{N}^S = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{f}^S \; dS$. Laskennallisesti suoraviivainen todistus perustuu jännitystensorin ja permutaatiosymbolin käyttöön (HT). Jännitystensoriin palataan magnetostatiikassa analogisella tavalla ja se tulee vastaan myös liikemäärän säilymislain yhteydessä.

**Esimerkki. Johdepalloon vaikuttava sähköstaattinen voima**

Asetetaan ohut johtava pallonkuori (säde $a$) homogeeniseen sähkökenttään $\mathbf{E}_0$. Sähkökenttä määritettiin jo luvussa 2. Pallon pinnalla sähkökentällä on vain radiaalinen komponentti $E_r(r = a) = 3E_0 \cos\theta$. Harjoitustehtävänä on osoittaa jännitystensorin avulla tai muulla tavalla päättelemällä, että staattisessa sähkökentässä olevaan johdekappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\int_S \sigma_s \mathbf{E} dS \tag{4.49}$$

missä $\sigma_s$ on varaustiheys johteen pinnalla $S$. Symmetrian perusteella pallon ylempään puoliskoon ($0 < \theta < \pi/2$) vaikuttava voima on $z$-akselin suuntainen ($F_+\mathbf{e}_z$) ja alempaan puoliskoon ($\pi/2 < \theta < \pi$) vaikuttava voima on $\mathbf{F}_- = -\mathbf{F}_+$. Koska pallon pinnalla $\sigma_s = \epsilon_0 E_r(a)$, niin

$$\begin{aligned} F_+ &= \int \mathbf{e}_z \cdot \frac{1}{2}\epsilon_0 E_r^2(a)\mathbf{e}_r dS = \\ \frac{9\epsilon_0 E_0^2 a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos^3\theta &= \frac{9\pi\epsilon_0 a^2 E_0^2}{4} \end{aligned} \tag{4.50}$$

# Luku 5

# Staattinen magneettikenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvien sähkövarausten eli sähkövirtojen aiheuttamaan staattiseen magneettikenttään. Jos sähköstatiikka tuli opiskeltua huolellisesti, niin analogioiden avulla magnetostatiikkaan pääsee helposti käsiksi. Laskennan puolella korostuu vektorimatematiikan hyvän hallinnan välttämättömyys.

## 5.1 Sähkövirta

Nykyaikana sähkövirta lienee tutumpi ilmiö kuin sähkövaraus. Todellisuudessa varauksia ja virtoja ei oikeastaan voi käsitellä erikseen. Edellisissä luvuissakin sähkövirta on ollut implisiittisesti esillä monta kertaa. Kun varaukset järjestäytyvät johdekappaleen pinnalle, systeemissä kulkee virtaa, ja sähkövirran avulla paristo pitää edellisen luvun esimerkissä kondensaattorin jännitteen vakiona. Samoin termit "johde" ja "eriste" viittaavat kappaleiden kykyyn kuljettaa sähkövirtaa.

Tarkastellaan joukkoa varauksellisia hiukkasia, joiden varaus on $q$, lukumäärätiheys $n$ ja nopeus $\mathbf{v}$. Sähkövirta $I$ määritellään annetun pinnan läpi aikayksikössä kulkevan varauksen määränä

$$I = dQ/dt \tag{5.1}$$

Olkoon $dS$ jokin pintaelementti. Sen läpi kulkeva virta on

$$dI = \frac{nq\mathbf{v}dt \cdot \mathbf{n}\, dS}{dt} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.2}$$

missä $\mathbf{J}$ on virrantiheys. Virrantiheys on samankaltainen vuosuure kuin sähkövuon tiheys $\mathbf{D}$ tai pian määriteltävä magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$. Fysikaalinen vuo pinnan läpi saadaan integroimalla vuon tiheys pinnan yli.

Sähkövirran SI-yksikkö on ampeeri A = C/s. Virrantiheys on virta pinta-alan läpi, joten sen yksikkö on A/m$^2$. SI-yksiköissä sähkövirran yksikkö otetaan perussuureeksi ja kaikki muut sähköiset yksiköt voidaan ilmaista ampeerin, metrin, kilogramman ja sekunnin avulla.

### 5.1.1 Jatkuvuusyhtälö

Virrantiheys ja sähkövaraus liittyvät läheisesti toisiinsa. Suljetun pinnan $S$ läpi alueeseen $V$ *tuleva* virta on ($\mathbf{n}$ osoittaa ulospäin)

$$I = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dV \tag{5.3}$$

Tämän täytyy olla yhtä suuri kuin varausten tilavuuteen $V$ tuoma sähkövirta

$$I = dQ/dt = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \tag{5.4}$$

Oletetaan tilavuus kiinteäksi, jolloin aikaderivaatta voidaan viedä integraalin sisään. Koska $\rho$ on sekä ajan että paikan funktio, kokonaisderivaatta muuttuu osittaisderivaataksi:

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \tag{5.5}$$

joten

$$\int_V (\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J})\; dV = 0 \tag{5.6}$$

Koska tämän täytyy olla voimassa kaikilla tilavuuksilla, saadaan virralle **jatkuvuusyhtälö**

$$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{5.7}$$

Jatkuvuusyhtälö seuraa suoraan kokonaisvarauksen säilymislaista eikä edellytä kiinteän tilavuuden tarkastelua (yleisempi johto: CL 6.1). Mikäli varaustiheys on ajasta riippumaton eli $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, sähkövirralla ei ole lähteitä tai nieluja ja siten kaikki virtaviivat sulkeutuvat tai jatkuvat äärettömyyksiin. Tällaista virtausta kutsutaan **stationaariseksi**.

### 5.1.2 Ohmin laki

On kokeellinen tosiasia, että vakiolämpötilassa olevissa metalleissa sähkövirta riippuu lineaarisesti sähkökentästä:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{5.8}$$

Tämä on **Ohmin laki** ja sen verrannollisuuskerroin $\sigma$ on **johtavuus**. Johtavuudelle käytetään yleisen tavan mukaan samaa symbolia kuin aiemmin

Taulukko 5.1: Aineiden resistiivisyyksiä. Johtavuus on resistiivisyyden käänteisluku. Taulukossa 3.1 lueteltujen eristeiden resistiivisyydet ovat tyypillisesti suurempia kuin $10^8 \Omega m$. Vesi on poikkeus, sillä sen resistiivisyys on noin 5000 $\Omega m$, joten sitä voidaan pitää myös johteena.

| aine | resistiivisyys $10^{-8}\ \Omega m$ | aine | resistiivisyys $10^{-8}\ \Omega m$ |
|---|---|---|---|
| alumiini | 2,65 | kupari | 1,67 |
| grafiitti | 1375 | nikkeli | 6,84 |
| hopea | 1,59 | rauta | 9,71 |
| konstantaani | 50 | sinkki | 5,92 |
| kulta | 2,35 | volframi | 5,68 |

pintavaraukselle. $\sigma$ on kirjallisuudessa yleisin merkintä ja jos joudumme jossain kirjoittamaan molemmat suureet, eroteltakoon ne vaikkapa kirjoittamalla pintavaraukselle $\sigma_S$. Jälleen on tärkeää oppia lukemaan yhtälöiden takana olevaa fysiikkaa eikä niinkään opetella kaavoja ulkoa!

Lineaarinen Ohmin laki on voimassa tavallisille aineille, ellei sähkökenttä ole kovin suuri. Se ei kuitenkaan ole sellainen fysiikan peruslaki kuin Maxwellin yhtälöt, vaan samantapainen rakenneyhtälö kuin $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, jonka yksityiskohtainen muoto ja jopa olemassaolo riippuvat väliaineen ominaisuuksista. Epälineaarisissa väliaineissa $\sigma$ on sähkökentän ja mahdollisesti myös magneettikentän funktio. Jos sähkökenttä on riittävän suuri, niin väliaine kuin väliaine alkaa käyttäytyä epälineaarisesti.

Johtavuuden käänteislukua kutsutaan **ominaisvastukseksi** eli resistiivisyydeksi. On tärkeää erottaa ominaisvastus (engl. resistivity) ja vastus (resistance). Johtavuuden SI-yksikkö on $[\sigma] = (\mathrm{A/m^2})/(\mathrm{V/m}) = \mathrm{A/(Vm)}$, joten ominaisvastuksen yksiköksi tulee Vm/A. Toisaalta V/A on tuttu vastuksen yksikkö ohmi ($\Omega$), joten ominaisvastuksen yksikkö on $\Omega$m ja johtavuuden $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} = \mathrm{S/m}$, missä on otettu käyttöön yksikkö siemens. Siemensin sijasta ohmin käänteislukuna esiintyy kirjallisuudessa usein mho. Taulukossa 5.1 luetellaan joidenkin hyvien johteiden resistiivisyyksiä.

Tarkastellaan sähkövirran ja jännitteen välistä yhteyttä ohuessa homogeenisessa suorassa virtajohdossa, jonka päiden välillä on jännite $\triangle\varphi$ ja jonka johtavuus on $\sigma$. Johteessa sähkökentällä ei ole komponenttia kohtisuorassa johtoa vastaan, koska tämä aiheuttaisi jatkuvan sähkövirran joko johtoon tai siitä pois ja johdon pinnan varautumisen. Koska systeemi on homogeeninen ja suora, sähkökenttä on sama koko johdossa, joten $\triangle\varphi = El$, missä $l$ on johdon pituus. Ohmin lain mukaan johdossa kulkee virta, joka mielivaltaisen poikkileikkauspinta-alan $A$ läpi on

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = JA = \frac{\sigma A}{l} \triangle\varphi \tag{5.9}$$

Verrannollisuuskerroin on vastus (resistanssi) $R = l/(\sigma A)$, jonka SI-yksikkö on siis ohmi. Tästä voidaan johtaa koulufysiikasta tuttuja yhteyksiä, kuten työn, jonka sähkökenttä tekee siirtäessään varauksen $Q$ potentiaalieron $U$ yli: $W = QU$ ja vastaavan tehon $P = UI = RI^2 = U^2/R$. Tämän tehon sanotaan häviävän materiaalin **Joulen lämmityksenä**.

### 5.1.3 Johtavuuden klassinen selitys[1]

Tarkastellaan johteessa nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvaa varauksellista hiukkasta (varaus $q$, massa $m$) klassisen mekaniikan mukaisesti. Sähkökentässä $\mathbf{E}$ hiukkanen kiihtyy voiman $q\mathbf{E}$ vaikutuksesta. Olkoon kyseessä lineaarinen ohminen johde, jossa sähkökenttä aiheuttaa tasaisen virrantiheyden $\mathbf{J}$. Hiukkaseen täytyy vaikuttaa toinenkin voima, joka kumoaa sähkökentän aiheuttaman kiihtyvyyden. Jos jarruttava voima on mekaanisen kitkan kaltainen eli verrannollinen hiukkasen nopeuteen, niin liikeyhtälö on

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \tag{5.10}$$

missä $G > 0$ on vakio. Alkuehdolla $\mathbf{v}(0) = 0$ saadaan ratkaisuksi

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G}\mathbf{E}\,(1 - e^{-Gt/m}) \tag{5.11}$$

Tämän mukaan hiukkasen nopeus lähestyy kulkeutumisnopeutta $\mathbf{v}_d = q\mathbf{E}/G$ eksponentiaalisesti aikavakion $\tau$ ollessa

$$\tau = m/G \tag{5.12}$$

Sijoittamalla tämä $\mathbf{v}_d$:n lausekkeeseen Ohmin laki voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\tau}{m}\mathbf{E} \tag{5.13}$$

joten

$$\sigma = nq^2\tau/m \tag{5.14}$$

missä $n$ on hiukkasten lukumäärätiheys. Jos virrankuljettajia on useampaa laatua, niin

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i} \tag{5.15}$$

Kohtuullisen hyvillä johteilla metalleista puolijohteisiin $\tau$ voidaan tulkita johtavuuselektronien keskimääräiseksi törmäysajaksi. Matkaa, jonka johtavuuselektroni kulkee keskimäärin törmäysten välillä kutsutaan keskimääräiseksi vapaaksi matkaksi $l_{mfp} = v_T\tau$, missä $v_T$ on elektronien terminen nopeus. Sen on oltava paljon suurempi kuin $v_d$, sillä muutoin $\tau$ tulisi riippuvaiseksi sähkökentästä eikä väliaineella olisi enää lineaarista Ohmin lakia.

[1] Kvantitatiivinen selitys edellyttää kvanttimekaniikkaa. Klassinen malli on kohtuullisen hyvä elektrolyyttiselle sähkönjohtavuudelle.

Useimmilla metalleilla $v_T \approx 10^6$ m/s ja $v_d$ yleensä alle $10^{-2}$ m/s. Metalleilla $l_{mfp} \approx 10^{-8}$ m huoneenlämmössä, joten $\tau \approx 10^{-14}$ s. Puolijohteilla relaksaatioaika voi olla kertalukua suurempi, mutta joka tapauksessa sähkövirta reagoi käytännössä välittömästi sähkökentän muutokseen. Tämän vuoksi ennen 1800-luvun loppua kentänmuutosvirtaa $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ ei ollut havaittu missään koetilanteessa.

### 5.1.4 Samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut

Ohmin laki on siis rakenneyhtälö kuten $\mathbf{E}$:n ja $\mathbf{D}$:n välinen yhteys. Analogia menee pidemmällekin. Stationaarisen virtauksen jatkuvuusyhtälö $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ on samaa muotoa kuin $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ tai yksinkertaisen väliaineen tapauksessa $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Stationaarisen sähkövirran virtaviivat voidaan määrittää ratkaisemalla Laplacen yhtälö tutuilla menetelmillä. Ensin on etsittävä sopivat reunaehdot virrantiheydelle. Tarkastellaan esimerkkinä johdetta, jossa on toisesta johdeaineesta koostuva pitkä sylinterinmuotoinen este. Kaukana sylinteristä sähkökenttä on kohtisuorassa sylinterin akselia vastaan.

Merkitään sylinteriä (sisäalue) alaindeksillä $i$ ja johdetta (ulkoalue) alaindeksillä $u$. Sylinterin akseli on $z$-akseli ja sylinterin säde $a$. Kaukana sähkökenttä on vakio $E_0\mathbf{e}_x$. Koska $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, reunaehdoksi saadaan $J_{un} = J_{in}$ (vrt. sähkövuon tiheys) eli

$$\sigma_u E_{un} = \sigma_i E_{in} \tag{5.16}$$

eli

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \sigma_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial r} \tag{5.17}$$

sylinterin pinnalla $r = a$. Toisaalta potentiaali on jatkuva, joten

$$\varphi_u(a, \theta) = \varphi_i(a, \theta) \tag{5.18}$$

Kaukana sylinteristä virta on häiriintymätön, joten

$$\varphi = -E_0 r \cos\theta \text{ , kun } r \to \infty \tag{5.19}$$

Tehdään origossa ja kaukaisuudessa hyvin käyttäytyvät ratkaisuyritteet (vrt. luku 2.9.3)

$$\varphi_i = Ar\cos\theta \tag{5.20}$$

$$\varphi_u = -E_0 r\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{r} \tag{5.21}$$

Tässä on rohkeasti arvattu, että vain $cos\theta$:aan verrannolliset termit tulevat kyseeseen, sillä ainoastaan ne kytkeytyvät ulkoiseen kenttään. Nyt reunaehdot antavat

$$Aa\cos\theta = -E_0 a\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{a} \tag{5.22}$$

$$\sigma_i A\cos\theta = \sigma_u\left(-E_0\cos\theta - \frac{B\cos\theta}{a^2}\right) \tag{5.23}$$

Saadaan kertoimet $A$ ja $B$

$$A = \frac{-2\sigma_u}{\sigma_i + \sigma_u} E_0 \tag{5.24}$$

$$B = \frac{\sigma_i - \sigma_u}{\sigma_i + \sigma_u} E_0 a^2 \tag{5.25}$$

ja ongelma on yksikäsitteisesti ratkaistu.

Jos sylinteri on hyvä eriste ($\sigma_i \to 0$), niin kaikki virta kiertää sen, jolloin

$$\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_0 - \frac{J_0 a^2}{r^2}(\cos\theta\, \mathbf{e}_r + \sin\theta\, \mathbf{e}_\theta) \tag{5.26}$$

Sähkövirran virtaviivat kiertävät esteen siististi. Ongelma on analoginen kokoonpuristumattomassa nestevirtauksessa ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) olevan sylinterinmuotoisen virtausesteen kanssa. Laplacen yhtälön ratkominen on varsin yleispätevä menetelmä fysiikassa (Feynman lectures, osa 2, luku 12-1: The same equations have the same solutions).

## 5.2 Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki

Magnetismi on tunnettu kauan, mutta sen yhteys sähköön löytyi vasta vuonna 1820, kun *Ørsted* havaitsi, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän. Magneettikenttä määritellään voimavaikutuksen kautta samaan tapaan kuin sähkökenttä. Pian Ørstedin kerrottua havainnoistaan *Ampère* julkaisi mittaustuloksensa, joiden mukaan kahden virtasilmukan, joissa kulkee virrat $I_1$ ja $I_2$, välillä vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{5.27}$$

Tämä on siis virtasilmukkaan 2 vaikuttava voima (vrt. Coulombin laki). Koska SI-yksiköissä *määritellään* $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ N/A$^2$, tämän voiman mittaus varsinaisesti määrittelee ampeerin, josta saadaan coulombi ja muut sähköopin SI-yksiköt. Magneettivuon tiheyden SI-yksikkö on tesla (T = Ns/Cm = N/Am) ja magneettivuon yksikkö weber (Wb = Tm$^2$). Koska esimerkiksi maapallon magneettikenttä maan pinnalla vaihtelee välillä 30000–60000 nT, on tesla useissa sovellutuksissa varsin suuri yksikkö (taulukko 5.2).

Virtasilmukoiden välisen voiman lausekkeesta ei välittömästi nähdä, että voiman ja vastavoiman laki on voimassa. Näin kuitenkin on, minkä voi todistaa pienellä vektorilaskennalla. Se osoitetaan myös energiatarkastelun kautta luvussa 8.

Taulukko 5.2: Magneettivuon tiheyksien suuruuksia ja suuruusluokkia.

| | |
|---|---|
| aivotoiminta | 1 pT |
| intergalaktinen kenttä | 1-10 pT |
| aurinkotuulen kenttä Maan etäisyydellä | 5 nT |
| ionosfäärivirtojen kenttä maanpinnalla | 10-1000 nT |
| Maan magneettikenttä Helsingissä | 50000 nT |
| voimakas kestomagneetti | 1 T |
| neutronitähti | $10^6 - 10^{11}$ T |

Voiman lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \oint_{C2} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \tag{5.28}$$

missä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{5.29}$$

on silmukan $C_1$ synnyttämä magneettikenttä (oikeammin magneettivuon tiheys) pisteessä $\mathbf{r}_2$, joka on silmukassa $C_2$. Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi** tai myös Ampèren ja Laplacen laiksi (kunnia kuulunee kaikille). Se voidaan yleistää jatkuvalle virrantiheydelle korvaamalla $I\, d\mathbf{l} \to \mathbf{J} dV$ ja korvaamalla lenkki-integraali tilavuusintegraalilla. Integrandi on nollasta poikkeava vain alueessa, jossa $\mathbf{J} \neq 0$, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \tag{5.30}$$

Näin voidaan laskea magneettikenttä mielivaltaisesta virtajakautumasta samaan tapaan kuin staattinen sähkökenttä annetusta varausjakautumasta.

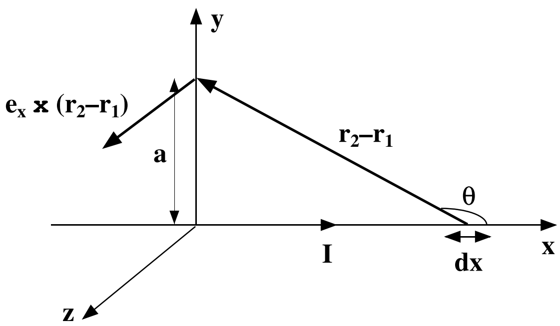
HT: Omaksu viimeistään nyt koulusta tuttu Biot'n ja Savartin lain sisältämä lyhyen virta-alkion magneettikentän suuntasääntö.

Kokeellinen tosiasia on, että kaikki magneettikentät voidaan antaa virtajakautumien avulla. Suoraviivaisella laskulla nähdään (HT), että

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.31}$$

joka on Coulombin lain jälkeen toinen laki Maxwellin yhtälöiden joukossa ja ilmaisee, että ei ole olemassa erillisiä kentän $\mathbf{B}$ lähteitä tai nieluja eli magneettisia varauksia (magneettisia monopoleja). Tämä merkitsee myös sitä, että magneettikentän kenttäviivoilla ei ole alku- eikä loppupäätä, vaan kaikki kenttäviivat sulkeutuvat.

Magneettikentäksi kutsuttu suure $\mathbf{B}$ on siis oikeammin magneettivuon tiheys, jonka SI-yksikkö tesla (T) vastaa yhden weberin (Wb) suuruista




Kuva 5.1: Suoran virtajohtimen aiheuttaman magneettikentän laskeminen.

magneettivuota neliömetrin läpi: magneettivuo $\Phi$ pinnan $S$ läpi on

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.32}$$

Magneettivuo suljetun pinnan läpi on nolla:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = 0 \tag{5.33}$$

Tätä voi havainnollistaa epätäsmällisellä toteamuksella, että jokaisesta avaruuden alueesta lähtee yhtä paljon magneettikentän kenttäviivoja kuin niitä sinne tulee.

Magneettikentän lähteettömyys on puhtaasti kokeellinen laki eikä sille ole mitään teoreettista tai matemaattista välttämättömyyttä. Modernit sähköistä, heikkoa ja vahvaa vuorovaikutusta yhdistävät yhtenäiskenttäteoriat mahdollistavat magneettisten monopolien olemassaolon. Ne voidaan periaatteessa ottaa klassisestikin mukaan kirjoittamalla $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$, missä $\rho_m$ on magneettinen varaustiheys. Tähän ei kuitenkaan ole mitään syytä, koska monopolien vaikutuksia ei havaita klassisen elektrodynamiikan puitteissa.

### Esimerkki. Pitkän suoran virtajohtimen aiheuttama kenttä

Olkoon johdin $x$-akselilla ja lasketaan magneettikenttä pisteessä $\mathbf{r}_2$ $y$-akselilla. Merkitään $d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x$ ; $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{e}_x$ ; $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{e}_y$, jolloin $d\mathbf{l}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = a\,dx\,\mathbf{e}_z$. Biot'n ja Savartin lain suoraviivainen käyttö antaa

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{l}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{adx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z \\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Jos virtajohde on äärellisen mittainen, magneettikenttä on oheisessa kuvassa määritellyn kulman $\theta$ funktio

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\mathbf{e}_z \left|_{-L_1}^{L_2} \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\mathbf{e}_z \right|_{\theta_1}^{\theta_2} (-\cos\theta) \tag{5.35}$$

Tässä käytettiin karteesista koordinaatistoa, missä suunnan $\mathbf{e}_z$ määrää tarkastelupisteen paikka. Lukiosta muistetaan, että magneettikenttä kiertää suoran johtimen ympäri oikean käden kiertosäännön mukaisesti. Käyttämällä sylinterikoordinaatistoa, missä positiivinen $z$-akseli on virran suuntainen ja $\mathbf{e}_\theta$ on atsimutaalikoordinaatin yksikkövektori (siis *eri kulma* kuin ylläolevassa kuvassa), magneettikenttä on

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\mathbf{e}_\theta \tag{5.36}$$

**Esimerkki. Ympyränmuotoisen virtasilmukan kenttä ympyrän keskipisteen läpi kulkevalla akselilla**

Olkoon ympyrän säde $a$ ja tarkastellaan kenttää ympyrän tasoa vastaan kohtisuorassa olevalla keskipisteen kautta kulkevalla $z$-akselilla. Olkoon $\mathbf{e}_z$-vektorin suunta virtaan nähden oikean käden säännön mukainen. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\mathbf{l}\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2\,d\theta}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{5.37}$$

Jos ympyröitä on useampia, kuten kelassa, on jokaisen osuus summattava.

**Esimerkki. Helmholtzin kela**

Helmholtzin kela muodostuu kahdesta $N$-kertaisesta silmukasta, joiden keskipisteet ovat samalla $z$-akselilla. Olkoot kelojen säteet $a$ ja etäisyys $2b$. Tällöin kenttä $z$-akselilla kelojen välissä etäisyydellä $z$ toisesta kelasta on

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2}\left\{\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2+a^2]^{3/2}}\right\} \tag{5.38}$$

Helmholtzin keloja käytetään tuottamaan suhteellisen homogeeninen magneettikenttä rajoitettuun alueeseen. Tämän tapainen systeemi on Nurmijärven geofysiikan observatoriossa, jonka testilaboratoriossa voidaan esimerkiksi kumota maapallon kenttä pienessä alueessa.

Tarkastellaan magneettikentän derivaattaa $z$-akselilla. Kun $z = b$, niin $dB_z/dz = 0$. Myös toinen derivaatta on nolla tässä pisteessä, jos $2b = a$. Asettamalla siis kelat niiden säteen etäisyydelle toisistaan, on kenttä pisteen $z = a/2$ ympäristössä mahdollisimman homogeeninen. Kolmaskin derivaatta häviää ja kentän epähomogeenisuus ilmenee vasta Taylorin sarjan neljännessä termissä

$$\begin{aligned} B_z(z) &= B_z(a/2) + \frac{(z-a/2)^4}{24} \left.\frac{d^4 B_z}{dz^4}\right|_{z=a/2} + \ldots \\ &\approx B_z(a/2)\left[1 - \frac{144}{125}\left(\frac{z-a/2}{a}\right)^4\right] \end{aligned} \tag{5.39}$$

## 5.3 Ampèren laki

Tarkastellaan stationaarista virtaa, siis $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Lasketaan magneettikentän roottori lähtien Biot'n ja Savartin laista

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right\} \tag{5.40}$$

Roottori kohdistuu paikkavektoriin $\mathbf{r}$. Kun se viedään integraalin sisään ja kirjoitetaan ristitulot auki, niin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' \tag{5.41}$$

Muistetaan kaava

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{5.42}$$

joten integraalin ensimmäinen termi on $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$.

Jälkimmäisessä termissä voidaan $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$:n antisymmetrisyyden vuoksi vaihtaa derivointi tapahtuvaksi $\mathbf{r}'$:n suhteen vaihtamalla merkki. Koska jälkimmäinen termi sisältää $\nabla$:n ja $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$:n välisen dyaditulon, käsitellään se $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$:n komponentti kerrallaan. Muokataan $x$-komponenttia kaavalla

$$\mathbf{J} \cdot \nabla' \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left( \mathbf{J} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla' \cdot \mathbf{J} \tag{5.43}$$

Oikean puolen jälkimmäinen termi on nolla oletuksen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ perusteella. Jäljellä oleva tilavuusintegraali voidaan muuttaa pintaintegraaliksi

$$\int_V \nabla' \cdot \left( \mathbf{J} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV' = \oint_S \mathbf{J} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}' \tag{5.44}$$

Tämän on oltava voimassa pinnan valinnasta riippumatta, joten pinta voidaan siirtää virtajakautuman ulkopuolelle eli integraalin on oltava nolla. Sama pätee kaikille komponenteille, joten jäljelle on jäänyt **Ampèren laki** differentiaalimuodossa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{5.45}$$

Integraalimuotoon Ampèren laki saadaan käytämällä Stokesin lausetta muodossa

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \tag{5.46}$$

joten

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mu_0\, I \tag{5.47}$$

Siis suljettua lenkkiä pitkin integroitu magneettivuon tiheys on $\mu_0$ kertaa lenkin läpi kulkeva kokonaisvirta. Tätä tulosta kutsutaan **Ampèren kiertosäännöksi** (vrt. sähköstatiikan Gaussin laki). Sen avulla voi laskea suoraan magneettikentän sopivissa symmetrisissä tapauksissa. Integraaleissa on muistettava, että pinnan $S$ normaalivektori $\mathbf{n}$ määrittelee oikeakätisesti käyräalkion $d\mathbf{l}$.

**Esimerkki. Kenttä toroidikäämin sisällä**

Tarkastellaan toruksen ympärille kierrettyä käämiä ($N$ kierrosta). Kentän voidaan päätellä (HT) olevan sylinterikoordinaateissa ilmaistuna muotoa $\mathbf{B} = B(r, z)\mathbf{e}_\phi$, missä $\phi$ on toruksen keskipistettä kiertävä kulma ja $r$ etäisyys toruksen keskipisteestä toruksen sisällä olevaan pisteeseen. Sovelletaan Ampèren kiertosääntöä pitkin $r$-säteistä ympyrää toruksen sisällä:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(r, z) 2\pi r = \mu_0 N I \tag{5.48}$$

joten kenttä riippuukin vain radiaalietäisyydestä:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\, \mathbf{e}_\phi \tag{5.49}$$

Toroidin ulkopuolella magneettikenttä on nolla, sillä geometrian perusteella $\mathbf{B} = B(r, z)\mathbf{e}_\phi$ ja lenkin läpäisevä virta on nolla.

## 5.4 Virtasilmukan magneettimomentti

Tarkastellaan virtajohdinta, joka muodostaa suljetun silmukan $C$. Tällöin koko silmukkaan vaikuttaa voima 5.28

$$\mathbf{F} = \oint_C I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{5.50}$$

Kokonaisvirta ei riipu paikasta, joten se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, samoin magneettikenttä, mikäli se on vakio:

$$\mathbf{F} = -I\,\mathbf{B} \times \oint_C d\mathbf{l} = 0 \tag{5.51}$$

Siis *vakio*magneettikentässä virtasilmukkaan vaikuttava voima on nolla.

Silmukka-alkioon vaikuttava vääntömomentti on

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I\,\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{5.52}$$

joten koko silmukalle

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{5.53}$$

Oletetaan jälleen, että magneettikenttä on vakio. Kirjoitetaan ristitulo auki kaavalla $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})\mathbf{B}$. Tällöin

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - I\mathbf{B} \oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} \tag{5.54}$$

Jälkimmäinen integraali muuntuu Stokesin lauseella muotoon $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. Ensimmäinen integraali muuntuu puolestaan yleistetyllä Stokesin lauseella muotoon

$$\oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \tag{5.55}$$

Koska $\mathbf{B}$ on vakio, niin $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}$, joten

$$\boldsymbol{\tau} = I \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = I \left( \int_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{5.56}$$

missä pinta-alavektori $\mathbf{S}$ voidaan kirjoittaa yleistetyn Stokesin lauseen avulla

$$\mathbf{S} = \int_S \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \tag{5.57}$$

Tuloa $I\mathbf{S}$ kutsutaan silmukan $C$ **magneettimomentiksi**

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \tag{5.58}$$

Tämän avulla vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{5.59}$$

Vaikka silmukkaan ei kohdistukaan voimaa, joka kiihdyttäisi silmukkaa kokonaisuutena, siihen kohdistuu vääntömomentti. Se pyrkii kääntämään silmukan pintaa kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä käytetään hyväksi esimerkiksi avaruusalusten asennonsäätöjärjestelmissä.

## 5.5 Magneettikentän potentiaaliesitys

### 5.5.1 Vektoripotentiaali

Koska magneettikenttä on lähteetön, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, se voidaan ilmaista vektorikentän roottorina:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.60}$$

**Vektoripotentiaali A** ei ole yksikäsitteinen, sillä olipa $f$ mikä riittävän siisti skalaarikenttä hyvänsä, niin $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$.

Vektoripotentiaali voidaan ilmaista virran avulla lähtemällä jälleen Biot'n ja Savartin laista:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \tag{5.61}$$

Integrandi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{5.62}$$

Sovelletaan tähän kaavaa $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f \nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla f$. Nyt $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, koska $\nabla$ ei operoi $\mathbf{r}'$:uun, joten integrandiksi tulee

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \tag{5.63}$$

$\nabla$ voidaan siirtää $\mathbf{r}'$:n suhteen laskettavan integraalin ulkopuolelle, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \right\} \tag{5.64}$$

eli

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{5.65}$$

Kirjoittamalla **A** komponenttimuodossa

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{5.66}$$

nähdään, että komponentit $A_i$ ovat matemaattisesti samaa muotoa kuin sähköstaattisen potentiaalin lauseke

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \tag{5.67}$$

joten jokaiselle komponentille erikseen ja siten koko vektorille on voimassa Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{5.68}$$

Koska toisaalta

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{5.69}$$

vektoripotentiaalin on toteutettava ehto

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \tag{5.70}$$

Usein vektoripotentiaali valitaan siten, että $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, mikä itse asiassa toteutuu edellä, jos $\mathbf{J}$ poikkeaa nollasta vain äärellisessä alueessa (HT).

Sähköstatiikassa skalaaripotentiaali helpottaa laskuja olennaisesti. Vektoripotentiaali on monimutkaisempi, mutta käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Se on myös hyödyllinen sähkömagneettisiin aaltoihin ja säteilyyn liittyvissä ongelmissa ja keskeinen apuväline elektrodynamiikan teoriassa, relativistisissa tarkasteluissa ja kvanttielektrodynamiikassa.

### 5.5.2 Multipolikehitelmä

Vektoripotentiaali voidaan esittää multipolikehitelmänä samaan tapaan kuin sähköinen skalaaripotentiaali. Tarkastellaan divergenssitöntä virtajakaumaa $\mathbf{J}$, joka poikkeaa nollasta vain äärellisessä tilavuudessa $V$. Koska vektoripotentiaalin integraaliesitys on samaa muotoa kuin sähköisen skalaaripotentiaalin, voidaan suoraan kirjoittaa komponentille $A_l$

$$A_l(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\frac{1}{r} \int J_l(\mathbf{r})\, dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' J_l(\mathbf{r})\, dV' \ + ...) \tag{5.71}$$

Integraalien laskemiseksi käytetään seuraavaa aputulosta:

$$\nabla \cdot (fg\mathbf{J}) = f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f \tag{5.72}$$

missä $f$ ja $g$ ovat vapaasti valittavia funktioita. Tässä käytettiin myös oletusta $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Integroimalla tilavuuden $V$ yli saadaan

$$\int (f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f) = 0 \tag{5.73}$$

($\nabla \cdot (fg\mathbf{J})$:n sisältävä integraali voidaan ulottaa yli koko avaruuden, koska alueen $V$ ulkopuolella virrantiheys on nolla. Muunnos pintaintegraaliksi antaa silloin nollan.)

Integroitaessa multipolikehitelmän ensimmäistä termiä valitaan yksinkertaisesti $f = 1$ ja $g = x_l$, jolloin $\int \mathbf{J}\, dV = 0$ eli monopolitermiä ei magneettikentän tapauksessa ole.

Seuraava eli dipolitermi käsitellään valitsemalla $f = x_l, g = x_n$, jolloin

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l\, dV' = x_n \int x_n'\, J_l\, dV' = -\frac{1}{2} x_n \int (x_l' J_n - x_n' J_l)\, dV' \tag{5.74}$$

missä summataan kahdesti esiintyvän indeksin $n$ yli ja käytettiin kaavaa 5.73. Integrandi muistuttaa vektoritulon komponenttia, ja pienen tarkastelun jälkeen huomataan, että

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l \, dV' = -\frac{1}{2} \epsilon_{lnp} x_n \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))_p \, dV' \tag{5.75}$$

missä $\epsilon_{lnp}$ on permutaatiosymboli ja summaus on nyt myös yli indeksin $p$. Lauseke sieventyy muotoon

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l \, dV' = -\frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, dV')_l = (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_l \tag{5.76}$$

missä $\mathbf{m}$ on virtajärjestelmän magneettimomentti.

Vektoripotentiaalin multipolikehitelmän johtava termi on siis

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{5.77}$$

Magneettivuon tiheys saadaan laskemalla tämän roottori (HT):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \tag{5.78}$$

Kaukaa katsottaessa ainoastaan systeemin magneettinen momentti vaikuttaa magneettikenttään. Tämä on muodoltaan samanlainen kuin sähköisen dipolin aiheuttama sähkökenttä 2.38. Tämän vuoksi magneettista momenttia kutsutaan usein **magneettiseksi dipolimomentiksi**.

### 5.5.3 Magneettikentän skalaaripotentiaali

Alueissa, joissa $\mathbf{J} = 0$, magneettikenttä on pyörteetön, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, joten näissä alueissa se voidaan ilmaista myös **magneettisen skalaaripotentiaalin** $\psi$ avulla:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi \tag{5.79}$$

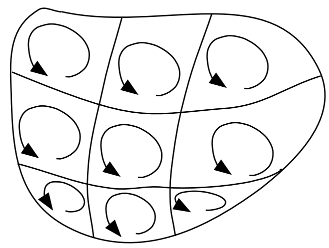
Koska toisaalta aina $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, skalaaripotentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{5.80}$$

joten sähköstatiikasta tuttuja apuneuvoja voi soveltaa magnetostatiikan ongelmiin, kunhan ollaan huolellisia erilaisten reunaehtojen kanssa.

Koska etäällä olevan virtasilmukan luoma magneettikenttä on matemaattisesti samaa muotoa kuin sähködipolin kenttä, voidaan magneettinen skalaaripotentiaali ilmaista magneettisen dipolimomentin avulla. Koska

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right) \tag{5.81}$$



Kuva 5.2: Virtasilmukan muodostaminen pienistä silmukoista. Nettovirtaa kulkee vain ison silmukan ulkoreunalla.

niin

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{5.82}$$

Erona sähköstatiikkaan magneettinen skalaaripotentiaali on paikan yksiarvoinen funktio ainoastaan yhdesti yhtenäisissä alueissa. Tarkastellaan esimerkkinä aluetta, jossa on virtasilmukka. Nyt dipolitarkastelu ei käy suoraan päinsä. Virtasilmukan voidaan kuitenkin ajatella koostuvan monesta differentiaalisesta silmukasta, jotka muodostavat tiheän silmukan sulkeman pinnan peittävän verkon (kuva 5.2). Virran kiertosuunta määrittelee oikeakätisesti kunkin silmukan normaalivektorin suunnan.

Verkon vierekkäisten elementtien virrat kumoavat toisensa, joten kokonaisvirta on sama kuin silmukkaa kiertävä virta. Kukin silmukka tuottaa ulkopuolelleen skalaaripotentiaalielementin

$$d\psi = \frac{d\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{(I\mathbf{n}\,dS)\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3} = -\frac{I}{4\pi}\,d\Omega \tag{5.83}$$

missä $d\Omega$ on differentiaalisen silmukan avaruuskulmaelementti. Integroimalla kaikkien pikkusilmukoiden yli saadaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi}\,\Omega \tag{5.84}$$

missä $\Omega$ on silmukan peittämä avaruuskulma katsottaessa pisteestä, jossa $\psi$ lasketaan (tämä selittää ylläolevan miinusmerkin). Kuljettaessa silmukan läpi ja tultaessa takaisin samaan tarkastelupisteeseen kasvaa avaruuskulma tekijällä $4\pi$, joten potentiaali ei ole yksikäsitteinen, vaan

$$\psi = -\frac{I}{4\pi}(\Omega_0 \pm n\,4\pi) \tag{5.85}$$

Alueesta saadaan yhdesti yhtenäinen asettamalla tarkastelualueen rajapinnaksi jokin silmukan reunakäyrän rajoittama pinta. Helppo esimerkki tilanteesta, jossa skalaaripotentiaali ei ole paikan yksiarvoinen funktio, on äärettömän pitkä suora virtajohdin. Jos johdin on $z$-akselilla, niin sylinterikoordinaateissa skalaaripotentiaaliksi kelpaa $\psi = -I\phi/(2\pi)$, jolle $\psi(\phi) \neq \psi(\phi + 2\pi)$.

Magneettinen skalaaripotentiaali eroaa sähköisestä siinä, että jälkimmäisellä on selvä fysikaalinen tulkinta: se antaa varauksellisen hiukkasen potentiaalienergian sähköstaattisessa kentässä. Magneettikentässä tällaista tulkintaa ei ole.

## 5.6 Lorentzin voima

Palautetaan mieleen origossa olevan varauksen $q_1$ pisteessä $\mathbf{r}$ olevaan varaukseen $q$ aiheuttama Coulombin voima

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{5.86}$$

Tässä molemmat varaukset ovat levossa. Jos varaukset liikkuvat vakionopeuksilla $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{v}_1$, aiheuttaa varaus $q_1$ varaukseen $q$ **magneettisen voiman**

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qq_1}{r^2}\mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{5.87}$$

Tämän voi päätellä soveltamalla kahden virtasilmukan välistä magneettista voimaa 5.27 infinitesimaalisille virta-alkioille. Laki on luonnollisesti myös kokeellisesti todennettavissa.

Magneettinen voima voidaan myös lausua muodossa (vrt. virtasilmukat)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{5.88}$$

missä $\mathbf{B}$ on magneettivuon tiheys

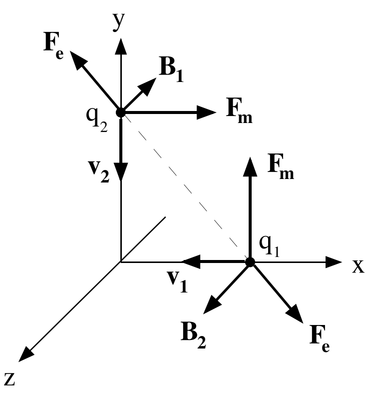
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1}{r^2}\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{5.89}$$

Superpositioperiaate pätee myös magneettikentän tapauksessa.

Yhteenlaskettua sähköistä ja magneettista voimaa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{5.90}$$

kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. Lauseke on voimassa myös ajasta riippuville kentille. Magneettinen voima on aina kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan, joten $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F_m} = 0$. Se ei siis tee työtä varattuun hiukkaseen. Jos halutaan muuttaa varauksellisen hiukkasen liike-energiaa, tarvitaan aina sähkökenttä, vaikka se luotaisiinkin muuttuvan magneettikentän avulla.




Kuva 5.3: Rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymislakia?

Koska $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, niin

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r^2}\frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \tag{5.91}$$

Verrataan magneettista ja sähköistä voimaa toisiinsa:

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v}{c}\frac{v_1}{c} \tag{5.92}$$

Tavallisilla nopeuksilla liikkuville varauksille sähköiset voimat ovat paljon suurempia kuin magneettiset voimat. Magneettiset voimat eivät kuitenkaan ole merkityksettömiä, sillä vaikka aine on yleensä sähköisesti neutraalia, se saattaa olla voimakkaasti magnetoitunutta.

Lopuksi esitetään ongelma, johon palataan luvussa 9 (kuva 5.3). Kaksi samanmerkkistä varausta ($q_1$ ja $q_2$) liikkuu hetkellisesti negatiivisten $x$- ja $y$-akselien suuntaan. Hiukkasten välillä on sähköinen poistovoima $\mathbf{F}_e$. Varauksen $q_1$ aiheuttama magneettikenttä varauksen $q_2$ kohdalla osoittaa sivun sisään ja magneettinen voima $\mathbf{F}_m$ oikealle. Vastaavasti varauksen $q_2$ aiheuttama magneettikenttä varauksen $q_1$ kohdalla osoittaa sivulta ulospäin ja magneettinen voima ylöspäin. Siispä varauksen $q_1$ varaukseen $q_2$ kohdistama sähkömagneettinen kokonaisvoima ei ole vastakkaissuuntainen varauksen $q_2$ varaukseen $q_1$ kohdistamaan voimaan. Onko jouduttu ristiriitaan Newtonin kolmannen lain kanssa ja sitä tietä ristiriitaan liikemäärän säilymislain kanssa!?

# Luku 6

# Magneettikenttä väliaineessa

## 6.1 Magnetoituma

Edellä rajoituttiin magneettikentän määrittämiseen magneettisilta ominaisuuksiltaan tyhjönkaltaisessa väliaineessa. Aineen mikroskooppinen rakenne aiheuttaa todellisuudessa kullekin atomille ominaisen magneettisen dipolimomentin $\mathbf{m}_i$. Lasketaan yhteen kaikkien atomien dipolimomentit tilavuusalkiossa $\triangle V$. Aineen **magnetoituma** määritellään raja-arvona

$$\mathbf{M} = \lim_{\triangle V \to 0} \frac{1}{\triangle V} \sum_i \mathbf{m}_i \tag{6.1}$$

Magnetoituma on siis väliaineen magneettisten dipolimomenttien tiheys paikan funktiona (vrt. polarisoituma). Koska magneettisen momentin SI-yksikkö on $\mathrm{Am}^2$, on magnetoituman yksikkö A/m.

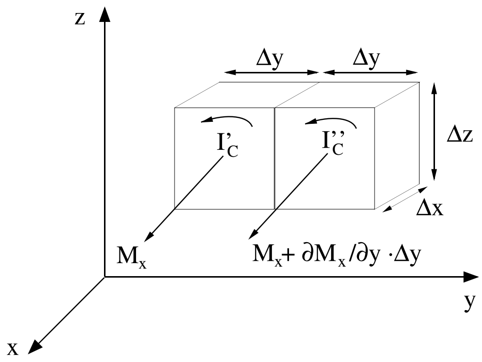
Jos dipolimomenttien tiheys on homogeeninen, kutakin dipolimomenttia vastaavat virtasilmukat summautuvat nollaan eivätkä aiheuta nettovirtaa. Jos jakautuma kuitenkin on epätasainen, on tarkastelupisteen eri puolilla eri määrä virta-alkioita ja tuloksena on kokonaisvirta $\mathbf{J}_M$. Virran laskemiseksi tarkastellaan kahta pientä tilavuusalkiota. Olkoon kummankin tilavuus $\triangle x \triangle y \triangle z$ ja sijaitkoot ne rinnakkain $y$-akselin suuntaan (kuva 6.1).

Jos ensimmäisen alkion magnetoituma on $\mathbf{M}(x, y, z)$, niin toisen magnetoituma on

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \triangle y + \text{korkeamman kertaluvun derivaattoja}$$

Ensimmäisen elementin magneettisen momentin $x$-komponentti ilmaistaan silmukkavirran $I'_C$ avulla:

$$M_x \triangle x \triangle y \triangle z = I'_C \triangle y \triangle z \tag{6.2}$$




Kuva 6.1: Magnetoitumasta aiheutuvan virran laskeminen.

ja vastaavasti toiselle elementille

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}\triangle y\right)\triangle x\triangle y\triangle z = I''_C\triangle y\triangle z \tag{6.3}$$

Elementtien välistä nousee nettovirta $z$-akselin suuntaan:

$$I'_C - I''_C = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\triangle x\triangle y \tag{6.4}$$

Toistamalla tarkastelu kahdelle rinnakkaiselle alkiolle $x$-akselilla (tarkkana merkkien kanssa!), saadaan $z$-akselin suuntaiseksi virraksi

$$I_C = \frac{\partial M_y}{\partial x}\triangle x\triangle y \tag{6.5}$$

Nämä ovat ainoat magneettiset momentit, jotka tuottavat virtaa $z$-akselin suuntaan. Laskemalla ne yhteen ja jakamalla pinta-alaelementillä saadaan magnetoitumisvirran tiheyden $z$-komponentiksi

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \tag{6.6}$$

eli vektorimuodossa

$$\mathbf{J}_M = \nabla\times\mathbf{M} \tag{6.7}$$

## 6.2 Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä

Lasketaan sitten magneettisen aineen aiheuttama magneettikenttä. Lähdetään liikkeelle vektoripotentiaalista (vrt. 5.77)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{6.8}$$

Tutuilla vektorikikoilla tämä saadaan muotoon

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' \tag{6.9}$$

missä $S$ on tilavuuden $V$ pinta. Pinnalla magnetoitumisvirran tiheys on

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \tag{6.10}$$

Tämä on magnetoitumisvirta yksikköpituutta kohti eli virta on ikään kuin litistetty kulkemaan yksiulotteisen pinnan läpi. Vektoripotentiaali määräytyy siis magnetoitumisvirrasta tilavuudessa $V$ ja tilavuuden pinnalla $S$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' \tag{6.11}$$

Tulos ei liene yllätys (vrt. sähköstaattinen potentiaali). Tästä ei kuitenkaan ole aivan helppo laskea magneettikenttää, koska $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$.

Lähdetäänkin liikkeelle suoraan vektoripotentiaalin määritelmästä:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] dV' \tag{6.12}$$

missä gradientti kohdistuu vektoriin $\mathbf{r}$. Nyt integrandi saadaan muokatuksi muotoon (HT)

$$\nabla \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] = \mathbf{M}(\mathbf{r}')\nabla\cdot\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] - (\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\nabla)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{6.13}$$

Oikean puolen ensimmäinen termi tuo magneettikenttään osuuden

$$\mathbf{B}_{\mathrm{I}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\,4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV' = \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.14}$$

Toinen termi vaatii jälleen vähän vektoriakrobatiaa (HT) ja antaa tuloksen

$$\mathbf{B}_{\mathrm{II}}(\mathbf{r}) = -\mu_0\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'\right) = -\mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) \tag{6.15}$$

Tässä $\psi(\mathbf{r})$ on magneettisen materiaalin skalaaripotentiaali. Magneettikenttä on tämän potentiaalin ja paikallisten virtojen aiheuttaman kentän summa:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.16}$$

Aineen ulkopuolella $\mathbf{M}$ on nolla, joten siellä kenttä saadaan skalaaripotentiaalista, joka on siis integraali aineessa olevista dipolimomenttialkioista.

Tässä on päädytty jokseenkin samanlaiseen kuvailuun kuin eristekappaleiden kanssa. Magneettisen skalaaripotentiaalin saa edelleen muotoon

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{n}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' - \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \qquad (6.17)\\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS' + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'
\end{aligned}$$

**Magneettisten napojen tiheys** $\rho_M$ ja **magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys** $\sigma_M$ ovat samankaltaisia apusuureita kuin polarisaatiotiheydet $\rho_P$ ja $\sigma_P$ sähköstatiikassa.

## 6.3 Magneettikentän voimakkuus

Magneettisen aineen itsensä lisäksi kokonaiskenttään vaikuttaa vapaiden varausten aiheuttama virta. Esimerkiksi rauta voi olla magnetoitunutta ja lisäksi sen johtavuuselektronit kuljettavat "vapaata" virtaa. Niinpä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' - \mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) \qquad (6.18)$$

Tämä voidaan laskea, mikäli $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{J}$ ovat tiedossa kaikkialla. Usein virta tunnetaankin, mutta $\mathbf{M}$ riippuu $\mathbf{B}$:stä.

Otetaan käyttöön apukenttä $\mathbf{H}$, jota kutsutaan **magneettikentän voimakkuudeksi**:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \qquad (6.19)$$

Tällöin

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' - \mu_0\nabla\psi(\mathbf{r}) \qquad (6.20)$$

Tämä voi näyttää turhalta tempulta, koska $\mathbf{H}$ riippuu yhä $\mathbf{M}$:stä $\rho_M$:n ja $\sigma_M$:n kautta, mutta toimihan sama myös sähköstatiikassa.

Kentän $\mathbf{H}$ hyödyllisyys piilee siinä, että sille saadaan virrantiheydestä riippuva differentiaaliyhtälö. Palautetaan ensiksi mieleen, että $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ on kokeellinen laki, jonka mukaan magneettivuon tiheys voidaan aina palauttaa virtajakautumiin, eikä todellisista eristetyistä magneettisista monopoleista ole havaintoja. Nyt Ampèren laissa on tärkeä huomioida kaikki sähkövirrat

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}+\mathbf{J}_M) \qquad (6.21)$$

missä **J** kuvaa varausten siirrokseen liittyvää vapaata virtaa. Ottamalla huomioon yhteys $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ saadaan tästä

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{6.22}$$

**H**-kentän pyörteet aiheutuvat vain vapaiden varausten kuljettamasta virrasta. Magneettisten ongelmien ratkomiseen tarvitaan tämän lisäksi $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, reunaehdot ja rakenneyhtälö **B**:n ja **H**:n välille.

Integraalimuodossa **H**:lle pätee

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{6.23}$$

eli magneettikentän voimakkuuden integraali pitkin suljettua lenkkiä on yhtä suuri kuin varausten kuljettama kokonaisvirta lenkin läpi.

## 6.4 Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti

Kenttien **B** ja **H** välinen suhde riippuu väliaineen ominaisuuksista samaan tapaan kuin kenttien **D** ja **E** yhteys. Magneettiset aineet ovat yleensä niin monimutkaisia, että rakenneyhtälö on määritettävä kokeellisesti. Suurelle joukolle aineita yhteys on muotoa

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{6.24}$$

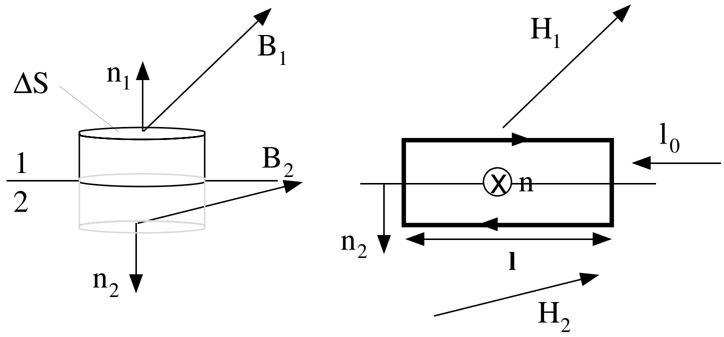
missä kerroin $\chi_m$ on **magneettinen suskeptiivisuus**. Epäisotrooppiselle mutta lineaariselle väliaineelle $\chi_m$ on tensori, epälineaarisessa väliaineessa se riippuu lisäksi magneettikentästä. SI-yksiköissä magneettinen suskeptiivisuus on laaduton suure (sähköisen $\chi$:n laatu on sama kuin $\epsilon_0$:n).

Jos $\chi_m > 0$, väliaine vahvistaa ulkoista magneettivuon tiheyttä ja ainetta kutsutaan **paramagneettiseksi**. Jos taas $\chi_m < 0$, magneettivuon tiheys heikkenee ja aine on **diamagneettista**. Sekä paramagneettisilla että diamagneettisilla aineilla magneettinen suskeptiivisuus on pieni: $|\chi_m| \ll 1$.

Kenttien **M** ja **H** välinen lineaarinen yhteys merkitsee, että myös kenttien **B** ja **H** välinen rakenneyhtälö on lineaarinen

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \equiv \mu\mathbf{H} \tag{6.25}$$

missä $\mu$ on väliaineen **permeabiliteetti**. Aineiden magneettisia ominaisuuksia tarkastellaan hieman enemmän tämän luvun lopussa.




Kuva 6.2: Magneettikenttävektoreiden rajapintaehtojen määrittäminen.

## 6.5 Magneettikenttävektoreiden rajapintaehdot

Tarkastellaan kuvan 6.2 mukaista kahden väliaineen rajapintaa. Magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}$ reunaehto on analoginen sähkövuon tiheyden $\mathbf{D}$ reunaehdon kanssa. Kuvan pillerirasian pinnan yli laskettu $\mathbf{B}$:n integraali on

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = 0 \tag{6.26}$$

Litistämällä pillerirasian vaippa infinitesimaaliseksi saadaan

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \triangle S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \triangle S = 0 \tag{6.27}$$

missä $\triangle S$ on rasian kannen pinta-ala. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, niin

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{6.28}$$

eli magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

Magneettikentän voimakkuudelle saadaan reunaehto Stokesin lauseen avulla tarkastelemalla $\mathbf{H}$:n lenkki-integraalia kuvan suorakaidetta pitkin

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{6.29}$$

missä $\mathbf{n}$ on normaalikomponentti integroimislenkin läpi ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0$). Litistettäessä integroimislaatikko jälleen infinitesimaaliseksi silmukan läpi kulkeva virta voi olla ainoastaan pintavirtaa $\mathbf{K}$, joten

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \triangle S = \triangle l\, \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) \tag{6.30}$$

jonka avulla saadaan

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 \triangle l = \triangle l\, \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \triangle l\, (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{l}_0 \tag{6.31}$$

mistä seuraa reunaehto

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_2)_t \tag{6.32}$$

eli magneettikentän voimakkuuden tangentiaalikomponentti on jatkuva rajapinnan yli, ellei pinnalla ole pintavirtaa. Mikäli $\mathbf{H}$-kenttä tunnetaan pinnan molemmin puolin, saadaan pintavirran tiheys lausekkeesta

$$\mathbf{K} = \mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \tag{6.33}$$

Useissa magnetismiin liittyvissä ongelmissa on näppärää tarkastella vuoputkia. Tarkastellaan magneettikentän kenttäviivoja, jotka ovat jokaisessa pisteessä kentän $\mathbf{B}$ tangentin suuntaisia. Vuoputki on ikäänkuin kimppu kenttäviivoja tai täsmällisemmin alue, jonka vaipan läpi ei kulje yhtään kenttäviivaa. Olkoot $S_1$ ja $S_2$ vuoputken päät. Tällöin vuoputken tilavuuden yli laskettu integraali on

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}'\, dS_1 = \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0 \tag{6.34}$$

missä $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{n}'$ ovat magneettikentän suuntaisia putken päiden normaalivektoreita. Magneettivuo pitkin vuoputkea on siis vakio. Tämä koskee vain $\mathbf{B}$-kenttää eikä välttämättä päde $\mathbf{H}$-kentälle:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{H}\, dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{M})\, dV = \int_V \rho_M\, dV \tag{6.35}$$

Vuoputkeen voi siis tulla magneettikentän voimakkuutta, mikäli aineella on nollasta poikkeava napavoimakkuus.

## 6.6 Reuna-arvotehtäviä magneettikentässä

Magneettiset reuna-arvotehtävät ovat yleensä monimutkaisempia kuin sähköstatiikassa. Sähkövirrat, epätasainen magnetoituminen tai epälineaarinen rakenneyhtälö edellyttävät Laplacen yhtälöä monimutkaisempien yhtälöiden ratkomista ja hankaloittavat reunaehtoja. Rajoitutaan tässä yksinkertaisiin tilanteisiin.

Virrattomuus ($\nabla \times \mathbf{H} = 0$) tekee mahdolliseksi magneettikentän esittämisen skalaaripotentiaalin gradienttina $\mathbf{H} = -\nabla\psi$. Jos lisäksi aine on magneettisesti ainakin likimain lineaarista eli $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ja tasaisesti magnetoitunutta ($\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$), niin $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ja päästään ratkaisemaan Laplacen yhtälöä

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{6.36}$$

**Esimerkki. Magnetoituva pallo tasaisessa magneettikentässä**

Tämä ongelma on sama kuin luvun 3.5.1 eristepallo tasaisessa ulkoisessa sähkökentässä. Lausumalla $\psi$ vyöhykeharmonisten funktioiden avulla ja käyttämällä reunaehtoja saadaan pallon sisällä magneettikentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \, \mathbf{e}_z = vakio \tag{6.37}$$

ja ulkopuolella

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \, \mathbf{e}_z + \left[ \frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left( \frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2\mathbf{e}_r \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \tag{6.38}$$

missä $\mathbf{e}_z$ on ulkoisen magneettikentän suuntainen, koordinaatiston origo on pallon keskipisteessä ja kulma $\theta$ on poikkeama $z$-akselilta. Laiskempi laskija huomaa, että **B**-kenttä vastaa sähköstatiikan **D**-kenttää, ja kirjoittaa vastaukset suoraan symboleja vaihtamalla.

**Esimerkki. Tasaisesti magnetoituneen pallon kenttä tyhjössä**

Olkoon pallon säde $a$ ja magnetoituma vakio $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$. Tilanne on jälleen aksiaalisymmetrinen, joten magneettinen skalaaripotentiaali pallon ulkopuolella (1) ja sisällä (2) voidaan kirjoittaa (ks. luku 2.9.2)

$$\psi_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \tag{6.39}$$

$$\psi_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos\theta) \tag{6.40}$$

Nyt ei ole taustan kenttää, joten ulkokentässä kaikki $r$:n positiiviset potenssit on jätettävä pois. Sisäkentässä ei voi puolestaan olla negatiivisia potensseja, jotta ratkaisu olisi äärellinen pallon keskipisteessä. Reunalla $r = a$

$$H_{1\theta} = H_{2\theta} \tag{6.41}$$

$$B_{1r} = B_{2r} \tag{6.42}$$

**H**:n reunaehdosta seuraa yksinkertaisesti

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta} \tag{6.43}$$

**B**-kentässä on mukana myös magnetoituma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla\psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{6.44}$$

ja tämän jatkuvuus reunalla edellyttää, että

$$-\mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \mu_0 M \cos\theta \tag{6.45}$$

Sijoittamalla näihin $\psi$:n lausekkeet saadaan yhtälöt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) P_n(\cos\theta) = \text{vakio} \tag{6.46}$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta)[C_{1n}(n+1)a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] \tag{6.47}$$
$$-\mu_0 M \cos\theta = 0$$

Muistetaan, että Legendren polynomit ovat ortogonaalisia funktioita. Kun $n = 0$, saadaan ehdot

$$C_{10} a^{-1} - A_{20} = \text{vakio} \tag{6.48}$$
$$\mu_0 C_{10} a^{-2} = 0 \tag{6.49}$$

Siis $C_{10} = 0$ ja myös $A_{20}$ voidaan valita nollaksi ilman, että sillä on vaikutusta kenttiin **B** tai **H**. Termeille $n = 1$ on voimassa

$$C_{11} a^{-3} - A_{21} = 0 \tag{6.50}$$
$$2C_{11} a^{-3} + A_{21} - M = 0 \tag{6.51}$$

jonka ratkaisuna on $C_{11} = Ma^3/3$ ; $A_{21} = M/3$.

Kun $n \geq 2$, yhtälöt toteutuvat ainoastaan kertoimilla $C_{1n} = A_{2n} = 0$. Ongelma on ratkaistu[1]. Potentiaalit ovat

$$\psi_1(r,\theta) = \frac{1}{3} M (a^3/r^2) \cos\theta \tag{6.52}$$
$$\psi_2(r,\theta) = \frac{1}{3} M r \cos\theta \tag{6.53}$$

ja **H**-kentät saadaan näiden gradientteina

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} M (a^3/r^3)[2\mathbf{e}_r \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta] \tag{6.54}$$
$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} M \mathbf{e}_z \tag{6.55}$$

Ulkoinen **B**-kenttä on $\mu_0 \mathbf{H}_1$. Koska pallon magnetoituma $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$, jää pallon sisäiseksi **B**-kentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M \mathbf{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \tag{6.56}$$

joka on siis vastakkaissuuntainen **H**-kentälle. Ongelman voisi ratkaista myös suoraan integroimalla magnetoitumaa (yhtälö 6.17). Tasaisesti magnetoitunut pallo on analoginen tasaisesti polarisoituneen pallon kanssa.

[1] Olisi voitu myös päätellä suoraan, että sisäkentät ovat vakioita ja $z$-akselin suuntaisia. Tällöin potentiaalin kehitelmässä kyseeseen tulevat vain $\cos\theta$-termit.

## 6.7 Molekulaarinen magneettikenttä

Tarkasteltaessa aineen magnetismia molekyylitasolla kenttien $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$ välinen ero katoaa, sillä molekyylien ajatellaan sijaitsevan tyhjössä ja mikroskooppinen magneettikenttä $\mathbf{B}_m$ tarkasteltavan molekyylin kohdalla voidaan korvata mikroskooppisella kentällä $\mathbf{H}_m$: $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$. Molekulaarisen magneettikentän muodostavat kaikki ulkoiset sähkövirrat ja kaikki molekulaariset dipolit lukuunottamatta molekyyliä, jonka kohdalla kenttä lasketaan. Tehdään tarkasteltavan pisteen ympärille onkalo, jonka ulkopuolinen väliaine käsitellään jatkumona samalla tavalla kuin luvussa 3.6 molekulaarista polarisoitumista määritettäessä. Molekulaarinen kenttä on siis

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{near} \tag{6.57}$$

missä $\mathbf{H}$ on makroskooppinen kenttä, $\mathbf{H}_s$ onkalon reunoilla olevien pintadipolien aiheuttama kenttä ja $\mathbf{H}_{near}$ onkalon sisällä olevien dipolien tuottama kenttä. Samanlaisella laskulla, jolla määritettiin $\mathbf{E}_m$ aiemmin, saadaan (vrt. tasaisesti magnetoitunut pallo)

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3}\mathbf{M} \tag{6.58}$$

Suurelle joukolle aineita $\mathbf{H}_{near}$ on merkityksettömän pieni, jolloin

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M} \tag{6.59}$$

## 6.8 Para- ja diamagnetismista

Tarkastellaan hieman yksityiskohtaisemmin väliaineen vaikutusta magneettikenttään rajoittuen kvalitatiiviseen käsittelyyn. Hyviä kuvauksia voi löytää korkeatasoisista lukion oppikirjoistakin (esim. *Kurki-Suonio et al.*, Kvantti 2, jota tässä on käytetty yhtenä lähdeteoksena).

Aine magnetoituu ulkoisessa magneettikentässä. Väliaine ja kenttään tuodut kappaleet synnyttävät oman kenttänsä. Tilanne on kuitenkin selvästi erilainen kuin sähkökentän tapauksessa, mikä lienee tuttua kaikille hankaussähkön ja kestomagneettien kanssa leikkineille. Kaikkien aineiden polarisoituminen sähkökentässä havaitaan siitä, että varattu kappale vetää puoleensa neutraalejakin kappaleita. Sen sijaan magneeteilla on selvästi näkyvä vaikutus vain harvoihin aineisiin. Lähellä olevat kappaleet ja väliaineet eivät siksi yleensä häiritse merkittävästi magneettisia tutkimuksia.

Väliaineen vaikutusta magneettikenttään on yksinkertaista tutkia toroidikäämin avulla, koska käämin kenttä on kokonaan toroidin sisällä (vrt. eristeiden tutkimus kondensaattorin avulla). Kentän muoto ei muutu, jos toroidi täytetään väliaineella, vaan ainoastaan magneettivuon tiheys muuttuu.

Taulukko 6.1: Joitain dia- ($\chi_m < 0$) ja paramagneettisia ($\chi_m > 0$) aineita. Suskeptiivisuudet on annettu huoneenlämpötilassa. Kaasujen tapauksessa oletetaan lisäksi normaali ilmanpaine.

| aine | suskeptiivisuus |
|---|---:|
| alumiini | $2,1 \cdot 10^{-5}$ |
| elohopea | $-2,8 \cdot 10^{-5}$ |
| happi | $193,5 \cdot 10^{-8}$ |
| hopea | $-2,4 \cdot 10^{-5}$ |
| kulta | $-3,5 \cdot 10^{-5}$ |
| kupari | $-0,98 \cdot 10^{-5}$ |
| magnesium | $1,2 \cdot 10^{-5}$ |
| timantti | $-2,2 \cdot 10^{-5}$ |
| titaani | $18 \cdot 10^{-5}$ |
| typpi | $-0,67 \cdot 10^{-8}$ |
| vety | $-0,22 \cdot 10^{-8}$ |

Väliaineen suhteellinen permeabiliteetti voidaan silloin mitata vertaamalla magneettivuon tiheyttä käämissä väliaineen kanssa ja ilman sitä.

Koska suurimmalla osalla aineista suhteellinen permeabiliteetti on lähellä ykköstä, käytetään useammin magneettista suskeptiivisuutta

$$\chi_m = \mu_r - 1 \tag{6.60}$$

ja monille aineille pätee yksinkertainen rakenneyhtälö

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \tag{6.61}$$

Ainetta kutsutaan diamagneettiseksi, jos $\chi_m < 0$ ja paramagneettiseksi, jos $\chi_m > 0$. Näille aineille on tyypillisesti $|\chi_m| < 10^{-3}$, joten yleensä voidaan aineen permeabiliteetti olettaa samaksi kuin tyhjön permeabiliteetti (taulukko 6.1). Poikkeuksena ovat ferromagneettiset aineet, jotka eivät noudata yksinkertaista magnetoitumislakia.

Aineen magneettisten ominaisuuksien mikroskooppinen selitys perustuu useisiin eri tekijöihin. Alkeishiukkaset ovat pieniä alkeismagneetteja, joiden magneettimomentti liittyy hiukkasten spiniin. Elektronin magneettimomentti on noin 700 kertaa suurempi kuin protonin ja noin 1000 kertaa suurempi kuin neutronin magneettimomentti, joten elektronit määräävät aineen magneettiset ominaisuudet. (Neutroni ei siis kuitenkaan magneettisessa mielessä ole täysin neutraali.)

Elektronin kiertoliike atomissa vastaa virtasilmukkaa ja siitä aiheutuva magneettimomentti on samaa suuruusluokkaa kuin spinin aiheuttama. Rataliikkeestä johtuva magneettimomentti voidaan ymmärtää klassisella mallilla, jossa elektroni kiertää $r$-säteistä ympyrärataa kulmataajuudella $\omega = 2\pi/T$. Malli vastaa virtasilmukkaa, jonka pinta-ala on $A = \pi r^2$ ja jossa kulkee virta $I = q/T = qv/2\pi r$. Magneettimomentti on siis $m = IA = qvr/2$. Elektronin liikemäärämomentti radan keskipisteen suhteen on $L = m_0 vr$ (massa $= m_0$). Ottaen huomioon, että kyse on vektorisuureista, voidaan suuntasäännöt muistaen kirjoittaa $\mathbf{m} = -e/(2m_0)\mathbf{L}$, joka vastaa myös havaintoja. Samaan tulokseen päädytään, jos tarkastellaan pyörivän hiukkasen magneettimomentin ja liikemäärämomentin suhdetta (HT). Elektronin spinistä johtuva magneettimomentti on kuitenkin kaksinkertainen, joten klassinen kuva ei tässä anna oikeaa ennustetta. Spiniä ei voida selittää arkipäiväisen mielikuvan mukaan pyörimisestä johtuvaksi, vaan kyseessä on puhtaasti kvanttimekaaninen suure.

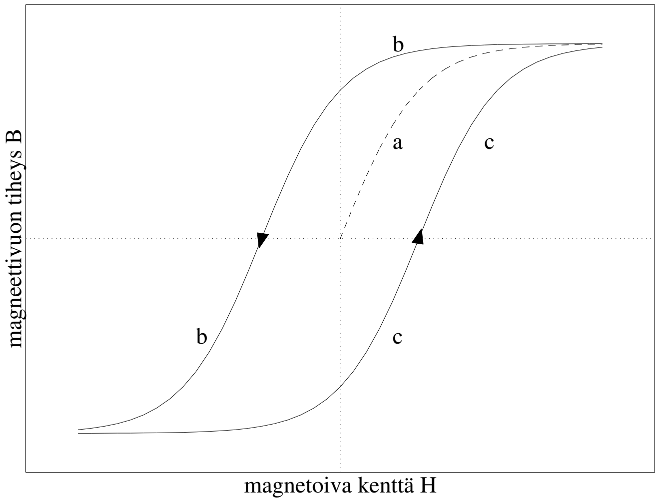
Atomin magneettimomentti muodostuu elektronien spinien ja rataliikkeen magneettimomenteista, jotka yleensä pyrkivät kumoamaan toisensa pareittain. Jos atomilla tai molekyylillä on parillinen määrä elektroneja, sen magneettimomentti yleensä puuttuu. Muuten atomien magneettimomentit ovat samaa suuruusluokkaa kuin elektroneilla.

Ulkoinen magneettikenttä suuntaa atomien ja metallien vapaiden elektronien magneettimomentteja siten, että niiden kenttä vahvistaa ulkoista kenttää aineessa. Tämä selittää paramagnetismin. Lämpötilan noustessa lämpöliike häiritsee atomien järjestäytymistä, jolloin suskeptiivisuus pienenee. Vastaavasti lämpötilan nousu heikentää pysyvien sähködipolien suuntautumisesta aiheutuvan polarisoitumista.

Ulkoinen magneettikenttä vaikuttaa myös elektronien rataliikkeeseen. Tällöin atomiin indusoituu magneettimomentti, joka suuntautuu ulkoista kenttää vastaan, mikä selittää diamagnetismin. Ilmiö tapahtuu kaikissa aineissa, mutta peittyy molekyylien magneettimomenttien alle, jos molekyyleillä on magneettimomenttia (vrt. pysyvä ja indusoituva polarisaatio sähkökentän vaikutuksesta). Diamagneettinen suskeptiivisuus ei riipu merkittävästi lämpötilasta, koska atomien lämpöliike ei pysty häiritsemään nopeasti ulkoiseen kenttään sopeutuvia elektroneja.

## 6.9 Ferromagnetismi

Joissain kiinteissä aineissa atomien välinen vuorovaikutus pyrkii suuntaamaan magneettimomentit samansuuntaisiksi, jolloin muodostuu atomin kokoon nähden suuria magneettisia alkeisalueita. Ulkoinen kenttä puolestaan kasvattaa alkeisalueita ja pyrkii kääntämään kaikkien alueiden magneettimomentit samansuuntaiseksi. Tämä on ferromagnetismin perusmekanismi. Ferromagneettisia aineita ovat esimerkiksi rauta, koboltti ja nikkeli sekä näiden monet yhdisteet. Riittävän korkeassa lämpötilassa (Curie-pisteessä)




Kuva 6.3: Magneettivuon tiheys ferromagneettisessa aineessa ei ole magnetoivan kentän yksikäsitteinen funktio. Kuvaan on piirretty myös magnetoitumiskäyrä ($a$).

ferromagneettinen aine muuttuu paramagneettiseksi. Raudan Curie-piste on $770°C$ ja nikkelin $358°C$.

Myös ferromagneettisille aineille on tapana kirjoittaa rakenneyhtälö permeabiliteetin avulla, mutta nyt $\mu = \mu(\mathbf{H})$ ei välttämättä ole yksikäsitteinen funktio. Hystereesi-ilmiössä magnetoivan kentän $\mathbf{H}$ ja aineen magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}$ välinen yhteys on erilainen riippuen siitä, ollaanko magnetoivaa kenttää kasvattamassa vaiko pienentämässä (kuva 6.3). Suskeptiivisuus $\chi_m$ on siis kentän $\mathbf{H}$ funktio ja yleisesti ottaen iso.

Kun kentän $\mathbf{H}$ voimakkuutta kasvatetaan, aineen magnetoituminen voimistuu. Tätä voi jatkua kuitenkin vain tiettyyn kyllästysarvoon $\mathbf{M}_s$ asti. Tämän jälkeenkin $\mathbf{B}$-kenttä jatkaa kasvamistaan lineaarisesti termin $\mu_0\mathbf{H}$ myötä. Olkoon ferromagneetti nyt magnetoitu tällä tavoin ja annetaan $\mathbf{H}$:n alkaa pienetä. Nyt $\mathbf{B}$-kenttä ei pienene saman käyrän mukaisesti vaan tapahtuu hystereesi-ilmiö.

Ferromagnetismin vastakohta on tilanne, jossa järjestyneen vastakkaissuuntaisista spineistä muodostuvan rakenteen magneettinen momentti on nolla. Tällaista ainetta kutsutaan **antiferromagneetiksi**. Vielä yleisempi järjestynyt rakenne on sellainen, jossa on vastakkaisia spinejä, mutta kuitenkin nollasta poikkeava kokonaismagneettimomentti. Tällaisia aineita kutsutaan **ferriiteiksi**. Niitä ovat esimerkiksi tietyt rautaoksidit ($MOFe_2O_3$, missä M on jokin kaksivalenssinen metalli-ioni). Tunnetuin ferriitti lienee magnetiitti ($Fe_3O_4$). Ferriittien teknologinen merkitys on niiden korkeissa magnetoituman kyllästymisarvoissa ja huonossa sähkönjohtavuudessa. Ferriittien tyypilliset resistiivisyydet ovat luokkaa 1–$10^4$ $\Omega$m, kun raudan resistiivisyys on vain $10^{-7}$ $\Omega$m. Ferriittejä käytetään etenkin korkeataajuuslaitteissa, joissa pyörrevirtoihin liittyvä energianhäviö on ongelma.

# Luku 7

# Sähkömagneettinen induktio

Toistaiseksi on tarkasteltu vain ajasta riippumattomia kenttiä. Ne voi mainiosti kuvitella kenttäviivojen avulla, joten emme ole törmänneet mihinkään, mikä puolustaisi Feynmanilta lainattua toteamusta kurssin alussa. Tässä luvussa aletaan tarkastella ajasta riippuvia kenttiä ja siirtyä alueelle, jossa mielikuvitus joutuu paljon kovemmalle koetukselle.

## 7.1 Faradayn laki

Sähköstaattiselle kentälle pätee $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Mikäli kenttä ei ole staattinen ja siten integraali ei ole nolla, silmukkaan $C$ sanotaan indusoituvan **sähkömotorisen voiman** (smv)

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \tag{7.1}$$

Tässä $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ on kenttä silmukka-alkion $d\mathbf{l}(\mathbf{r})$ kohdalla. Havaintojen mukaan smv vastaa silmukan läpäisevän magneettivuon muutosta:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{7.2}$$

Tämä on **Faradayn induktiolaki**. Se ei riipu mitenkään siitä, kuinka magneettivuon tiheys itsessään muuttuu. Lain olemassaolo ei myöskään riipu fysikaalisen silmukan olemassaolosta, vaan pätee annettua reittiä $C$ pitkin lasketulle integraalille. Faradayn laki on kokeellinen luonnonlaki, joka ei seuraa mistään muista luonnonlaeista.

Sähkömotorisen voiman yksikkö on sama kuin potentiaalieron eli voltti. Sähkömotorinen voima ei kuitenkaan ole minkään kahden pisteen välinen jännite, koska se lasketaan aina suljetun silmukan yli!

HT: Osoita, että pinnan läpäisevä magneettivuo riippuu vain pinnan reunakäyrästä. Ohje: magneettikenttä on aina divergenssitön.

Jos tarkastellaan liikkuvia silmukoita ja mahdollisesti liikkeen mukana muuttuvia silmukoita, on oltava huolellinen. Faradayn lain integraalimuodossa olevan kokonaisaikaderivaatan on otettava huomioon nämä muutokset. On tärkeää huomata, että $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ on sähkökenttä alkion $d\mathbf{l}(\mathbf{r})$ kohdalla koordinaatistossa, jossa $d\mathbf{l}$ on levossa. Jos nimittäin silmukka olisi todellinen virtapiiri, niin nimenomaan kenttä $\mathbf{E}'$ aiheuttaisi virran siinä.

Oletetaan seuraavassa aluksi, että Faradayn laissa olisi kokeellisesti määritettävä verrannollisuuskerroin $k$ siten, että

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{7.3}$$

Vedotaan lisäksi klassiseen Galilei-invarianssiin eli siihen, että toistensa suhteen vakionopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvissa koordinaatistoissa $K$ ja $K'$ fysiikan lait ovat samat muunnoksessa $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t, t' = t$.

Vuo silmukan läpi voi johtua eksplisiittisestä aikariippuvuudesta $(\partial/\partial t)$ tai muutoksesta liikkeen vuoksi $(\mathbf{v}\cdot\nabla)$. Käyttämällä konvektiivista derivaattaa $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$ voidaan osoittaa (HT), että

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\, dS + \oint_C \mathbf{B}\times\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} \tag{7.4}$$

Tällöin Faradayn laki saa muodon

$$\oint_C (\mathbf{E}' - k(\mathbf{v}\times\mathbf{B}))\cdot d\mathbf{l} = -k\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{7.5}$$

Tämä voidaan tulkita toisinkin. Tilannetta sivusta tarkastelevan levossa olevan havaitsijan voi ajatella katsovan paikallaan olevaa silmukkaa $C$. Faradayn laki sovellettuna tällaiseen *kiinteään* silmukkaan on

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -k\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{7.6}$$

missä $\mathbf{E}$ on kyseisen havaitsijan näkemä kenttä. Galilei-invarianssin perusteella on oltava $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$.

Tarkastellaan sitten todellisessa johtimessa liikkuvaa virtaa kuljettavaa elektronia. Silmukan $C$ mukana liikkuvan koordinaatiston suhteen johdinelektronit ovat käytännössä levossa (HT: tarkastele tavanomaista metallijohdinta ja siinä kulkevaa tavanomaista virtaa). Elektroneihin vaikuttavassa Lorentzin voimassa on siis vain sähköinen osuus $q\mathbf{E}'$. Ulkopuolisen havaitsijan mielestä Lorentzin voima on $q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$, joten on oltava $k = 1$.

Nyt Faradayn laki saadaan helposti differentiaalimuotoon. Oletetaan, että silmukka $C$ on levossa valitussa koordinaatistossa. Tällöin myös kentät

**B** ja **E** on määritelty samassa koordinaatistossa. Stokesin kaavan avulla saadaan

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{7.7}$$

Koska silmukka on muuten mielivaltainen, niin on oltava

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7.8}$$

joka on Maxwellin kolmas yhtälö.

**Huom.** Tarkasteltaessa liikkuvaa silmukkaa oletettiin implisiittisesti, että $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. Tämä on totta kertalukuun $(v/c)^2$ asti. Kenttien relativistisiin muunnoskaavoihin perehdytään kurssin lopussa. Faradayn laki ei kuitenkaan ole approksimaatio, vaan fysiikka on samaa kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa, joita yhdistää Lorentzin muunnos.

Faradayn laissa oleva miinusmerkki ilmaisee **Lenzin lain**: "induktiovirta vastustaa muutosta, joka sen aiheuttaa". Induktiovirta kuluttaa energiaa. Tämä energia on saatava systeemiltä, joka aiheuttaa induktion. Tämä merkitsee, että induktion aiheuttajan on tehtävä työtä induktiovirran vastavaikutuksen voittamiseksi. Lenzin laki on usein kätevä tapa määrittää indusoituvan virran suunta, joka saattaa olla vaikea johtaa aikaderivaatan ja roottorin sisältävästä abstraktin näköisestä Faradayn laista.

Faradayn lain avulla voidaan ymmärtää esimerkiksi betatronin toiminta. Vain sähkökenttä voi tehdä työtä varaukselliseen hiukkaseen. Betatronissa muuttuva magneettikenttä indusoi hiukkasia kiihdyttävän sähkökentän.

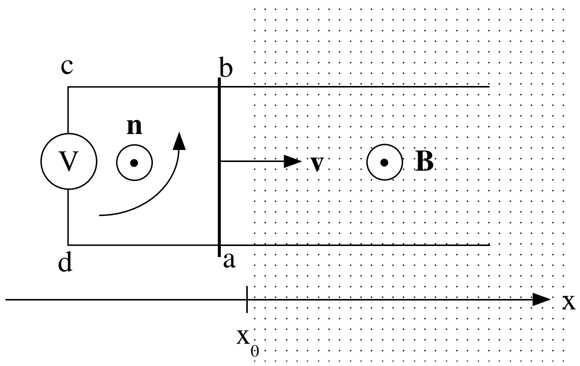
### Esimerkki. Liikkuva johdin magneettikentässä

Tarkastellaan yksinkertaisena, mutta toivottavasti ajatuksia herättävänä esimerkkinä magneettikentässä likkuvaa johdetankoa. Oletetaan, että johdetanko $ab$ (pituus $l$) liikkuu vakionopeudella $\mathbf{v}$ pitkin johdinkiskoja ja saapuu alueeseen $x > x_0$, jossa on vakiomagneettikenttä $\mathbf{B}$ kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan (kuva 7.1). Asetetaan välille $cd$ suuriresistanssinen jännitemittari (silmukassa $abcda$ ei siis kulje virtaa).

Kentässä olevan johdetangon vapaisiin varauksiin vaikuttaa Lorentzin voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{7.9}$$

Voiman magneettinen osa ajaa positiivisia ja negatiivisia varauksia tangon eri päihin. Tämä aiheuttaa sähkökentän, joka pyrkii vastustamaan varausseparaatiota ja syntyy tasapainotilanne, jossa sähkökenttä suuntautuu pisteestä $a$ kohti pistettä $b$ ja kentän suuruus on $E = vB$. Tangon päiden $a$ ja




Kuva 7.1: Magneettikenttään saapuva kiskoilla liikkuva johdintanko. Huomaa positiivisten suuntien valinnat.

$b$ välillä on jännite

$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = El = Blv \tag{7.10}$$

Tätä sanotaan liikkeen indusoimaksi potentiaalieroksi.

Tässä ei tarvittu induktiolakia ollenkaan, vaan mikrofysikaalinen tarkastelu riitti. Toisaalta voidaan laskea magneettivuo silmukan *abcda* läpi, kun johdetanko kulkee magneettikentässä. Valitsemalla integroimispinnan eli silmukan tason normaalivektori magneettikentän suuntaiseksi saadaan vuon muutosnopeudeksi

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dA}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv \tag{7.11}$$

joten Faradayn lain mukaan piiriin indusoituu smv

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \tag{7.12}$$

Merkki kertoo, että sähkömotorinen voima vaikuttaa kuvaan merkittyä positiivista kiertosuuntaa vastaan. Jos virtapiiri oikosuljettaisiin jännitemittarin kohdalta, niin induktiovirta kulkisi myötäpäivään. Induktiovirta pyrkii siis pienentämään magneettivuon muutosta silmukan läpi.

Ajatellaan sitten, että neliösilmukka (sivu $l$) saapuu magneettikenttään nopeudella $\mathbf{v}$. Oikosuljetaan piiri, jolloin virta voi kulkea siinä. Silmukan tullessa magneettikenttään vuon muutos on vakio ($-Blv$), ja piiriin syntyvän myötäpäivään kulkevan induktiovirran suuruus on $Blv/R$ ($R$ on piirin resistanssi). Kun silmukka on kokonaan magneettikentän sisällä, vuo ei enää muutu ja virta lakkaa kulkemasta (itseinduktion takia virran kulku ei käytännössä lopu aivan heti). Kannattaa huomata, että induktioilmiö voitaisiin tässäkin tapauksessa selittää Lorentzin voiman avulla.

Silmukan tullessa kenttään sivuun $ab$ kohdistuu nopeudelle vastakkaissuuntainen voima $\mathbf{F}$ suuruudeltaan $BlI$, joten silmukan kiskomiseen tarvittava teho on $Fv = BlIv$. Tämä on täsmälleen yhtä suuri kuin virtasilmukan ohmiset tehohäviöt.

Oletetaan nyt, että neliösilmukka on kokonaan alueessa $x > x_0$ eikä liiku. Muutetaan magneettikenttää silmukan kohdalla ajan funktiona: $B(t) = Bvt/l$. Tällöin magneettivuo silmukan läpi on $\Phi(t) = Bvlt$, jolloin vuon muutos on sama kuin edellä liikkuvan tangon tapauksessa. Ratkaisevana erona on se, ettei induktioilmiötä voida selittää Lorentzin voiman avulla.

Magneettikenttään saapuvan silmukan tilannetta voitaisiin tarkastella myös silmukan mukana liikkuvan tarkkailijan kannalta. Hänen mielestään magneettisia voimia ei ole, joten taas tarvitaan induktiolakia selittämään sähkömotorisen voiman syntyminen.

Se, että liikkeen indusoima jännite on yhtä suuri kuin muuttuvan magneettikentän aiheuttama sähkömotorinen voima, ei ole itsestään selvää. Tämän ekvivalenssin selvittäminen oli keskeisessä osassa, kun Einstein kehitti suppeamman suhteellisuusteorian vuonna 1905. Liikkuvissa koordinaatistoissa oikean integroimistien valinta vuon muutoksen laskemiseksi ei ole aina helppoa. Koska Maxwellin yhtälöt kuitenkin osoittautuvat Lorentz-invarianteiksi, Faradayn laki differentiaalimuodossa ja Lorentzin voiman lauseke pätevät kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

## 7.2 Itseinduktio

Tarkastellaan eristettyä virtasilmukkaa, jossa magneettivuo on silmukan itsensä aiheuttama. Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettikenttä riippuu lineaarisesti silmukassa kulkevasta sähkövirrasta $I$. Kiinteässä muuttumattomassa silmukassa vuon muutos johtuu vain virran muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} \tag{7.13}$$

Virran ja vuon muutoksen välistä verrannollisuuskerrointa

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \tag{7.14}$$

kutsutaan silmukan **itseinduktanssiksi**. Jos vuo on suoraan verrannollinen virtaan, niin $L = \Phi/I$. Virran muutos indusoi sähkömotorisen voiman

$$\mathcal{E} = -L\,\frac{dI}{dt} \tag{7.15}$$

Koska sähkömotorisen voiman SI-yksikkö on voltti, niin induktanssin SI-yksikkö on Vs/A ≡ H eli henry. Itseinduktio ilmenee esimerkiksi siten, että virtapiireissä virta ei koskaan kytkeydy tai katkea täysin hetkellisesti. Itseinduktio korostuu, jos piirissä on käämi, koska silloin piirin induktanssi on käytännössä sama kuin käämin induktanssi.

**Esimerkki. Toroidaalisen kelan itseinduktanssi**

Kierretään johdinlankaa $N$ kierrosta toruksen ympäri (poikkileikkauksen ala $A$). Itseinduktanssiin vaikuttaa sekä kela itse että silmukkaan virtaa syöttävä johteen ulkoinen osa. Oletetaan, että ulkoinen osa on koaksiaalikaapeli, joka ei aiheuta merkittävää ulkoista kenttää. Ampèren kiertosääntö antaa magneettikentäksi toruksen sisällä

$$B = \mu_0 NI/l \tag{7.16}$$

missä $l$ on toruksen keskimääräinen pituus (luku 5.3). Magneettivuo jokaisen yksittäisen kierroksen läpi on

$$\Phi_1 = \mu_0 NIA/l \tag{7.17}$$

ja kaikkien kierrosten yhteenlaskettu vuo on $\Phi = N\Phi_1$, josta saadaan induktanssi

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \mu_0 N^2 A/l \tag{7.18}$$

## 7.3 Keskinäisinduktio

Tarkastellaan sitten $n$ kappaletta erillisiä silmukoita. Kirjoitetaan kaikkien silmukoiden aiheuttama yhteenlaskettu vuo silmukan $i$ läpi muodossa

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij} \tag{7.19}$$

Tähän silmukkaan indusoituu smv

$$\mathcal{E}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \tag{7.20}$$

Jos kaikki silmukat ovat kiinteitä, kunkin silmukan $j$ osuus $\Phi_{ij}$ riippuu vain siinä kulkevan virran $I_j$ muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt} \tag{7.21}$$

Kertoimia

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\,,\ i \neq j \tag{7.22}$$

kutsutaan silmukoiden $i$ ja $j$ välisiksi keskinäisinduktansseiksi; $L_i = M_{ii}$ on silmukan $i$ itseinduktanssi. Jos väliaine on magneettisesti lineaarinen, $M_{ij}$:t ovat vakioita. Keskinäisinduktanssi voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen virtojen kulkusuunnista silmukoissa.

Tarkastellaan kahta kiinteää silmukkaa lineaarisessa väliaineessa (yksinkertaisuuden vuoksi $\mu = \mu_0$). Tällöin

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \tag{7.23}$$

Lasketaan magneettikenttä Biot'n ja Savartin laillla ja integroidaan siitä magneettivuo:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left[ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] \cdot \mathbf{n}\, dS_2 \tag{7.24}$$

Käyttämällä kaavaa

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{7.25}$$

saadaan

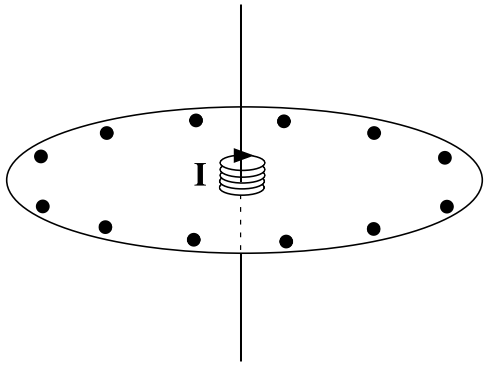
$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left[ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right] \cdot \mathbf{n}\, dS_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \end{aligned} \tag{7.26}$$

jota kutsutaan Neumannin kaavaksi. Se ei ole kovin käytännöllinen, mutta se osoittaa, että keskinäisinduktanssi on puhtaasti silmukoiden geometriasta johtuva suure ja siten silmukoiden itsensä ominaisuus. Silmukoissa kulkeva sähkövirta ei vaikuta lineaarisessa tapauksessa induktanssiin. Lisäksi keskinäisinduktanssi on symmetrinen silmukoiden vaihtamisen suhteen ($M_{12} = M_{21}$), mikä vaikuttaa ensi näkemältä hieman yllättävältä.

Keskinäisinduktanssin laskeminen on hankalaa, mutta mittaaminen varsin yksinkertaista: syötetään piiriin 1 tunnettu virta ja mitataan sen indusoima smv piirissä 2. Helpointa tämä on toteuttaa sinimuotoisen vaihtovirran avulla.

## 7.4 Pähkinä purtavaksi: Feynmanin kiekko

Palataan lopuksi perusongelmien pariin (Feynman, osa 2, luku 17-4). Tarkastellaan levyä, joka pääsee pyörimään akselinsa ympäri (kuva 7.2). Keskellä




Kuva 7.2: Levy, jonka keskellä kulkevassa käämissä kulkee tasavirta $I$. Reunalla on tasaisin välein varattuja palloja.

on käämi, jossa pieni paristo pitää yllä tasavirtaa. Levyn reunalla on tasainen varausjakauma, esimerkiksi samanlaisia varattuja palloja. Oletetaan, että levy ei tässä tilanteessa pyöri. Oletetaan sitten, että virta käämissä katkeaa äkillisesti ilman ulkopuolista vaikutusta. Alkaako levy pyöriä?

Magneettikentän heikkeneminen indusoi vähäksi aikaa sähkökentän. Geometrian perusteella kenttäviivat ovat ympyröitä, joiden keskipiste on levyn akselilla. Varauspalloihin kohdistuva voima aiheuttaa silloin vääntömomentin, jonka takia levy alkaa pyöriä.

Toisaalta laitteiston liikemäärämomentti ennen virran katkaisua on nolla. Siihen ei kohdistu ulkoisia voimia, joten liikemäärämomentin[1] säilymislain perusteella levy ei ala pyöriä.

Jos ensimmäinen vastaus on oikea, miten käy liikemäärämomentin säilymislain? Jos taas jälkimmäinen selitys pätee, niin sovellettiinko induktiolakia väärin? Asiaan palataan luvussa 9.

[1] Liikemäärämomenttia sanotaan usein myös impulssimomentiksi. Liikemäärämomenttia ja liikemäärää ei puolestaan pidä sekoittaa toisiinsa!

# Luku 8

# Magneettinen energia

Luvussa 4 nähtiin, että staattiseen sähkökenttään liittyy tietty energia. Näin on myös magneettikentän laita, sillä Faradayn lain mukaan magneettikentän muuttaminen aiheuttaa muutosta vastustavan voiman ja siten magneettikentän luominen edellyttää työtä.

## 8.1 Kytkettyjen virtapiirien energia

Tarkastellaan yksinkertaista virtasilmukkaa, jossa kulkee virta $I$ ja jonka vastus on $R$. Liitetään virtapiiriin jännitelähde $V$. Tällöin

$$V + \mathcal{E} = IR \tag{8.1}$$

missä $\mathcal{E}$ on virtasilmukkaan indusoituva smv. Jännite tekee työtä siirtämällä varauksia silmukassa. Differentiaalisen varauksen $dq = I\,dt$ osalta työ on

$$V\,dq = VI\,dt = -\mathcal{E}I\,dt + I^2R\,dt = I\,d\Phi + I^2R\,dt \tag{8.2}$$

Termi $I^2R\,dt$ antaa resistiivisen tehon hävikin (Joulen lämmitys). Termi $I\,d\Phi$ on indusoitunutta sähkömotorista voimaa vastaan tehty työ, joka tarvitaan magneettikentän muuttamiseen:

$$dW_b = I\,d\Phi \tag{8.3}$$

missä alaindeksi $b$ viittaa ulkoisen jännitelähteen tekemään työhön.

Tarkastellaan sitten systeemiä, joka koostuu $n$ kappaleesta virtapiirejä:

$$dW_b = \sum_{i=1}^{n} I_i\,d\Phi_i \tag{8.4}$$

Jos kaikki vuonmuutokset ovat peräisin systeemin silmukoista, niin

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\, dI_j = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, dI_j \tag{8.5}$$

Oletetaan lisäksi, että silmukat ovat jäykkiä ja paikallaan, jolloin energianmuutoksiin ei liity mekaanista työtä. Tällöin $dW_b$ on yhtäsuuri kuin magneettisen energian muutos $dU$. (Virrat oletetaan myös riittävän hitaasti muuttuviksi, jolloin ei tarvitse ottaa huomioon säteilyhäviöitä.)

Rajoitutaan yksinkertaiseen väliaineeseen, jossa magneettivuon ja virran välinen suhde on lineaarinen. Lasketaan systeemin energia lähtien tilasta, jossa virtoja ei ole. Lineaarisuudesta johtuen lopullinen energia ei riipu tavasta, jolla tila on saavutettu. Näin ollen virtoja voidaan kasvattaa nollasta lopputilaan samassa tahdissa eli joka hetki $I_i' = \alpha I_i$, missä $\alpha$ kasvaa $0 \to 1$. Tällöin $d\Phi_i = \Phi_i\, d\alpha$ ja systeemin **magneettinen energia** on

$$U = \int dW_b = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} I_i' \Phi_i\, d\alpha = \sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i \tag{8.6}$$

Tämä voidaan myös ilmaista summana silmukoiden yli:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} I_i I_j \tag{8.7}$$

josta saadaan suoraan yhdelle silmukalle ($M_{11} = L_1 = L =$ silmukan itseinduktanssi)

$$U = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \tag{8.8}$$

Tämän voi rinnastaa kondensaattorin energiaan $Q^2/(2C)$, joka ilmaisee kondensaattorin sähkökenttään varastoituneen energian. Kahdelle silmukalle saadaan

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{8.9}$$

missä otettiin huomioon symmetria $M_{12} = M_{21} = M$. Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että $L_1 L_2 \geq M^2$.

Virtasilmukkajärjestelmän energia voidaan määrittää myös kokoamalla systeemi silmukoista, joihin yksi kerrallaan luodaan virrat $I_i$. Silmukkaan indusoituva smv tekee työtä teholla $-L_i I_i \frac{dI_i}{dt}$, joten kasvatettaessa virta nollasta lopulliseen arvoonsa tarvitaan ulkoista työtä määrä $\frac{1}{2} L_i I_i^2$. Tarkastellaan silmukkaparia, joista ensimmäiseen synnytetään virta $I_1$ ja ulkoinen työ on $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$. Pidetään sitten $I_1$ vakiona ja kasvatetaan toisen silmukan virta nollasta arvoon $I_2$. Tällöin tehdään työtä sekä silmukkaan 2 indusoituvaa smv:tä vastaan ($\frac{1}{2} L_2 I_2^2$) että silmukkaan 1 indusoituvaa smv:tä vastaan ($\int_0^t M I_1 dI_2/dt = M I_1 I_2$). Systeemin kokonaisenergia on siis $\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$. Sama idea yleistyy suuremmalle silmukkajoukolle.

## 8.2 Magneettikentän energiatiheys

Oletetaan väliaine edelleen lineaariseksi ja virtapiirit yksinkertaisiksi silmukoiksi. Tällöin magneettivuoksi saadaan Stokesin lauseen avulla

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \tag{8.10}$$

joten magneettinen energia on

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \tag{8.11}$$

Siirrytään sitten tilanteeseen, missä sähkövirta on tilavuusvirtaa $\mathbf{J}$ ja $C_i$ on suljettu lenkki johtavassa väliaineessa. Tilannetta voi ajatella suurena joukkona lähellä toisiaan olevia silmukoita, jolloin $I_i d\mathbf{l}_i \to \mathbf{J}\, dV$ ja

$$\sum_i \oint_{C_i} \to \int_V$$

eli

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, dV \tag{8.12}$$

Sähköstatiikassa energia lausuttiin vastaavasti varaustiheyden ja potentiaalin tulon integraalina (luku 4.2).

Koska $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ja $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$, niin divergenssiteoreemaa käyttämällä saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}\, dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{8.13}$$

Järkevä oletus on, että virtasilmukat eivät ulotu äärettömyyteen, joten pinta $S$ voidaan siirtää kauas niiden ulkopuolelle. Staattinen kenttä $\mathbf{H}$ heikkenee vähintään kuten $1/r^2$ ja vektoripotentiaali $\mathbf{A}$ vähintään kuten $1/r$, mutta pinta kasvaa vain kuten $r^2$. Pintaintegraali häviää kuten $1/r$ tai nopeammin $r$:n kasvaessa rajatta. Tilavuusintegraali voidaan siis ottaa koko avaruuden yli, jolloin

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dV \tag{8.14}$$

Samoin kuin sähköstaattisen energian tapauksessa voidaan määritellä **magneettinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \tag{8.15}$$

Tulos pätee siis lineaariselle magneettiselle väliaineelle. Mikäli väliaine on lisäksi isotrooppista, saadaan

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \tag{8.16}$$

**Huom.** Tässä tarkasteltiin stationaarista tilannetta. Kentän energia yleisessä ajasta riippuvassa tilanteessa käsitellään luvussa 9. Säteilykenttien tapauksessa pintaintegraalit eivät välttämättä häviä.

**Esimerkki. Koaksiaalikaapelin energiatiheys**

Tarkastellaan koaksiaalikaapelia, jonka keskellä on $a$-säteinen johdin, sen ulkopuolella sylinterisymmetrisesti eristekerros välillä $a \leq r \leq b$, jonka ulkopuolella on jälleen johtava sylinterisymmetrinen kerros $b \leq r \leq c$. Oletetaan, että kaikkialla $\mu = \mu_0$. Kulkekoon sisäjohtimessa tasaisesti jakautunut virta $I$ ja ulkojohtimessa virta $-I$. Suoran johtimen aiheuttama magneettikenttä on Ampèren kiertosäännön perusteella (HT)

$$\mathbf{B} = B_\theta(r)\,\mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}\,\mathbf{e}_\theta \tag{8.17}$$

Tarkastellaan sisempää johdinta ($0 \leq r \leq a$). Tällöin $I(r)/I = (\pi r^2)/(\pi a^2)$, joten

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \tag{8.18}$$

ja magneettinen energiatiheys on

$$u_a = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} \tag{8.19}$$

Sisemmän johteen yli integroitu energia $l$:n pituisella matkalla on

$$U_a = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} r\,dr\,d\theta\,dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi} \tag{8.20}$$

Johtimien välissä kenttä määräytyy sisemmän johtimen kokonaisvirrasta:

$$\begin{aligned} B_{\theta b} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ u_b &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \\ U_b &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln\frac{b}{a} \end{aligned} \tag{8.21}$$

missä siis kokonaisenergia tarkoittaa johtimien välisessä alueessa olevaa kokonaisenergiaa. Uloimmassa johtimessa vastaavat lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta c} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2}{r} - r\right) \\ u_c &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2}\left(\frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2\right) \\ U_c &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2}\left[c^4 \ln\frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right] \end{aligned} \tag{8.22}$$

Koaksiaalikaapelin ulkopuolella kenttä on nolla, joten energiakin on siellä nolla.

## 8.3 RCL-piiri

Kerrataan RCL-piirien perusasioita induktion ja sähkömagneettisen energian havainnollistamiseksi. Asia on sinänsä toivottavasti tuttua peruskurssilta. Tarkastellaan yksinkertaista virtapiiriä, jossa on sarjaan kytkettynä vastus (resistanssi $R$), käämi (induktanssi $L$) ja kondensaattori (kapasitanssi $C$) (kuva 8.1). Lisäksi piirissä on jännitelähde $V(t)$.

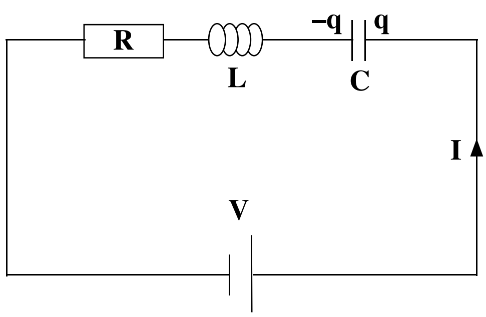
Valitaan kondensaattorin varauksen merkki ja virran positiivinen suunta kuvan mukaisesti, jolloin Kirchhoffin säännöstä saadaan

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI + q/C \tag{8.23}$$

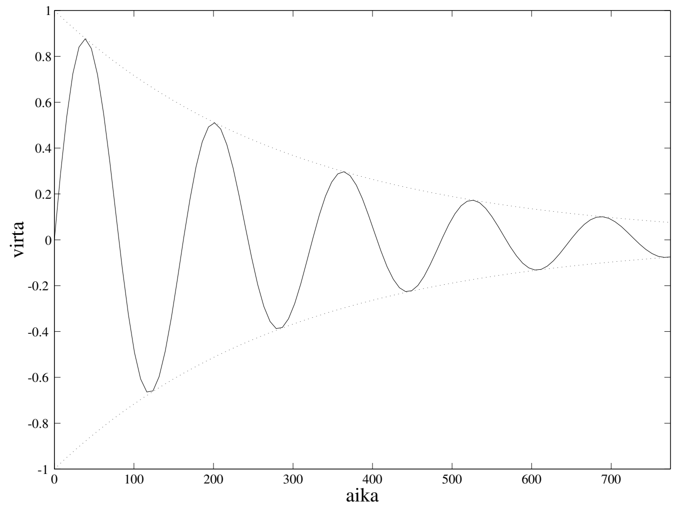
eli piirin smv on yhtäsuuri kuin jännitehäviöt. Derivoimalla ajan suhteen ja käyttämällä yhteyttä $dq/dt = I$ saadaan virralle toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{dV}{dt} \tag{8.24}$$

Ideaalisessa tapauksessa piirin vastus on häviävän pieni (LC-piiri). Oletetaan, ettei piirissä myöskään ole jännitelähdettä. Kyseessä on siis kondensaattorin purkaminen käämin kautta. Tällöin 8.24 on harmonisen värähtelijän liikeyhtälö, ja värähtelyn kulmataajuus on $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Jos kondensaattorin varaus on aluksi $Q$, niin ajan funktiona se muuttuu sinimuotoisesti: $q(t) = Q\cos\omega t$ ja $I(t) = -\omega Q\sin\omega t$. Systeemin sähkömagneettinen energia on $U(t) = LI^2/2 + q^2/(2C) = Q^2/(2C)$ eli koko ajan sama kuin kondensaattorin sähköstaattinen energia aluksi. Kokonaisenergia siis säilyy, se




Kuva 8.1: Yksinkertainen RCL-piiri. Kondensaattorin sen levyn varaus on $+q$, johon positiivinen virta tuo varausta, jolloin $I = dq/dt$.




Kuva 8.2: Vaimeneva värähtely RCL-piirissä. Katkoviivoilla on piirretty vaimennusfunktion $\pm exp(-Rt/2L)$ kuvaaja.

vain jakautuu sähkö- ja magneettikentän energiaksi (säteilyhäviöitä ei tässä oteta huomioon).

Kondensaattorin varaus alkaa aluksi purkautua käämin kautta. Itseinduktion takia tämä ei tapahdu silmänräpäyksessä. Induktiovirta kulkee myös sen hetken jälkeen, jolloin kondensaattorin varaus on nolla. Virta kulkee samaan suuntaan kunnes levyjen varaukset ovat alkutilaan nähden vastakkaismerkkiset. Sen jälkeen kondensaattorin varaus alkaa taas purkautua jne.

Todellisessa piirissä on aina jonkin verran resistanssia. Laskenta on suoraviivaista differentiaaliyhtälöiden käsittelyä eikä sitä käydä tässä läpi. Esimerkiksi (HT) sopii tilanne, jossa piiriin kytketään tasajännite $V$ hetkellä $t = 0$, ja kondensaattori on alkuhetkellä varaamaton. Piirin virta on silloin

$$I(t) = (V_0/\omega L)e^{-Rt/(2L)} \sin \omega t \tag{8.25}$$

missä $\omega = \sqrt{1/LC - (R/(2L))^2}$. Kulmataajuus $\omega$ voi tässä tapauksessa olla imaginaarinen, mutta joka tapauksessa piirin virta vaimenee eksponentiaalisesti. Kuvassa 8.2 on esitetty tilanne, jossa $\omega$ on reaalinen. Tässä vaiheessa kannattaa myös miettiä, mitä virralle tapahtuu kondensaattorissa.

## 8.4 Epälineaariset energiahäviöt

Poiketaan nyt ferromagnetismiin energianäkökulmasta. Todellinen makroskooppinen ferromagneetti käyttäytyy huomattavasti molekyylitasoa rakeisempana. Aine koostuu ferromagneettisista alueista, jotka ovat magnetoituneet eri suuntiin ja joiden välillä on suuruusluokkaa 100 atomin paksuisia seiniä. Kun nämä alueet järjestyvät uudelleen ulkoisen kentän muuttuessa, syntyy energiaa kuluttavaa kitkaa. Tarkasteltaessa aiemmin sähkömagneettista energiaa väliaineet oletettiin lineaarisiksi. Ferromagneettinen aine on kuitenkin epälineaarista ja eteen tulee kysymys, mitä tapahtuu, kun hystereesisilmukkaa kierretään ympäri. Tarkastellaan virtapiiriä, jonka muodostaa ferromagneettisen aineen ympärille kierretty kela ($N$ kierrosta), johon ulkoinen energialähde syöttää virtaa.

Jos magneettivuo kelan läpi muuttuu tekijällä $\delta\Phi$, niin ulkoinen energianlähde tekee sähkömotorista voimaa vastaan työn

$$\delta W_b = NI\delta\Phi \tag{8.26}$$

Ajatellaan ferromagneetti pätkäksi magneettista silmukkaa eli aluetta, jossa magneettikenttä poikkeaa nollasta. Tällöin kelan kohdalla Ampèren kiertosäännön mukaan $NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$. Merkitsemällä magneettisen silmukan pinta-alaa $d\mathbf{l}$:n kohdalla $A$:lla saadaan

$$\delta W_b = \oint \delta\Phi\, \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A\, \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dl = \int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dV \tag{8.27}$$

Mikäli ferromagneetti käyttäytyy palautuvasti, saadaan systeemin magneettinen energia integroimalla magneettivuon tiheys arvosta $\mathbf{B} = 0$ lopulliseen arvoonsa. Lineaariselle aineelle tulos on tuttu

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, dV \tag{8.28}$$

Lauseke 8.27 on kuitenkin yleisempi ja soveltuu myös hystereesitilanteeseen. Magneettikentän muutosta vastaava työ yksikkötilavuudessa on

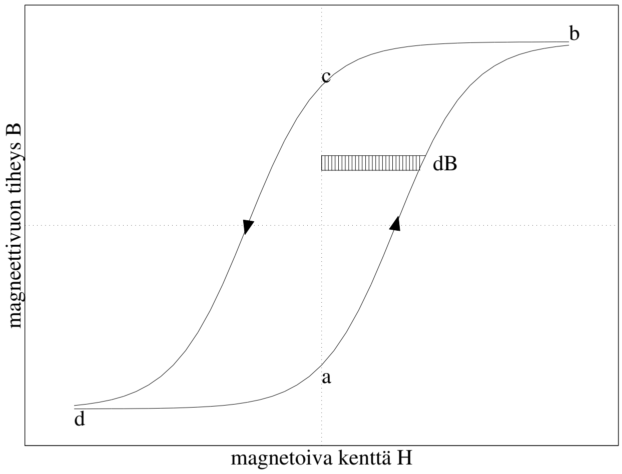
$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{8.29}$$

Tarkastellaan nyt hystereesisykliä, joka alkaa $H$:n arvosta 0, kasvaa arvoon $H_{max}$, pienenee arvoon $-H_{max}$ ja palaa sen jälkeen takaisin nollaan (kuva 8.3). Työ pisteestä $a$ pisteeseen $b$

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H\, dB \tag{8.30}$$

on hystereesikäyrän $ab$ ja $B$-akselin välinen pinta-ala ja se on positiivinen, koska sekä $H$ että $dB$ ovat positiivisia. Vastaavasti $(w_b)_{bc}$ on $B$-akselin ja käyrän $bc$ välinen pinta-ala, mutta se pitää laskea negatiivisena, koska $dB < 0$. Samoin lasketaan työ negatiivisilla $H$ ja lopputuloksena yhden hystereesisyklin myötä tehty työ on silmukan sisään $BH$-tasossa jäävä pinta-ala

$$w_b = \oint H\, dB \tag{8.31}$$




Kuva 8.3: Yksikkötilavuutta kohti tehty työ ferromagneettisessa syklissä.

Täyden kierroksen jälkeen ferromagneetin tila on sama kuin alussa, joten sen magneettinen energia on yhtä suuri kuin aluksi. Ulkoinen energianlähde on kuitenkin tehnyt työtä, joka on kulunut magneettisten alueiden uudelleen järjestäytymiseen. Kyseessä on palautumaton sähkömagneettisen energian häviö lämmöksi. Tämän vuoksi esimerkiksi muuntaja lämpenee. Yleensäkin hystereesihäviöt on tärkeää huomioida rakennettaessa vaihtovirtalaitteita. Ylläoleva lasku tehtiin yhdelle syklille, joten mitä korkeammalla taajuudella laite toimii, sitä nopeammin hystereesi kuluttaa energiaa.

Käytännössä ferromagneettinen sykli on usein mielekkäämpää käsitellä magneettikentän voimakkuuden ja magnetoituman avulla. Tämä onnistuu seuraavasti ($\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$):

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H\, dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \tag{8.32}$$

Termi $\mu_0 H\, dH$ on tyhjössä tehty työ, joka on nolla integroituna kokonaisen syklin yli ja termi $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ on materiaalille ominainen työ. Koko syklin yli työ on siis

$$w_b = \mu_0 \oint H\, dM = -\mu_0 \oint M\, dH \tag{8.33}$$

missä on käytetty hyväksi lauseketta $d(MH) = H\, dM + M\, dH$. Kokonaisdifferentiaalin $d(MH)$ integraali on nolla riippumatta aineen ominaisuuksista.

## 8.5 Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin

Siirretään virtapiirijärjestelmän yhtä silmukkaa matka $d\mathbf{r}$. Oletetaan, että silmukoissa kulkevat virrat säilyvät ennallaan. Tällöin siirroksessa tehty työ on $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, joka koostuu kahdesta osasta:

$$dW = dW_b - dU \tag{8.34}$$

missä $dU$ on magneettisen energian muutos ja $dW_b$ on ulkoisten lähteiden tekemä työ, jotta virrat pysyvät vakioina.

Eliminoidaan $dW_b$ olettamalla silmukat jälleen jäykiksi ja väliaine lineaariseksi. Magneettisen energian muutos on

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i \, d\Phi_i \tag{8.35}$$

Toisaalta

$$dW_b = \sum_i I_i \, d\Phi_i \tag{8.36}$$

joten $dW_b = 2\,dU$ ja $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ eli voima saadaan energian gradienttina olettaen virrat vakioiksi

$$\mathbf{F} = \nabla U \Big|_I \tag{8.37}$$

Usein tilanne on sellainen, että virtapiirin liike rajoittuu kiertymiseen jonkin akselin ympäri. Tällöin $dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$, missä $\boldsymbol{\tau}$ on magneettinen vääntömomentti ja $d\boldsymbol{\theta}$ on kiertymän kulmaelementti. Vääntömomentti akselin $i$ suhteen on siten

$$\tau_i = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right)_I \tag{8.38}$$

Tarkasteltu tilanne on siis samantapainen kuin luvussa 4.4, jossa johdesysteemi pidettiin vakiopotentiaalissa ulkoisen jännitelähteen avulla.

Joissain tapauksissa virtapiirien läpi kulkeva magneettivuo voidaan olettaa vakioksi. Tällaisiin tilanteisiin joudutaan tarkasteltaessa hyvin johtavia väliaineita kuten suprajohteita tai täysin ionisoitunutta harvaa plasmaa. Tällöin mikään ulkoinen lähde ei tee työtä eli $dW_b = 0$ ja

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU \tag{8.39}$$

Nyt voiman ja vääntömomentin komponentit saadaan derivoimalla $-U$:ta pitäen $\Phi$ vakiona, mikä vastaa sähköstatiikassa vapaiden johteiden systeemiä.

Sovellusesimerkki on avaruusaluksen asennonsäätö. Maapallon magneettikentän vaikutuksen alaisena olevaan satellittiin rakennetaan kelajärjestelmä. Kun satelliittia halutaan kääntää, ajetaan keloihin sellaiset virrat, että satelliitti kääntyy haluttuun kulmaan magneettikenttään nähden. Menetelmän etuna on se, että operaatio voidaan tehdä aurinkoenergian avulla; haittana taas kentän pienuudesta johtuva vääntömomentin heikkous ja siten operaation hitaus.

### Esimerkki. Kahden virtasilmukan välinen voima

Palataan magnetostatiikan alkuun, missä kerrottiin Ampèren empiirisestä lausekkeesta voimalle kahden virtasilmukan välillä (5.27). Lasketaan sama tulos tämän luvun keinoin. Nyt on oltava tarkkana, sillä energian lauseketta $(\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2)$ on derivoitava silmukoiden välisen keskinäisen etäisyyden suhteen. Selvintä on määritellä $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{x}_2$, jolloin $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ on silmukoiden välinen keskinäinen etäisyys, josta systeemin magneettinen energia riippuu (silmukoiden oletetaan säilyttävän muotonsa ja suuntautumisensa). Koska vain keskinäisinduktanssi riippuu $\mathbf{R}$:stä, niin silmukoiden välinen magneettinen voima on

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = I_1I_2\nabla_{\mathbf{R}}M(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\nabla_{\mathbf{R}}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\nabla_{\mathbf{R}}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \tag{8.40}$$

Nyt derivointi voidaan viedä integrointien ohitse:

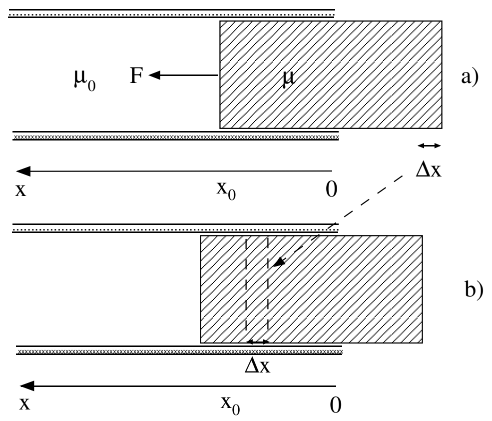
$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2} d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2\frac{\mathbf{R} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{R} + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} = -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2} d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{8.41}$$

Ensi silmäyksellä näyttää kuin olisi saatu eri tulos kuin aiemmin. Näin ei ole, minkä osoittaminen jää harjoitustehtäväksi. Voiman lausekkeesta nähdään välittömästi, että voiman ja vastavoiman laki pätee umpinaisille virtasilmukoille.

### Esimerkki. Tanko solenoidin sisällä

Luvussa 4 arvioitiin levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin kohdistuva voima. Tutkitaan nyt solenoidin sisällä olevaa tankoa, jonka poikkipinta-ala on $A$ ja permeabiliteetti $\mu$. Olkoon solenoidin pituus $l$ ja olkoon sitä kierretty $N$ kierrosta johteella, jossa kulkee vakiovirta $I$. Vedetään tankoa ulos solenoidista kunnes siitä on enää puolet sisällä ja lasketaan tankoon vaikuttava voima (kuva 8.4).

Ongelma olisi aika vaikea, jos kysyttäisiin alkuperäisen tai lopullisen tilanteen todellista magneettista energiaa, koska silloin olisi huomioitava reunojen vaikutukset. Koska voima on energian gradientti, sen määrittämiseksi riittää tarkastella kahden eri tilan eroa. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista lyhyttä siirrosta. Kuvien a) ja b) välinen ero on, että pituusalkio $\triangle x$ on siirretty kentän ulkopuolisesta osasta solenoidin sisään, kun taas hankalan reunan kohdalla kaikki näyttää samalta molemmissa tilanteissa. Koska




Kuva 8.4: Solenoidiin työnnettyyn tankoon vaikuttava voima.

**H**-kenttä on lähes pitkittäinen alueessa $\triangle x$ ja koska **H**-kentän tangentiaalikomponentti on jatkuva sauvan sylinterinmuotoisen reunan yli, voidaan magneettinen energia laskea lausekkeesta

$$U = \frac{1}{2}\int \mu H^2 \, dV \tag{8.42}$$

missä **H** on vakio sauvan sisä- ja ulkopuolella, koska $I$ on vakio. Siirroksen jälkeen energia on

$$\begin{aligned} U(x_0 + \triangle x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{2}\int_{A\triangle x} (\mu - \mu_0) H^2 \, dV \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2}{l^2} A \triangle x \end{aligned} \tag{8.43}$$

Voimalle saadaan arvio

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2}\chi_m \mu_0 H^2 A \tag{8.44}$$

Voima osoittaa $x$:n positiiviseen suuntaan eli vetää sauvaa solenoidiin, jos $\chi_m > 0$.

## 8.6 Maxwellin jännitystensori magnetostatiikassa

Tarkastellaan aluetta $V$, jossa on stationaarinen virrantiheys $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Oletetaan lisäksi, että alueessa on vain tavallista ainetta, jolle $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Tilavuusalkioon $dV$ kohdistuva magneettinen voima on Lorentzin lain mukaan

$\mathbf{dF} = (\rho dV)\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$, joten voimatiheys on $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H}$. Ampèren lain mukaan $\mathbf{f} = \mu_0(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$ ja komponenteittain (HT)

$$f_i = \mu_0 \sum_{j=1}^{3} H_j \partial_j H_i - \frac{1}{2}\mu_0 \partial_i \mathbf{H}^2 \tag{8.45}$$

Otetaan mallia sähköstatiikasta ja määritellään magnetostaattinen Maxwellin jännitystensori

$$T_{ij}^{(m)} = B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \tag{8.46}$$

jolloin

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \partial_j T_{ij}^{(m)} \tag{8.47}$$

Edelleen sähköstatiikan analogian perusteella saadaan kokonaisvoima

$$\mathbf{F} = \int_{\partial V} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\ dS) = \mathbf{F}^S \tag{8.48}$$

Pintavoima $\mathbf{F}^S$ voidaan osoittaa ekvivalentiksi voiman $\mathbf{F}$ kanssa samalla tavalla kuin sähköstatiikassa (HT). Seuraavassa luvussa opitaan, että staattisille kentille määritelty jännitystensori sopii myös ajasta riippuvaan tilanteeseen samanmuotoisena.

# Luku 9

# Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa elektrodynamiikan peruspilarit sillä tasolla, jolla ne tunnettiin 1860-luvun alussa. Maxwell huomasi yhtälöissä piilevän teoreettisen ongelman: Mitä tapahtuu, jos varaustiheys ja siten sähkökenttä muuttuvat ajallisesti? Ampèren laki pätee vain staattiselle systeemille ja ottamalla siitä divergenssi nähdään, että $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Varaustiheyden muuttuessa ajallisesti pitäisi kuitenkin jatkuvuusyhtälön $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ olla voimassa.

## 9.1 Siirrosvirta

Kuvan 9.1 mukaisessa ajatuskokeessa varataan kondensaattoria sähkövirralla $I$. Ampèren lain mukaan

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = I \tag{9.1}$$

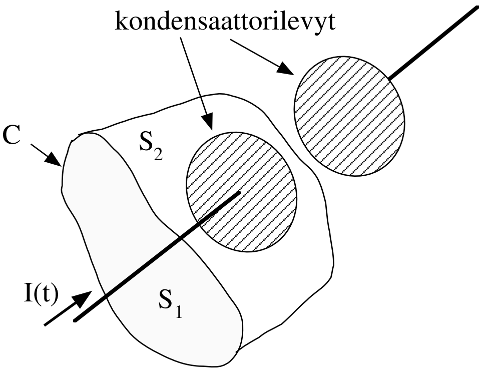
missä $S_1$ on pinta, jonka läpi virta $I$ kulkee. Nyt kuitenkaan mikään ei määrää, missä silmukan $C$ rajoittaman yhdesti yhtenäisen pinnan tulisi olla. Pinnaksi voidaan valita myös kondensaattorin levyjen välisen alueen kautta piirretty pinta $S_2$, joka ei leikkaa virtaa missään ja

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{9.2}$$

Molemmat integraalit ovat matemaattisesti oikein, joten ongelma on puutteellisesti ymmärretyssä fysiikassa. Ratkaisu on siinä, että virta $I$ tuo varausta kondensaattorin levylle eikä varaus poistu systeemistä samaan tahtiin. Virralla on siis divergenssiä pintojen $S_1$ ja $S_2$ rajaamassa tilavuudessa.

Lähdetään liikkeelle varauksen jatkuvuusyhtälöstä

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{9.3}$$




Kuva 9.1: Ampèren laki varattaessa kondensaattoria. Pinta $S_1$ on kondensaattorin ulkopuolella, kun taas pinta $S_2$ kulkee levyjen välistä. Pinnoilla on yhteinen reunakäyrä $C$.

Varaustiheys voidaan ilmaista Gaussin lain avulla:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{9.4}$$

joten jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{9.5}$$

Maxwellin oivallus oli korvata virrantiheys Ampèren laissa ylläolevalla sulkulausekkeella ja tuloksena oli neljäs Maxwellin laeista

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.6}$$

jota voi hyvällä syyllä kutsua **Ampèren ja Maxwellin laiksi**. Termiä $\partial\mathbf{D}/\partial t$ kutsutaan kentänmuutosvirraksi, kenttävirraksi tai **siirrosvirraksi**.

Maxwellin idea siirrosvirrasta oli puhtaasti teoreettinen, sillä sen vaikutus on niin pieni, että mikään tuolloinen mittaus ei ollut ristiriidassa Ampèren lain kanssa. Siirrosvirta alkaa olla verrattavissa johtavuusvirtaan vasta, kun $\omega\epsilon/\sigma > 0.01$ eli johteiden tapauksessa taajuuksien on oltava erittäin korkeita. Eristeissä tilanne on toinen ja jo tavallisessa 50 Hz vaihtovirtapiirissä olevan kondensaattorin läpi kulkeva virta on siirrosvirtaa. Kondensaattorin sisäistä virtaa ei tosin useinkaan tarvitse tarkastella virtapiirianalyysissä, kuten RCL-piiriä koskeneessa esimerkissä. Koska siirrosvirta tulee tyypillisesti näkyviin vasta suurilla taajuuksilla, se liittyy sähkömagneettiseen aaltoliikkeeseen luonnollisella tavalla. *Hertz* todensi vuonna 1888 siirrosvirran olemassaolon tutkiessaan sähkömagneettisia aaltoja. Tällöin myös Maxwellin alunperin teoreettinen oivallus sai kokeellisen perustan.

Varauksen jatkuvuusyhtälö seuraa nyt Ampèren ja Maxwellin laista yhdessä Gaussin lain kanssa, joten sitä ei tarvitse ottaa erillisenä mukaan. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että varauksen säilymislaki seuraisi Maxwellin yhtälöistä, vaan sitä, että annetussa tilavuudessa varauksen ajallinen muutos kompensoituu alueeseen tulevalla tai siitä poistuvalla sähkövirralla, koska varaus säilyy.

## 9.2 Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa koko Maxwellin yhtälöiden ryhmä

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Tässä lähdetermeinä ovat ulkoiset (”vapaat”) varaukset $\rho$ ja ulkoiset (”vapaat”) virrat $\mathbf{J}$. Sidotut varaukset ja virrat on kätketty kenttiin $\mathbf{D}$ ja $\mathbf{H}$. Mikäli kyseessä on tyhjöä monimutkaisempi väliaine, tarvitaan lisäksi rakenneyhtälöt $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

Yhtälöryhmä 9.7 ei kuitenkaan ole sen yleisempi tai rajoitetumpi kuin ”tyhjömuodossa” kirjoitettu yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.8}$$

missä $\rho$ ja $\mathbf{J}$ kuvaavat *kaikkia* varauksia ja virtoja. Esitysmuoto 9.7 on joitain merkintöjä vaille sama, jossa Maxwell itse esitti yhtälönsä. Muotoa 9.8 voi kuitenkin pitää jossain mielessä perustavampana, koska se ei ota mitään kantaa mahdollisen väliaineen sähköisiin tai magneettisiin ominaisuuksiin.

Vaikka usein puhutaan neljästä Maxwellin yhtälöstä, yhtälöryhmässä 9.8 on kuitenkin 8 yhtälöä (2 skalaariyhtälöä ja 6 vektoriyhtälöiden komponenttia). Yhtälöryhmä on lineaarinen, joten ratkaisuille pätee yhteenlaskuperiaate. Mikäli lähdetermit $\rho$ ja $\mathbf{J}$ tunnetaan, on jäljellä 6 tuntematonta ja yhtälöryhmä riittää $\mathbf{E}$:n ja $\mathbf{B}$:n määrittämiseen. Jos etsitään itsekonsistentteja ratkaisuja, tuntemattomia on 10 kpl ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ ja $\rho$), joten tarvitaan lisätietoa. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi Ohmin laki ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$). Differentiaaliyhtälöitä ratkottaessa myös reunaehdot täytyy määrittää oikein.

## 9.3 Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla

Luvuissa 3 ja 6 käsiteltiin staattisten sähkö- ja magneettikenttien reunaehtoja kahden aineen rajapinnalla. Magneettivuon tiheydelle saatiin yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ normaalikomponentin jatkuvuusehto, joka pätee edelleen:

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{9.9}$$

Sähköstaattisen yhtälön $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ sijasta on käytettävä Faradayn lakia

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9.10}$$

Tehdään samanlainen suorakulmainen silmukka kuin luvussa 3 ja integroidaan silmukan sulkeman pinnan yli:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{9.11}$$

Sovelletaan Stokesin teoreemaa lausekkeen ja lasketaan viivaintegraalit:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_1 E'_{1n} - h_2 E'_{2n} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{9.12}$$

missä $l$ on silmukan pituus rajapinnan suunnassa, $h_1$ ja $h_2$ ovat silmukan etäisyydet rajapinnasta kummankin väliaineen puolella ja $E_{in}$ ja $E'_{in}$ ottavat huomioon, että normaalikomponentit saattavat poiketa toisistaan eri päissä. Kun silmukan korkeus litistetään mitättömäksi, häviävät sähkökentän normaalikomponentteja sisältävät termit ja samoin yhtälön oikea puoli, jos $\partial \mathbf{B}/\partial t$ pysyy äärellisenä. Jäljelle jää sama jatkuvuusehto kuin statiikassa:

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{9.13}$$

Sähkövuon tiheyden normaalikomponentin reunaehto on monimutkaisempi, koska nyt pintavaraustiheys voi muuttua. Sekaannusten välttämiseksi merkitään johtavuutta $\sigma$:lla ja pintavaraustiheyttä $\sigma_s$:llä. Yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ saadaan pillerirasialla samannäköinen tulos kuin sähköstatiikassa:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_s \tag{9.14}$$

missä $D_n = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ ja pinnan normaalivektori $\mathbf{n}$ osoittaa aineesta 1 aineeseen 2. Toisaalta varaustiheyden muutosta kontrolloi jatkuvuusyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.15}$$

josta seuraa analogisesti

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} \tag{9.16}$$

Sovelletaan tätä yksinkertaiseen aaltoliikkeeseen eli oletetaan sähkökentän olevan muotoa $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$. Tällöin voidaan korvata $\partial/\partial t \to -i\omega$. Olettamalla lineaarinen väliaine ja käyttämällä rakenneyhtälöitä $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ja $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ voidaan $D_n$:n ja $J_n$:n reunaehdot kirjoittaa yhtälöparina

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} &= \sigma_s \\ \sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} &= i\omega\sigma_s \end{aligned} \tag{9.17}$$

Jos pintavaraustiheys häviää, on oltava $\epsilon_1/\sigma_1 = \epsilon_2/\sigma_2$, mikä voidaan saada aikaan valitsemalla sopivat väliaineet. Yleisesti $\sigma_s$ ei häviä, joten se voidaan ratkaista yhtälöparista ja sähkökentän normaalikomponentille saadaan

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{\sigma_1}{\omega}\right) E_{1n} = \left(\epsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega}\right) E_{2n} \tag{9.18}$$

Tarkasteltaessa **H**-vektorin tangentiaalikomponenttia täytyy kentänmuutosvirta huomioida:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.19}$$

Tangentiaalikomponentin reunehto löytyy jälleen suorakulmaisesta silmukasta. Silmukkaa kutistettaessa oletetaan $\partial\mathbf{D}/\partial t$:n pysyvän äärellisenä, jolloin jäljelle jää magnetostatiikasta tuttu reunaehto

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \tag{9.20}$$

missä $\mathbf{K}$ on pintavirran tiheys ja pinnan normaalivektori $\mathbf{n}$ osoittaa alueesta 1 alueeseen 2. Pintavirran tiheys on nolla, jos väliaineen johtavuus on äärellinen. Siis ellei väliaineen johtavuus ole ääretön, magneettikentän tangentiaalikomponentti on jatkuva.

Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa väliaineen 2 johtavuus on ääretön. Ampèren ja Maxwellin laki väliaineelle 2 on

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \tag{9.21}$$

Olettamalla harmoninen aikariippuvuus $e^{-i\omega t}$ ja käyttämällä rakenneyhtälöitä saadaan

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2 \tag{9.22}$$

Jos $\nabla \times \mathbf{H}_2$ on rajoitettu, niin ehto $\sigma_2 \to \infty$ edellyttää, että $\mathbf{E}_2 = 0$. Olettaen myös $\mathbf{H}_2$:n aikariippuvuus harmoniseksi Faradayn laki ja lineaarinen rakenneyhtälö $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ antavat

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \tag{9.23}$$

ja siten myös $\mathbf{H}_2$ häviää. Tämä kaikki tarkoittaa sitä, että sähkömagneettinen aalto ei etene äärettömän hyvään johteeseen.

## 9.4 Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä

Periaatteessa koko elektrodynamiikka on nyt hallinnassa. Kurssin alkuosassa tuli kuitenkin esille ongelmia liikemäärän ja liikemäärämomentin säilymislakien kanssa. Samoin jäi epäselväksi, mille oliolle esimerkiksi sähköstaattinen energia oikein kuuluu.

### 9.4.1 Poyntingin teoreema: energian säilyminen

Sähkömagneettisessa kentässä liikkuvaan yksittäiseen varaukselliseen hiukkaseen vaikuttaa Lorentzin voima $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Mekaniikassa on opittu, että voima tekee työtä teholla $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, joten hiukkasen mekaanisen energian muutosnopeuden määrää sähkökenttä, koska magneettikenttä ei tee työtä:

$$\frac{dW_{mek}}{dt} = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} \tag{9.24}$$

Muita kuin sähkömagneettisia voimia ei tässä yhteydessä oteta huomioon. Yleistys jatkuvalle virrantiheydelle alueessa $V$ antaa hiukkassysteemin mekaanisen energian muutosnopeudeksi

$$\frac{dW_{mek}}{dt} = \int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\, dV \tag{9.25}$$

Aletaan muokata pistetuloa $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ käyttäen Maxwellin yhtälöitä väliainemuodossa. Ampèren ja Maxwellin laki antaa

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{9.26}$$

Oikean puolen ensimmäinen termi houkuttelee käyttämään tulon derivoimiskaavaa $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}$, josta Faradayn lakia käyttäen tulee

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} \tag{9.27}$$

Tähän mennessä on siis saatu

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - (\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}) \tag{9.28}$$

Oletetaan väliaine lineaariseksi ja isotrooppiseksi, jolloin

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{9.29}$$

Statiikassa opitun perusteella on luonnollista tulkita, että jälkimmäisen sulkulausekkeen sisällä on **sähkömagneettisen kentän energiatiheys**

$$w_{em} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} \tag{9.30}$$

Kun vielä määritellään **Poyntingin vektori**

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{9.31}$$

saadaan **Poyntingin teoreema** differentiaalimuodossa jatkuvuusyhtälönä

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{9.32}$$

Tulkintaa helpottaa vertailu varauksen jatkuvuusyhtälöön $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, joka seuraa varauksen säilymislaista. Poyntingin teoreema on siis hiukkasten *ja* kentän muodostaman systeemin energian säilymislaki. Sähkömagneettista kenttää voidaan siis pitää itsenäisenä fysikaalisena oliona. Tämä tulkinta vahvistuu muiden säilymislakien yhteydessä. Termi $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ ilmaisee sen, että kenttä ja hiukkaset voivat vaihtaa energiaa keskenään.

Integroimalla jatkuvuusyhtälö alueen $V$ yli ja käyttämällä divergenssiteoreemaa saadaan Poyntingin teoreema havainnolliseen integraalimuotoon

$$\frac{d}{dt}(W_{mek} + W_{em}) = -\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{dA} \tag{9.33}$$

Tämän perusteella voidaan kvalitatiivisesti ajatella, että Poyntingin vektori ”kuljettaa energiaa” (yksikkö on $J/(m^2 s)$ eli energiavuon yksikkö). Tällainen tulkinta johtaa kuitenkin erikoiselta vaikuttaviin tilanteisiin yksinkertaisissakin esimerkeissä, kuten tasavirtajohtimessa.

Ei ole itsestään selvää, että Poyntingin vektorin ”oikea” lauseke on 9.31. Poyntingin teoreeman differentiaalimuodon perusteella vektoriin $\mathbf{S}$ voitaisiin lisätä roottorikenttä. Monimutkaisempiakin muunnelmia on olemassa, mutta silloin myös energiatiheyden lauseketta on muutettava. Oleellista on, että energian säilymislain muoto ei muutu. Pohjimmiltaan kyse on siitä, ettei sähkömagneettisen kentän energiaa voida paikallistaa.

### 9.4.2 Maxwellin jännitystensori

Palataan kuvan 5.3 tilanteeseen: rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymislakia? Vastaus on kielteinen. Ratkaisu on siinä, että sähkömagneettisella kentällä on energian lisäksi **liikemäärää**. Säilyvä suure on hiukkasten *ja* kenttien yhteenlaskettu liikemäärä.

Oletetaan väliaine tyhjön kaltaiseksi. Kaikkien tilavuudessa $V$ olevien hiukkasten liikemäärien summa $\mathbf{p}_{mek}$ noudattaa Newtonin toista lakia

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} = \int_V \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dV = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})\, dV \tag{9.34}$$

joten voimatiheys on

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{9.35}$$

Eliminoidaan $\rho$ ja $\mathbf{J}$ Maxwellin yhtälöiden avulla, jolloin

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} \tag{9.36}$$

Nyt

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \tag{9.37}$$

missä viimeisessä termissä on käytetty Faradayn lakia. Voimatiheys on siten

$$\mathbf{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{9.38}$$

Lauseke saadaan symmetrisemmäksi lisäämällä termi $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/\mu_0$, joka on aina nolla. Kenttien roottorilausekkeet voi kirjoittaa auki kaavalla (HT)

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \tag{9.39}$$

ja samoin $\mathbf{B}$:lle. Näin voimatiheys on saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{9.40}$$

Tämä siistiytyy määrittelemällä **Maxwellin jännitystensori** $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_{ij} = \epsilon_0\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right) \tag{9.41}$$

Tensorin $\mathcal{T}$ divergenssi on vektori, jonka komponentit ovat

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathcal{T})_j &= \epsilon_0\left[(\nabla \cdot \mathbf{E})E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla \cdot \mathbf{B})B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right] \end{aligned} \tag{9.42}$$

Nämä ovat Poyntingin vektorin aikaderivaattaa vaille voimatiheyden komponentit, joten

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathcal{T} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \tag{9.43}$$

Integroidaan tämä tilavuuden $V$ yli ja kirjoitetaan jännitystensorista riippuva osa pintaintegraaliksi. Tällöin kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n}\, da - \epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_V \mathbf{S}\, dV \tag{9.44}$$

Staattisessa tilanteessa sähkömagneettinen kokonaisvoima määräytyy jännitystensorista pelkästään tarkasteltavan alueen reunalla. Siis $\mathcal{T}$ laskettuna alueen reunalla jotenkin sisältää voimien kannalta olennaisen tiedon kentistä koko alueessa. Voimien laskeminen jännitystensorista ei rajoitu elektrodynamiikkaan. Mekaniikasta tuttu energia-impulssitensori on formaalisti samanlainen otus, yleinen suhteellisuusteoria formuloidaan Einsteinin tensorin avulla jne.

### 9.4.3 Liikemäärän ja liikemäärämomentin säilyminen

Palataan sitten liikemäärän säilymiseen. Newtonin toisen lain mukaan hiukkaseen vaikuttava voima on yhtä suuri kuin sen liikemäärän aikaderivaatta:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} \tag{9.45}$$

missä alaindeksi $mek$ viittaa mekaaniseen liiketilan muutokseen. Toisaalta

$$\frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n}\, da - \epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_V \mathbf{S}\, dV \tag{9.46}$$

Tämän voi tulkita samaan tapaan kuin Poyntingin teoreeman. Oikean puolen ensimmäinen termi kertoo liikemäärän virtauksen aikayksikössä pinnan $\partial V$ läpi ja jälkimmäinen termi puolestaan kenttiin kertyneen liikemäärän muutoksen. Siis **sähkömagneettisen kentän liikemäärä** on

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon_0\mu_0 \int_V \mathbf{S}\, dV \tag{9.47}$$

Yhteenlasketun sähkömagneettisen ja mekaanisen liikemäärän muutos vastaa tarkastelualueeseen kenttien mukanaan tuomaa liikemäärää.

Olkoon $\hat{p}_{mek}$ mekaaninen liikemäärätiheys. Määritellään vastaavasti sähkömagneettisen kentän **liikemäärätiheys**

$$\hat{p}_{em} = \epsilon_0\mu_0\mathbf{S} \tag{9.48}$$

Tällöin liikemäärän säilyminen voidaan ilmaista differentiaalimuodossa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{p}_{mek} + \hat{p}_{em}) = \nabla \cdot \mathcal{T} \tag{9.49}$$

Todetaan vielä lopuksi, että sähkömagneettisella kentällä on myös **liikemäärämomenttia** eli impulssimomenttia. Sen tiheys määritellään

$$\hat{l}_{em} = \mathbf{r} \times \hat{p}_{em} = \epsilon_0\mu_0\mathbf{r} \times \mathbf{S} \tag{9.50}$$

Myös kokonaisimpulssimomentti on säilyvä suure.

## 9.5 Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet

### 9.5.1 Aaltoyhtälö tyhjössä

Siirrosvirtatermin ansiosta Maxwellin yhtälöillä on ratkaisunaan **sähkömagneettinen aaltoliike**. Tarkastellaan tilannetta ensiksi tyhjössä ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Ottamalla roottori Ampèren ja Maxwellin laista saadaan

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{9.51}$$

josta kirjoittamalla vasemman puolen roottorit auki ja käyttämällä magneettikentän lähteettömyyttä saadaan aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{9.52}$$

Ottamalla puolestaan roottori Faradayn laista ja huomioimalla, että sähkökentälläkään ei ole tyhjössä lähteitä, saadaan sähkökentälle sama yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{9.53}$$

Tällainen aalto etenee nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ eli valon nopeudella.

### 9.5.2 Potentiaaliesitys

Ratkaistaan Maxwellin yhtälöt, kun kenttien lähteet $\rho$ ja $\mathbf{J}$ oletetaan tunnetuiksi. Rajoitutaan tyhjönkaltaiseen väliaineeseen ($\epsilon_0$, $\mu_0$), josta siirtyminen lineaariseen väliaineeseen on suoraviivaista. Tehokkainta on käyttää skalaari- ja vektoripotentiaaleja $\phi$ ja $\mathbf{A}$. Yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ seuraa, että magneettivuon tiheys voidaan esittää muodossa $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sijoittamalla tämä Faradayn lakiin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \tag{9.54}$$

Fysikaalisen siisteille kentille aika- ja paikkaderivaattojen järjestyksen voi vaihtaa, joten

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{9.55}$$

eli voidaan kirjoittaa $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t = -\nabla \varphi$. Sähkökenttä on siis muotoa

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{9.56}$$

eli sähköstaattisen potentiaalin lisäksi Faradayn laki tuo vektoripotentiaalin aikamuutoksesta johtuvan osuuden sähkökenttään.

Näin kenttien kuusi komponenttia on ilmaistu neljän muuttujan ($\varphi$, $\mathbf{A}$) avulla. Tähän on tarvittu neljä Maxwellin yhtälöiden kahdeksasta skalaarikomponentista, joten jäljellä on neljä yhtälöä neljän tuntemattoman ratkaisemiseen. Coulombin ja Ampèren ja Maxwellin lait saadaan muotoon

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0 \tag{9.57}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{9.58}$$

Pahan näköiselle yhtälöryhmälle löytyy käteviä ratkaisumenetelmiä.

Koska kentät **B** ja **E** muodostuvat potentiaalien derivaatoista, voidaan potentiaaleihin lisätä sellaisia tekijöitä, jotka katoavat derivoitaessa. On helppo nähdä, että seuraava muunnos ei vaikuta kenttiin:

$$\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \tag{9.59}$$

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t \tag{9.60}$$

Näitä **mittamuunnoksia** käsitellään tarkemmin luvussa 9.6. Yksi tapa säilyttää alkuperäiset kentät on käyttää **Lorenzin mittaehtoa**[1]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{9.61}$$

Jäljellä olevat yhtälöt yksinkertaistuvat **epähomogeenisiksi aaltoyhtälöiksi**

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\rho/\epsilon_0 \tag{9.62}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{9.63}$$

### 9.5.3 Viivästyneet potentiaalit

Löydettiin siis neljä karteesisissa koordinaateissa toisistaan riippumatonta samanmuotoista skalaariyhtälöä, joten riittää tarkastella yhtälöä $\varphi$:lle. Staattisessa tapauksessa kyseessä olisi Poissonin yhtälö, jonka ratkaisuja ovat Laplacen yhtälön yleiset ratkaisut sekä jokin Poissonin yhtälön erikoisratkaisu.

Ratkaistaan aaltoyhtälö ensin yhdelle varaukselle, joka on sijoitettu origoon. Tällöin homogeeninen aaltoyhtälö

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0 \tag{9.64}$$

pätee kaikkialla muualla kuin origossa. Pallosymmetrian vuoksi $\varphi = \varphi(r)$ ja homogeeninen aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa pallokoordinaatistossa

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = 0 \tag{9.65}$$

Tällä on tutut $\pm r$-suuntiin etenevät ratkaisut

$$r\varphi = f(r - ct) + g(r + ct) \tag{9.66}$$

[1] Kyseessä on todellakin Lorenzin mitta eikä Lorentzin mitta. Lorenz oli tanskalainen ja Lorentz hollantilainen fyysikko.

Näistä $f(r-ct)$ etenee poispäin varauksesta ja $g(r+ct)$ kohti varausta. Koska halutaan ymmärtää varauksen vaikutus ympäristöönsä, tarkastellaan ratkaisua $f$.

On siis löydetty homogeeniselle aaltoyhtälölle pallosymmetrinen ratkaisu

$$\varphi = \frac{f(r-ct)}{r} \tag{9.67}$$

ja nyt on määritettävä funktio $f$. Staattisessa tapauksessa potentiaali on

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{9.68}$$

ja nyt ilmeisesti $q = q(t)$. Kirjoitetaan $f$ ajan funktiona $f(t-r/c)$, missä vakio $-c$ sisältyy määrättävään funktioon itseensä. Hetkellä $t-r/c$ pätee

$$f(t-r/c) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0} \tag{9.69}$$

ja yksittäisen varauksen epähomogeenisella aaltoyhtälöllä on ratkaisu

$$\varphi(r,t) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{9.70}$$

Integroimalla kaikkien varausten yli saadaan

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{9.71}$$

missä

$$t' = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c \tag{9.72}$$

on **viivästynyt aika**. Potentiaalia $\varphi$ kutsutaan **viivästyneeksi skalaaripotentiaaliksi**, koska se huomioi ajan, joka kuluu kustakin pisteestä tarkastelupisteeseen nopeudella $c$ etenevältä signaalilta (HT: piirrä kuva).

HT: Tarkka lukija lienee ihmetellyt ajasta riippuvaa pistevarausta, koska varauksenhan pitäisi säilyä. Millä tavalla ristiriidasta selvitään helpoimmin?

Nyt osataan välittömästi kirjoittaa **viivästynyt vektoripotentiaali**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{9.73}$$

Sähkö- ja magneettikentät saadaan derivoimalla. Käytännössä derivaattojen laskeminen on usein työlästä. Sitä kannattaa kokeilla sijoittamalla potentiaalien integraalilausekkeet takaisin aaltoyhtälöön.

Suppeammassa suhteellisuusteoriassa vektori- ja skalaaripotentiaalien aaltoyhtälöt kootaan nelipotentiaalin $A^\alpha = (\varphi, \mathbf{A})$ aaltoyhtälöksi

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\alpha = -j^\alpha \tag{9.74}$$

missä nelivirran $j^\alpha$ komponentit ovat $(\rho/\epsilon_0,\ \mu_0\mathbf{J})$. Osoittautuu, että Maxwellin yhtälöt ovat Lorentz-kovariantteja[2] eli valmiiksi kelvollisia suhteellisuusteorian pätevyysalueelle.

### 9.5.4 Aaltoyhtälön Greenin funktio[3]

Ratkaistaan aaltoyhtälö käyttämällä luvussa 2.10 esitettyä Greenin funktion ideaa. Sekä $\mathbf{A}$:n että $\varphi$:n aaltoyhtälöt ovat muotoa

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r},t) \tag{9.75}$$

missä $f(\mathbf{r},t)$ on tunnettu lähdetermi. Tehdään sekä $\psi$:lle että $f$:lle Fourier-muunnos ajan suhteen:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\ ;\ f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{9.76}$$

Sijoittamalla nämä aaltoyhtälöön ja merkitsemällä $k = \omega/c$ saadaan Fourier-komponenteille **epähomogeeninen Helmholtzin aaltoyhtälö**

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi(\mathbf{r},\omega) = -4\pi f(\mathbf{r},\omega) \tag{9.77}$$

Tapauksessa $k = 0$ tämä palautuu Poissonin yhtälöksi. Sen Greenin funktion täytyy toteuttaa yhtälö

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{9.78}$$

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on silloin

$$\psi(\mathbf{r},\omega) = \int G_k(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)f(\mathbf{r}',\omega)\,dV' \tag{9.79}$$

johon voidaan lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja.

Koska aaltoyhtälö ratkotaan käytännössä heijastavien reunojen, aaltoputkien jne. yhteydessä, Greenin funktion muoto riippuu ongelman reunaehdoista (vrt. pallo luvussa 2.10). Reunattomassa avaruudessa $G_k$ on pallosymmetrinen ja riippuu ainoastaan tarkastelupisteen ja lähdepisteen etäisyydestä $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, joten pallokoordinaateissa

$$\nabla^2 G_k = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G_k}{\partial R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\,G_k) \tag{9.80}$$

[2] Mitta on Lorenzin, mutta kovarianssi Lorentzin.

[3] Tämä luku kuuluu yleissivistykseen. Perusidea on kuitenkin ymmärrettävä, koska menetelmää tarvitaan myöhemmin laskettaessa liikkuvan varauksen kentät.

Koska $R$ on ainoa muuttuja, voidaan käyttää kokonaisderivaattaa:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(R\,G_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{9.81}$$

Muualla kuin pisteessä $R = 0$ tämä yksinkertaistuu yhtälöksi

$$\frac{d^2}{dR^2}(R\,G_k) + k^2(R\,G_k) = 0 \tag{9.82}$$

jonka ratkaisut ovat

$$R\,G_k = A\,e^{ikR} + B\,e^{-ikR} \tag{9.83}$$

Rajalla $R \to 0$ pätee $kR \ll 1$ ja 9.81 palautuu Poissonin yhtälöksi, jonka ratkaisu käyttäytyy kuten $1/R$. Tämä antaa sidosehdon $A + B = 1$ ja Greenin funktio on muotoa

$$G_k(R) = A\,G_k^+(R) + B\,G_k^-(R) \tag{9.84}$$

missä $G_k^\pm = e^{\pm ikR}/R$. $G_k^+$ kuvaa origosta poispäin etenevää palloaaltoa ja $G_k^-$ origoon tulevaa palloaaltoa. $A$ ja $B$ määräytyvät reunaehdoista ajan suhteen. Jos lähde on hiljaa hetkeen $t = 0$ asti ja alkaa sitten vaikuttaa, ulospäin etenevä ratkaisu $A\,G_k^+$ on fysikaalisesti mielekäs valinta.

Ajasta riippuva Greenin funktio toteuttaa yhtälön

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G^\pm(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \tag{9.85}$$

Koska

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{iwt'}e^{-iwt} \tag{9.86}$$

voidaan lähdetermi yhtälössä 9.78 kirjoittaa muodossa $-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')e^{i\omega t'}$ ja

$$G^\pm(R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R}\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega \tag{9.87}$$

missä $\tau = t - t'$. Äärettömän avaruuden Greenin funktio riippuu siis vain lähteen ja havaitsijan välisestä etäisyydestä $R$ ja aikaerosta $t - t'$. Koska $k = \omega/c$, voidaan $\omega$-integraali laskea (HT) ja lopputulos on

$$G^\pm(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\delta(t' - [t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c]) \tag{9.88}$$

Nyt $G^+$ on **viivästynyt** ja $G^-$ **edistynyt** Greenin funktio.

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on siis

$$\psi^\pm(\mathbf{r},t) = \int\int G^\pm(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') f(\mathbf{r}',t')\, dV' dt' \tag{9.89}$$

johon voi lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja. Viivästyneelle Greenin funktiolle ratkaisu on tietenkin sama kuin edellä suoremmalla laskulla löytynyt ratkaisu. Tässä esitetty menetelmä on kuitenkin yleisempi ja käyttökelpoisempi tarkasteltaessa monimutkaisempia olosuhteita kuin yksinkertaista lähdettä reunattomassa avaruudessa.

## 9.6 Mittainvarianssi

Aaltoyhtälön ratkaisu helpottui valitsemalla sopiva mitta. Tämän teki mahdolliseksi Maxwellin yhtälöiden tärkeä ominaisuus: **mittainvarianssi**. Kenttien potentiaaleja voidaan muuttaa tietyllä yleisellä tavalla ilman, että kentät itse muuttuvat. Elektrodynamiikan mittamuunnokset ovat muotoa

$$\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \tag{9.90}$$

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t \tag{9.91}$$

Funktiota $\Psi$ kutsutaan **mittafunktioksi** ja se voidaan valita usealla eri tavalla. Yksi näistä on edellä käytetty Lorenzin mittaehto

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \tag{9.92}$$

Tällöin mittafunktion $\Psi$ on toteutettava aaltoyhtälö

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{9.93}$$

Jos siis potentiaalit $\mathbf{A}$ ja $\varphi$ eivät toteuttaisi Lorenzin mittaehtoa, niin uudet potentiaalit $\mathbf{A}'$ ja $\varphi'$ toteuttavat sen, jos $\Psi$ voidaan ratkaista aaltoyhtälöstä. Lorenzin mittaehdon toteuttava funktio $\Psi$ on aina olemassa, mutta se ei ole yksikäsitteinen. Mitan etu on, että yhtälöiden Lorentz-kovarianssi näkyy eksplisiittisesti ja tulokset on suoraviivaista siirtää koordinaatistosta toiseen. Käytännön laskut voivat kuitenkin olla hyvin monimutkaisia.

Useissa tapauksissa laskennallisesti yksinkertaisempi vaihtoehto on **Coulombin mitta**, jonka mittaehto on

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \tag{9.94}$$

Vektoripotentiaali saadaan muunnoksella

$$\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{A} \tag{9.95}$$

joka määrittää mittafunktion additiivista vakiota vaille yksikäsitteisesti, jos $\mathbf{A} \rightarrow 0$ ja $\varphi \rightarrow 0$, kun $r \rightarrow \infty$. Coulombin mitassa skalaaripotentiaali ratkaistaan yhtälöstä 9.57

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV' \tag{9.96}$$

Aika ei ole viivästetty, vaan skalaaripotentiaali määräytyy samanaikaisesta varausjakautumasta kaikkialla. Coulombin mitta ei ole Lorentz-kovariantti. Mitta on silti kelvollinen Maxwellin yhtälöille, joten tästä ei seuraa ristiriitaa kenttien **E** ja **B** osalta. Koordinaatistomuunnosten kanssa on kuitenkin oltava tarkkana.

Coulombin mitassa vektoripotentiaali toteuttaa aaltoyhtälön

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{J} \tag{9.97}$$

Oikean puolen ensimmäinen termi on pyörteetön. Helmholtzin teoreeman mukaan vektorikenttä **F** voidaan jakaa pyörteettömään ja lähteettömään osaan:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \ ; \ \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0$$

missä $l$ viittaa pitkittäiseen (longitudinaaliseen, pyörteettömään) ja $t$ poikittaiseen (transversaaliseen, lähteettömään) osuuteen. Käyttämällä virran jatkuvuusyhtälöä aaltoyhtälö saadaan muotoon (ks. esim. *Jackson*)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t \tag{9.98}$$

Koska vektoripotentiaali määräytyy vain virran poikittaisesta komponentista, Coulombin mittaa kutsutaan usein poikittaismitaksi. Se tunnetaan myös nimellä säteilymitta, koska sähkömagneettiset säteilykentät saadaan laskettuksi viivästyneestä vektoripotentiaalista

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_t(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV' \tag{9.99}$$

mikä on olennaisesti helpompaa kuin säteilykenttien laskeminen Lorenzin mitassa. Coulombin mitta erottelee annetussa koordinaatistossa sähkökentän staattiseen ($s$) ja induktiiviseen ($i$) osaan:

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\varphi \ ; \ \mathbf{E}_i = -\partial \mathbf{A}/\partial t \tag{9.100}$$

Klassinen elektrodynamiikka on ensimmäinen esimerkki mittainvarianteista fysiikan perusteorioista. Mittakentän käsitteestä on tullut erittäin keskeinen osa fysiikan perusteorioissa kuten kvanttielektrodynamiikassa, sähköheikon vuorovaikutuksen teoriassa, kvanttikromodynamiikassa ja näitä yhdistävissä yhtenäiskenttäteorioissa. Esimerkkinä olkoon vuoden 1999 Nobelin palkinto, jonka saivat Gerardus t'Hooft ja Martinus Veltman töistään kvanttikromodynamiikan ei-abelisten mittakenttien parissa.

# Luku 10

# Sähkömagneettiset aallot

Sähkömagneettisten aaltojen spektri on erittäin laaja. Esimerkkejä löytyy hyvin matalista taajuuksista aina gammasäteisiin, joiden taajuudet ovat suuruusluokkaa $10^{20} - 10^{22}$ Hz. Aaltoliikkeen merkityksen ymmärtänee vilkaisemalla ympärilleen (HT). Vaikka nyt ollaankin klassisen fysiikan kurssilla, viimeistään tässä vaiheessa on erittäin tärkeää kerrata omatoimisesti aaltohiukkasdualismi.

HT: Onko mielekästä kysyä, onko valo aaltoliikettä vai hiukkasia?

## 10.1 Tasoaallot eristeessä

Eristeellä tarkoitetaan tässä yhteydessä niin huonosti johtavaa väliainetta, ettei sähkönjohtavuutta $\sigma$ tarvitse huomioida ($\omega\epsilon >> \sigma$). Tutkitaan aaltoyhtälön ratkaisua monokromaattiselle aallolle, jolla on nimensä mukaisesti vain yksi taajuus. Tämä tarkoittaa olennaisesti samaa kuin tarkastella aallon Fourier-komponentteja erikseen. Tällöin on hyödyllistä käyttää kompleksilukuesitystä ja kirjoittaa aikariippuvuus muodossa $e^{-i\omega t}$, esimerkiksi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{10.1}$$

Etuna on aikaderivaatan korvautuminen tekijällä $-i\omega$. Kirjallisuudessa on yleisesti käytössä myös aikariippuvuus $e^{+i\omega t}$. Esitykseen liittyy sopimus, että fysikaalinen suure on kompleksisuureen reaaliosa (voitaisiin myös käyttää imaginaariosaa).

Aaltoyhtälö

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{10.2}$$

monokromaattiselle aallolle on

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{10.3}$$

Tämä Helmholtzin yhtälö kuvaa aallon muutosta paikan funktiona. Oletetaan, että kenttä on riippumaton $x$- ja $y$-koordinaateista. Tällöin

$$\frac{d^2\mathbf{E}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(z) = 0 \tag{10.4}$$

Tämä on harmonisen värähtelijän yhtälö, jolla on ratkaisuna

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm ikz} \tag{10.5}$$

missä $\mathbf{E}_0$ on vakio ja $k = \omega/c$ on **aaltoluku**. Aaltoyhtälöllä on siis ratkaisuna

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp kz)} \tag{10.6}$$

jonka reaaliosa on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \mp kz) = \mathbf{E}_0 \cos\omega(t \mp z/c) \tag{10.7}$$

Kyseessä on joko $+z$- tai $-z$-akselin suuntaan nopeudella $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ etenevä siniaalto. Aaltoluku esitetään yleisemmin vektorina $\mathbf{k}$, jolloin aallon paikkariippuvuus on $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Aaltoyhtälön ratkaisu ei välttämättä toteuta Maxwellin yhtälöitä, vaan niistä seuraa lisäehtoja, joihin palataan kohta.

**Kulmataajuuden** $\omega$ yksikkö on radiaania sekunnissa. Vastaava **värähtelytaajuus** on $f = \omega/2\pi$, jonka yksikkö on puolestaan hertsi (Hz). Aaltoluvun yksikkö on $\mathrm{m}^{-1}$ ja vastaava **aallonpituus** on $\lambda = 2\pi/k$. Aallon **vaihenopeus** on $v_p = \omega/k$, joka tyhjössä on sama kuin valon nopeus.

Mikäli väliaineen $\mu$ ja $\epsilon$ poikkeavat tyhjön suureista, vaihenopeus on

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} \tag{10.8}$$

Tällöin taajuuden ja aaltoluvun välinen relaatio eli **dispersioyhtälö** on

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{n}{c}\omega \tag{10.9}$$

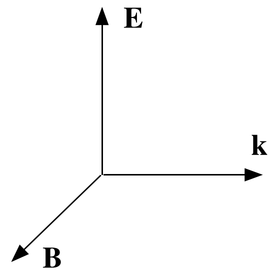
missä on määritelty väliaineen **taitekerroin**

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \tag{10.10}$$

Taitekerroin on tärkeä parametri tarkasteltaessa aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnoilla.

Muotoa $e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ olevia Maxwellin yhtälön ratkaisuja kutsutaan **tasoaalloiksi**. Mikäli yhtälöillä voidaan olettaa olevan tasoaaltoratkaisuja, voidaan myös paikkaderivaatat korvata seuraavasti:

$$\begin{aligned} \nabla &\rightarrow i\mathbf{k} \\ \nabla\cdot &\rightarrow i\mathbf{k}\cdot \\ \nabla\times &\rightarrow i\mathbf{k}\times \end{aligned}$$




Kuva 10.1: Sähkömagneettisen tasoaallon sähkökenttä **E** ja magneettikenttä **B** ovat toisiaan ja etenemissuunnan ilmaisevaa aaltolukuvektoria **k** vastaan kohtisuorassa ja muodostavat oikeakätisen kolmikon (**E**, **B**, **k**).

Tasoaallolle löytyy suunta, jota vastaan kohtisuoralla, mutta muuten mielivaltaisella tasolla aallon vaihe on annetulla hetkellä sama kaikissa tason pisteissä. Kyseisillä tasoilla sähkö- ja magneettikentät ovat vakioita. Vaihenopeus tarkoittaa puolestaan vakiovaiheen ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t=$ vakio) etenemisnopeutta.

Oletetaan, ettei väliaineessa ole vapaita varauksia eikä virtoja. Tasoaalloille saadaan Maxwellin yhtälöistä yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} &= 0\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} &= 0\\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B}\\ \mathbf{k}\times\mathbf{H} &= -\omega\mathbf{D}\end{aligned}\tag{10.11}$$

Tasoaallon kenttävektoreita merkitään joskus lisäämällä niiden päälle hattu ($\hat{\mathbf{E}}$), mutta tässä ei ole sekaannuksen vaaraa muistaen, että nyt aika- ja paikkariippuvuudet ovat eksponenttifunktiossa. Jos on tarpeen erotella tasoaallon vektori vektorista $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, kirjoitetaan edellinen mieluummin $\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)$ tai $\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}$. Myös $\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)$ on yleisesti kompleksivektori.

Oletetaan väliaine lineaariseksi ja kirjoitetaan $\epsilon=\epsilon_r\epsilon_0$. Käytännössä kaikilla lineaarisilla väliaineilla $\mu=\mu_0$ on hyvä approksimaatio. Silloin

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} &= 0\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} &= 0\\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B}\\ \mathbf{k}\times\mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2}\epsilon_r\,\mathbf{E}\end{aligned}\tag{10.12}$$

Vektorit **k**, **E** ja **B** ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja aaltoa kutsutaan **poikittaiseksi** (transversaaliseksi) (kuva 10.1).

Sähkö- ja magneettikentän välinen suhde seuraa Faradayn lakia vastaavasta yhtälöstä: $B = (k/\omega)E$. Aaltoluvun itseisarvo saadaan laskemalla

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \tag{10.13}$$

Toisaalta $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$, joten

$$-\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \tag{10.14}$$

eli dispersioyhtälö saa muodon

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c} = n \frac{\omega}{c} \tag{10.15}$$

Oikea aalto ei välttämättä ole monokromaattinen. Jos aalto koostuu joukosta diskreettejä taajuuksia $\omega_m$, Maxwellin yhtälöiden lineaarisuuden vuoksi kokonaissähkökenttä voidaan esittää summana (kertaa FYMM I:stä)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{E}(\mathbf{k}_m, \omega_m) \exp[-i(\omega_m t - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r})] \tag{10.16}$$

Vektoreita $\mathbf{E}(\mathbf{k}_m, \omega_m)$ kutsutaan aallon Fourier-komponenteiksi. Jos $\mathbf{k}$ ja $\omega$ käsitellään jatkuvina, funktio $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ on $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$:n Fourier-muunnos.

## 10.2 Aaltojen polarisaatio

Peruskurssilta tuttu lineaarinen polarisaatio on helppo käsittää, mutta ympyräpolarisaatio kannattaa miettiä huolellisesti läpi. Asiaa ei lainkaan helpota, että vasen- ja oikeakätisyys määritellään eri lähteissä eri tavoin.

Vektorit $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ ja $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ ovat kompleksivektoreita. Kirjoitetaan $\mathbf{E}$ oikeakätisessä reaalisessa kannassa, jonka yksikkövektorit ovat ($\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{u}$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u} \tag{10.17}$$

missä hattu viittaa kompleksilukuun. Valitaan $\mathbf{u}$ tasoaallon etenemissuunnaksi, jolloin sähkökenttä on joka hetki $ps$-tasossa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \tag{10.18}$$

Ilmaistaan vielä komponentit kompleksitason vaihekulman $\phi$ avulla:

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p} \ ; \ \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \tag{10.19}$$

missä $E_p$ ja $E_s$ ovat reaalilukuja. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan asettaa $\phi_s$ nollaksi, ja merkitä $\phi_p = \phi$. Niinpä $(\mathbf{k}, \omega)$-avaruuden sähkökenttä on

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s} \tag{10.20}$$

ja sitä vastaava $(\mathbf{r}, t)$-avaruuden kenttä puolestaan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad (10.21)$$

Fysikaalinen sähkökenttä on tämän reaaliosa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad (10.22)$$

Kentällä on kaksi komponenttia, joiden reaaliset amplitudit $E_p$ ja $E_s$ voivat olla eri suuria. Lisäksi komponentit voivat värähdellä eri vaiheessa vaihe-eron ollessa $\phi$. Tarkastellaan muutamaa erikoistapausta pisteessä $\mathbf{r} = 0$. HT: Piirrä kuva kaikista tapauksista.

**1. Komponentit samassa vaiheessa** $(\phi = 0)$. Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t \qquad (10.23)$$

Sähkökenttä värähtelee $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$:sta $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$:een osoittaen koko ajan suuntaan $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$. Tämä on **lineaarinen polarisaatio**. Myös 180 asteen vaihe-ero antaa lineaarisen polarisaation $(E_p \to -E_p)$.

**2. Vaihe-ero** $\phi = \pm\pi/2$. Tällöin

$$\mathbf{E}(0, t) = \pm E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \qquad (10.24)$$

Sähkökenttävektori pyörii $ps$-tasossa piirtäen ellipsin joko myötä- tai vastapäivään riippuen katselusuunnasta. Tämä on **elliptinen polarisaatio**.

**3. Vaihe-ero** $\phi = \pm\pi/2$ **ja** $E_p = E_s$. Tällöin ellipsi palautuu ympyräksi ja kyseessä **ympyräpolarisaatio**.

Jos vaihe-ero on jotain muuta kuin $\phi = \pm\pi/2$, kyseessä on aina elliptinen polarisaatio (mahdollisesti surkastunut lineaariseksi).

Tarkastellaan sähkökentän pyörimissuuntaa ympyräpolarisaatiossa. Jos yllä $\phi = +\pi/2$, pyörii aallon sähkökenttä myötäpäivään, kun katsotaan kohti saapuvaa aaltoa. Optiikassa tätä kutsutaan **oikeakätisesti polarisoituneeksi** aalloksi. Jos pyörimistä tarkastellaan aallon etenemissuuntaan, se kuitenkin näyttää toteuttavan vasemman käden kiertosäännön. Tarkasteltaessa sähkömagneettisten aaltojen ominaisuuksia magnetoituneessa johtavassa väliaineessa (kuten plasmassa) tällaista aaltoa kutsutaankin **vasenkätisesti polarisoituneeksi**. Tämä valinta on sikäli johdonmukainen, että näin polarisoitunut aalto muodostaa avaruudessa vasenkätisen ruuvin. Aallolla sanotaan olevan negatiivinen helisiteetti ja voidaan puhua negatiivisesti polarisoituneesta aallosta. Vastaavasti $\phi = -\pi/2$ antaa päinvastaiset nimitykset. Tällä kurssilla ei tarvitse murehtia oikea- tai vasenkätisyyksien sekamelskasta, mutta asia on hyvä tietää vastaisen varalta.

Mielivaltainen elliptinen polarisaatio voidaan hajottaa eri vaiheissa värähtelevien oikea- ja vasenkätisesti polarisoituneiden aaltojen summaksi. Esimerkiksi lineaarinen polarisaatio on summa kahdesta eri suuntiin pyörivästä samanamplitudisesta komponentista.

## 10.3 Sähkömagneettisen aallon energia

Kompleksisen kentän reaaliosa on fysikaalinen mitattava kenttä. Koska Maxwellin yhtälöt ovat lineaariset kenttien suhteen ja toteutuvat siten erikseen reaali- ja imaginaariosille, tästä ei tullut edellä ongelmia. Kenttien energiat ja Poyntingin vuo ovat kuitenkin vektoreiden tuloja, jolloin reaali- ja imaginaariosat sekoittuvat toisiinsa. Koska $\mathrm{Re}\,(A \cdot B) \neq \mathrm{Re}\,A \cdot \mathrm{Re}\,B$, on syytä ottaa ensin suureiden reaaliosat ja kertoa ne vasta sitten keskenään.

Pisteessä $\mathbf{r} = 0$ kenttä $\mathbf{E}(0,t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t)$ ja

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2(\omega t) \quad (10.25)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (10.26)$$

Koska $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ja $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, on $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, ja tasoaallon energiatiheys on

$$u_w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{n}{c} \right)^2 E^2 \quad (10.27)$$

Toisaalta $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH\, \mathbf{u}$, joten Poyntingin vektori osoittaa aallon etenemissuuntaan ja on suuruudeltaan

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (10.28)$$

Tasoaaltojen energiatiheys ja energiavuo saavat siis hyvin yksinkertaiset lausekkeet ja lisäksi

$$S = \frac{c}{n} u_w \quad (10.29)$$

Jos vaihenopeutta käsitellään aallon etenemissuuntaisena vektorina $\mathbf{v}_p$, voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{S} = u_w \mathbf{v}_p \quad (10.30)$$

Tasoaallon Poyntingin vuo voidaan siis tulkita energiatiheyden etenemisenä vaihenopeuden mukana. Kentällä on energian lisäksi liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Aallot kuljettavat myös näitä suureita mukanaan.

Tasoaallon energiatiheys $u_w$ ja energiavuo $\mathbf{S}$ ovat verrannollisia suureeseen $E^2$. Ympyräpolarisoituneelle aallolle ($\phi = \pm\pi/2$)

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2 \quad (10.31)$$

joka on vakio. Lineaarisesti polarisoituneella aallolla puolestaan

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t \quad (10.32)$$

vaihtelee nollan ja maksiminsa välillä kaksi kertaa aallon taajuudella.

Energiaa tarkastellaan usein korkeataajuisten aaltojen tapauksessa. Tällöin $E^2$:n aikakeskiarvo on tärkeämpi suure kuin sen ajallinen vaihtelu. Koska $\cos^2(\omega t - \phi)$:n keskiarvo yhden jakson aikana on 1/2, kaikilla polarisaatioilla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2) \tag{10.33}$$

Tämän voi kirjoittaa myös kompleksisen **E**-vektorin avulla

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \tag{10.34}$$

missä $^*$ viittaa kompleksikonjugaattiin. Ongelma voidaan siis käsitellä alusta loppuun kompleksisena, mutta silloin mitattavat suureet on käsiteltävä jakson yli otettuina keskiarvoina.

## 10.4 Tasoaallot johteessa

Yksinkertaisessa väliaineessa ($\mu$, $\epsilon$ ja $\sigma$ vakioita), jossa ei ole vapaita varauksia aaltoyhtälöt ovat (HT)

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{H} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} &= 0 && (10.35) \\ \nabla^2\mathbf{E} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= 0 && (10.36) \end{aligned}$$

Muistutetaan taas, että nämä ovat seurausta Maxwellin yhtälöistä. Niillä on myös ratkaisuja, jotka eivät toteuta Maxwellin yhtälöitä, joten ratkaisujen fysikaalisuus on tarkastettava erikseen käytännön ongelmissa.

Sähkökentän aaltoyhtälöä kutsutaan lennätinyhtälöksi. Se on perusesimerkki osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisesta Fourier-muunnosten avulla. Oikaistaan nyt olettamalla suoraan tasoaaltoratkaisu ja lähtemällä liikkeelle Maxwellin yhtälöistä, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H} \\ i\mathbf{k}\times\mathbf{H} &= (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} \end{aligned} \tag{10.37}$$

Koska $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ja $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, niin aalto on jälleen poikittainen.

Valitaan koordinaatisto siten, että $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_x$ ja $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$. Tällöin

$$\begin{aligned} kE_x &= \omega\mu H_y \\ ikH_y &= -(\sigma - i\omega\epsilon)E_x \end{aligned} \tag{10.38}$$

Tästä (tai suoraan aaltoyhtälöstä) saadaan dispersioyhtälö $k = k(\omega)$:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon\mu + i\omega\sigma\mu \tag{10.39}$$

Aaltoluku $k$ on nyt kompleksiluku, joka voidaan kirjoittaa muodossa $k = |k|e^{i\alpha}$ ja dispersioyhtälöstä voidaan ratkaista

$$\begin{aligned} |k| &= \sqrt{\mu\omega\sqrt{\omega^2\epsilon^2 + \sigma^2}} \\ \alpha &= \frac{1}{2}\arctan(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}) \end{aligned} \tag{10.40}$$

Numeerisia laskentaohjelmistoja käytettäessä ei useinkaan tarvitse kirjoittaa erikseen aaltoluvun reaali- ja imaginaariosia, vaan voi käyttää kompleksilukua $k = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu + i\omega\sigma\mu}$. Neliöjuuren vaiheen oikea valinta on kuitenkin syytä tarkastaa huolellisesti.

Lennätinyhtälön ratkaisu harmonisille aalloille on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0\mathbf{e}_x e^{i(Re(k)z-\omega t)} e^{-Im(k)z} \\ &= E_0\mathbf{e}_x \exp[i(|k|z\cos\alpha - \omega t)]\exp[-|k|z\sin\alpha] \end{aligned} \tag{10.41}$$

Tässä valitaan $\alpha$:n vaihe siten, että $Im(k) > 0$ eli $\sin\alpha > 0$ (HT: piirrä kuva kompleksitasossa). Tällöin aalto vaimenee edetessään väliaineeseen (tekijä $e^{-|k|z\sin\alpha}$), mikä on fysikaalisesti mielekäs ratkaisu. Matka, jolla aallon amplitudi vaimenee tekijällä $e$, on väliaineen **tunkeutumissyvyys** (skin depth):

$$\delta = \frac{1}{\mathrm{Im}(k)} = \frac{1}{|k|\sin\alpha} \tag{10.42}$$

Väliaineen **impedanssi** (aaltovastus) määritellään

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sqrt{\omega^2\epsilon^2 + \sigma^2}}}\exp[-\frac{i}{2}\arctan(\frac{\sigma}{\omega\epsilon})] \tag{10.43}$$

Impedanssin yksikkö on sama kuin resistanssilla: $[Z] = \Omega$ (kertaa impedanssin, admittanssin ja reaktanssin käsitteet esimerkiksi KSII:sta).

**Esimerkki: hyvä johde.** Siirrosvirtatermi on mitätön: $\sigma >> \omega\epsilon \Rightarrow \alpha = 45°; \delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)},\ v_p = \delta\omega\tan\alpha = \delta\omega$

$$\text{Kuparille: } \begin{cases} f = 50\,\mathrm{Hz} & \delta \approx 1\,\mathrm{cm} & v_p \approx 3\,\mathrm{m/s} \\ f = 50\,\mathrm{MHz} & \delta \approx 10\,\mu\mathrm{m} & v_p \approx 3\times 10^3\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

$Z = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{-i\pi/4} \ \Rightarrow 45°$ vaihe-ero **E**:n ja **H**:n välillä.

**Esimerkki: eriste.** $\sigma = 0$, $\epsilon > 0$, $\mu = \mu_0 \ \Rightarrow \alpha = 0$ eli aalto ei vaimene tunkeutuessaan eristeeseen. $Z = \sqrt{\mu_0/\epsilon} \equiv Z_0\sqrt{\epsilon_0/\epsilon}$, missä $Z_0$ on **tyhjön impedanssi**: $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376{,}73\ \Omega$.

Fourier-komponenttien yhtälöryhmästä saadaan aaltoluvun ja kenttien välille yhteydet

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2}\hat{\epsilon_r}\,\mathbf{E} \end{aligned} \tag{10.44}$$

missä $\hat{\epsilon_r}$ on kompleksinen suhteellinen dielektrisyysvakio ($\mu = \mu_0$)

$$\hat{\epsilon_r} = \epsilon_r + i\,\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \tag{10.45}$$

Nyt myös taitekerroin kannattaa määritellä kompleksilukuna

$$\hat{n}^2 = \hat{\epsilon_r} \tag{10.46}$$

jolloin aaltoluku $k$ toteuttaa yhtälön $k^2 = \hat{n}^2\omega^2/c^2$.

## 10.5 Druden ja Lorentzin oskillaattorimalli

**Dispersiivisessä väliaineessa** dispersioyhtälö on yksinkertaista lineaarista relaatiota $\omega = (c/n)k$ monimutkaisempi. Aineen eristeominaisuudet voivat riippua taajuudesta ja aaltoluvusta: $\epsilon = \epsilon(\omega, \mathbf{k})$. Tarkastellaan väliainetta, jossa ei ole vahvoja sisäisiä voimia, ja jätetään aineen magneettiset ominaisuudet huomiotta ($\mu = \mu_0$). Kuvataan klassisen fysiikan mukaisesti yhtä elektronia, joka on sidottu atomiin harmonisella voimalla

$$\mathbf{F}_h = -m\omega_0^2\mathbf{r} \tag{10.47}$$

missä $\mathbf{r}$ on poikkeama tasapainoasemasta. Oletetaan lisäksi, että elektronin liikettä vastustaa voima

$$\mathbf{F}_d = -m\gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{10.48}$$

missä alaindeksi $d$ (damping) viittaa siihen, että voima vaimentaa harmoniseen voimaan liittyvää värähtelyä. Ulkoisessa sähkökentässä $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ liikeyhtälöksi tulee

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r}\right) = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{10.49}$$

Oletetaan harmoninen aikariippuvuus ($\propto \exp(-i\omega t)$), jolloin liikeyhtälön ratkaisu on

$$\mathbf{r} = \frac{-e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \tag{10.50}$$

Elektronin poikkeama tasapainoasemasta aiheuttaa dipolimomentin $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \tag{10.51}$$

Olkoon yksikkötilavuudessa $n$ molekyyliä ja jokaista molekyyliä kohti $Z$ elektronia. Oletetaan, että $f_j$ kappaleella jokaisen molekyylin elektroneista on ominaistaajuus $\omega_{0j}$ ja vaimennustekijä $\gamma_j$. Tekijöitä $f_j$ kutsutaan **oskillaattorivoimakkuuksiksi** ja ne normitetaan elektronien lukumäärään: $\sum_j f_j = Z$. Nyt sähköinen polarisoituma (dipolimomenttien tiheys) on

$$\mathbf{P} = \frac{ne^2\mathbf{E}}{m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \tag{10.52}$$

Yksinkertaisessa aineessa sähkövuon tiheydestä $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ saadaan

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) = \epsilon_0\left(1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}\right) \tag{10.53}$$

Siis permittiivisyys on taajuudesta riippuva kompleksiluku.

Oletetaan sitten, että aineessa on jonkin verran vapaita elektroneja ($f_0$ kappaletta molekyyliä kohti), mutta että muuten väliaine on samanlainen kuin edellä. Vapaille elektroneille $\omega_{00} = 0$, jolloin

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0\left(1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0}\sum_{j\neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}\right) - \frac{ne^2}{m\omega}\frac{f_0}{\omega + i\gamma_0} \tag{10.54}$$

Merkitään oikean puolen ensimmäistä termiä $\epsilon_b$ ja käytetään Ohmin lakia ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). Tällöin Maxwellin neljännestä laista saadaan

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon_b)\mathbf{E} \equiv -i\omega\epsilon\mathbf{E} \tag{10.55}$$

joten

$$\epsilon = \epsilon_b + i\sigma/\omega \tag{10.56}$$

Vertaamalla tätä lausekkeeseen (10.54) saadaan

$$\sigma = \frac{f_0 ne^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \tag{10.57}$$

Johtavuus $\sigma$ on nyt taajuuden kompleksiarvoinen funktio. Jos $\gamma_0 \gg |\omega|$ ja $f_0 = 1$, tästä tulee luvusta 5 tuttu staattisen johtavuuden lauseke

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\gamma_0} \tag{10.58}$$

missä $\gamma_0$ on törmäysajan $\tau$ käänteisluku.

Esimerkiksi kuparilla on huoneen lämpötilassa ominaisuudet $\sigma = 5,6 \cdot 10^7\ (\Omega\text{m})^{-1}$, $n = 8 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$, $f_0 = 1$, jolloin $\gamma_0 = 4 \cdot 10^{13}\ \text{s}^{-1}$. Oletus staattisesta johtavuudesta on siis hyvä taajuuksilla $|\omega| \ll 4 \cdot 10^{13}\ \text{s}^{-1}$, joka on varsin korkea verrattuna esimerkiksi tyypilliseen radioasemaan, jolle $\omega = 96,2\ \text{MHz} \cdot 2\pi \approx 6 \times 10^8\ \text{s}^{-1}$.

Taajuuksia $\omega_{0j}$ kutsutaan **resonanssitaajuuksiksi**. Monissa käytännön ongelmissa $\gamma_j \ll \omega_{0j}$, joten $\epsilon(\omega)$ on melkein reaalinen paitsi resonanssitaajuuksien lähellä eli

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_{j\neq 0} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}\right) \tag{10.59}$$

Dispersiota kutsutaan **normaaliksi**, jos $d(Re\ \epsilon(\omega))/d\omega > 0$ ja **anomaaliseksi**, jos $d(Re\ \epsilon(\omega))/d\omega < 0$. Normaalin dispersion alueella permittiivisyys kasvaa taajuuden myötä. Anomaalista dispersiota ilmenee ainoastaan lähellä resonanssikohtaa, missä Im $\epsilon$ poikkeaa nollasta (HT: piirrä kuva).

Tarkastellaan energiabudjettia resonanssikohdan lähellä. Sähkövirta on nyt polarisaatiovirtaa $\mathbf{J}_P = \partial\mathbf{P}/\partial t$ ja sähkökentän tekemän työn tehotiheys

$$W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_P = \mathbf{E} \cdot \partial\mathbf{P}/\partial t \tag{10.60}$$

Yhden jakson keskimääräinen tehotiheys on

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E}\cdot(-i\omega\mathbf{P})^*) = \frac{1}{2}\text{Re}(i\omega(\epsilon^* - \epsilon_0)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*) = \frac{\omega}{2}|\mathbf{E}|^2 \text{Im}\ \epsilon(\omega) \tag{10.61}$$

Jos Im $\epsilon > 0$, energia siirtyy sähkökentältä elektroneille eli aalto vaimenee. Tätä kutsutaan **resonanssiabsorptioksi**. Tässä mallissa Im $\epsilon > 0$, kun $\omega > 0$. On olemassa tärkeitä fysikaalisia prosesseja, joissa aalto saa energiaa hiukkasilta, mutta tämä malli ei sovellu niihin tapauksiin. Tässä yhteydessä on opettavaista todeta merkinvalinnan vaikutus. Jos aikariippuvuudeksi valittaisiin $\exp(+i\omega t)$, muuttuisi Im $\epsilon$:n merkki. Tilanteen fysiikka on tietenkin riippumatonta merkkisopimuksista.

Väliaineen taitekerroin ja aallon aaltoluku ovat

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}} \tag{10.62}$$

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}}\,\frac{\omega}{c} \tag{10.63}$$

Tästä saadaan vaihenopeus

$$v_p = \omega/k = c/n(\omega) \tag{10.64}$$

Energian etenemisnopeuden dispersiivisessä väliaineessa antaa **ryhmänopeus**, joka määritellään $v_g = d\omega/dk$ ja on siten (ks. *Jackson*)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/dw} = \frac{c}{n(\omega) + \omega\dfrac{dn}{dk}} \tag{10.65}$$

Samaan aikaan lähtevät eritaajuiset aallot saavuttavat vastaanottajan eri aikaan, mikäli ne etenevät dispersiivisessä väliaineessa.

## 10.6 Palloaallot[1]

Tasoaalto on erittäin käyttökelpoinen matemaattinen idealisaatio. Todellisuudessa sähkömagneettinen aalto kuitenkin synnytetään esimerkiksi äärellisen kokoisella antennilla. Antennin lähellä kenttien rakenne on monimutkainen ja riippuu antennin geometriasta. Kun aalto etenee avaruuteen, se laajenee ja tarkasteltaessa aaltorintamaa riittävän pienellä alueella se näyttää tasoaaltorintamalta. Joskus on tarpeen ottaa huomioon aaltorintaman globaali muoto. Tarkastellaan esimerkkinä origosta joka suuntaan eteneviä pallonmuotoisia aaltorintamia. Periaatteessa ongelma ratkaistiin luvussa 9, jossa johdettiin viivästyneet potentiaalit ja palloaallon Greenin funktio. Kenttiä ei laskettu, sillä derivointi viivästyneistä potentiaaleista on aika työlästä.

Tyhjössä etenevän aallon sähkökentän aaltoyhtälö on

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{10.66}$$

josta monokromaattiselle aallolle tulee vektorimuotoinen Helmholtzin yhtälö

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{10.67}$$

Ongelmana on termin $\nabla^2\mathbf{E} = -\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} + \nabla\nabla\cdot\mathbf{E}$ kirjoittaminen pallokoordinaateissa. Termin $-\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}$ radiaali- ja kulmakomponenteissa ovat mukana kaikki pallokoordinaatiston muuttujat. Saadaan kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön ryhmä, joissa kaikissa ovat mukana kaikki sähkökentän komponentit. Vektorimuotoinen Laplacen yhtälö separoituu kunkin muuttujan erillisiksi differentiaaliyhtälöiksi vain karteesisissa koordinaateissa.

Tarkastellaankin skalaarimuotoista Helmholtzin yhtälöä

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\psi = 0 \tag{10.68}$$

[1] Tämä luku kuuluu yleissivistykseen

Suoraviivainen harjoitustehtävä on osoittaa, että

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla\psi \tag{10.69}$$

on (10.67):n ratkaisu, ja $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Faradayn laista

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \tag{10.70}$$

saadaan magneettikenttä

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi) \tag{10.71}$$

HT: Tarkasta, että loput Maxwellin yhtälöt toteutuvat tyhjössä.

Voitaisiin myös lähteä liikkeelle **B**-kentän aaltoyhtälöstä, jolloin

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c}\mathbf{r} \times \nabla\psi \tag{10.72}$$

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega}\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi) \tag{10.73}$$

Ratkaisuparissa $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ sähkökenttä on jokaisessa pisteessä tangentiaalinen origokeskisen pallon pinnan kanssa. Tätä aaltoa kutsutaan joskus transversaaliseksi sähköiseksi (TE) moodiksi. Ratkaisuparissa $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ magneettikentällä on puolestaan sama ominaisuus ja aaltoa kutsutaan transversaaliseksi magneettiseksi (TM) moodiksi (HT: piirrä kuvat).

Vielä on löydettävä $\psi$ Helmholtzin skalaariyhtälön ratkaisuna. Käytetään Laplacen yhtälön ratkaisemisesta tuttua muuttujien separointia pallokoordinaatistossa (luku 2). Ratkaistava yhtälö on pallokoordinaateissa

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + k^2\psi = 0 \tag{10.74}$$

Erona Laplacen yhtälöön on siis termi $k^2\psi$.

Sijoitetaan separointiyrite $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ ylläolevaan yhtälöön. Jaetaan tulos $\psi$:llä ja kerrotaan tekijällä $r^2\sin^2\theta$, jolloin

$$\frac{1}{R}\sin^2\theta\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + k^2r^2\sin^2\theta = 0 \tag{10.75}$$

$\phi$-riippuvuuden osalta separointi antaa tutun yhtälön

$$\frac{d^2\Phi_m}{d\phi^2} + m^2\Phi_m = 0 \tag{10.76}$$

$\theta$- ja $r$-riippuvat yhtälöt ovat puolestaan

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_{lm} = 0 \tag{10.77}$$

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - k^2r^2]R_l = 0 \tag{10.78}$$

Yhtälön (10.76) ratkaisut ovat muotoa $\Phi_m = e^{\pm im\phi}$ ja yhtälön (10.77) ratkaisut ovat tutut Legendren liittofunktiot (luku 2). Termi $k^2\psi$ muuttaa siis ainoastaan radiaalista yhtälöä (10.78), josta muuttujanvaihdolla $\xi = kr$ ja sijoituksella $R_l = \xi^{-1/2} Z_l$ saadaan Besselin yhtälö

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - [(l+1/2)^2 - \xi^2] Z_l = 0 \tag{10.79}$$

Ratkaisuina ovat Besselin ja Neumannin funktiot $J_{l+1/2}(kr)$ ja $N_{l+1/2}(kr)$. Pallokoordinaatistossa näistä muodostetaan pallobesseleitä

$$j_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr}\, J_{l+1/2}(kr) \tag{10.80}$$

$$n_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr}\, N_{l+1/2}(kr) \tag{10.81}$$

Ne ovat alkeisfunktioita, joten niitä ei tarvitse pelätä: esimerkiksi $j_0(r) = \sin r/r$, $n_0(r) = -\cos r/r$ (enempi pohdiskelu jää FYMM II:lle).

Nyt on koossa yleinen ratkaisu skalaarimuotoiselle Helmholtzin yhtälölle muodossa

$$\psi_{lm} = \sqrt{\pi/2kr}\, Z_l(kr)\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\phi} \tag{10.82}$$

Yksinkertaisin fysikaalisesti mielenkiintoinen valinta on

$$\psi_{10} = \frac{1}{kr} e^{ikr} \left[1 + \frac{i}{kr}\right] \cos\theta \tag{10.83}$$

josta saadaan TE-moodille

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla\psi_{10} = -E_0 e^{ikr} \left[\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2}\right] \sin\theta\, \mathbf{e}_\phi \tag{10.84}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -i\frac{1}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \qquad (10.85) \\ &= \frac{i}{\omega} E_0 e^{ikr} \left\{ \left[\frac{1}{kr^2} + \frac{i}{k^2 r^3}\right] 2\cos\theta\, \mathbf{e}_r - \left[\frac{i}{r} - \frac{1}{kr^2} - \frac{i}{k^2 r^3}\right] \sin\theta\, \mathbf{e}_\theta \right\} \end{aligned}$$

Tämä on itse asiassa magneettisen dipoliantennin säteilemä aaltokenttä.

# Luku 11

# Aaltojen heijastuminen ja taittuminen

Tässä luvussa käsitellään sähkömagneettisten aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnalla. Rajoitutaan monokromaattisiin aaltoihin ja oletetaan väliaineet lineaarisiksi ja magnetoitumattomiksi ($\mu = \mu_0$), ellei toisin mainita.

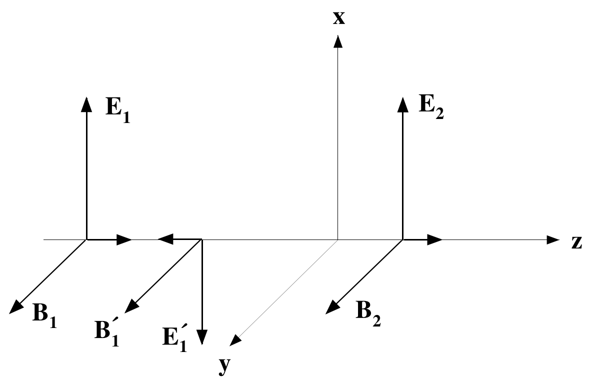
## 11.1 Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle

Tarkastellaan ensin heijastumista kahden eristeen rajapinnalla ($xy$-taso), kun aalto saapuu kohtisuoraan pintaa vastaan (kuva 11.1). $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ kuvaa $+z$-akselin suuntaan etenevää **saapuvaa** aaltoa, $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{B}'_1)$ $-z$-akselin suuntaan etenevää **heijastunutta** aaltoa ja $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ rajapinnan **läpäissyttä** aaltoa. Oletetaan, että aallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut $x$-akselin suuntaan, jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{e}_x E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_x E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \tag{11.1}$$

missä $k_1 = n_1 \omega / c$, $k_2 = n_2 \omega / c$. Magneettikenttä saadaan Faradayn laista seuraavasta relaatiosta $\mathbf{B} = (n/c)\mathbf{u} \times \mathbf{E}$, missä $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z$ tulevalle ja läpäisseelle aallolle ja $\mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$ heijastuneelle aallolle. Magneettikenttä on $y$-akselin suuntainen:

$$\begin{aligned} c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}'_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{e}_y n_2 E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \tag{11.2}$$




Kuva 11.1: Heijastuminen ja läpäisy kohtisuoraan $xy$-tasolle saapuvalle aallolle.

Kaikilla aalloilla on oltava sama kulmataajuus $\omega$, jotta reunaehdot rajapinnalla toteutuisivat kaikilla ajanhetkillä $t$. Sähkökentän tangentiaalikomponentti on jatkuva, joten

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \tag{11.3}$$

Sama pätee epämagneettisessa väliaineessa ($\mu = \mu_0$) myös magneettikentälle. Jatkuvuusehdoksi saadaan

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x} \tag{11.4}$$

Oletetaan saapuvan aallon amplitudi $E_{1x}$ tunnetuksi ja ratkaistaan heijastuneen ja läpäisseen aallon amplitudit:

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \; ; \; E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \tag{11.5}$$

Määritellään **Fresnelin kertoimet** kohtisuoraan tulevalle aallolle:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \tag{11.6}$$

$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \tag{11.7}$$

missä $r$ viittaa heijastumiseen (reflection) ja $t$ läpäisyyn (transmission). Käytännön ongelmissa mitataan yleensä kunkin osa-aallon mukana kulkevaa keskimääräistä energiavuota eli **intensiteettiä**. Se saadaan Poyntingin vektorista luvun 10.3 mukaisesti:

$$\langle S \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c}(E_p^2 + E_s^2) \tag{11.8}$$

Tässä käsiteltävässä tapauksessa on $E_p = E_x$ ja $E_s = 0$. Määritellään **heijastussuhde** $R_n$ ja **läpäisysuhde** $T_n$ ($n$ viittaa normaalin suuntaiseen saapumiseen) seuraavasti:

$$R_n = \frac{\langle S_1' \rangle}{\langle S_1 \rangle} = r_{12}^2 = (\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1})^2 \tag{11.9}$$

$$T_n = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = \frac{4 n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2} \tag{11.10}$$

Mille hyvänsä eristeparille $R_n + T_n = 1$, mikä ilmaisee energian säilymisen.

Elliptiselle polarisaatiolle on tarkasteltava erikseen $x$- ja $y$-komponentteja. $x$-komponenteille pätee yllä oleva tarkastelu sellaisenaan ja $y$-komponenteille tulee samat Fresnelin kertoimet. Myös $y$-komponentit pysyvät samassa vaiheessa keskenään, vaikka ne ovatkin eri vaiheessa kuin $x$-komponentit. Heijastus- ja läpäisysuhteet pysyvät ennallaan, sillä intensiteetti $\langle S \rangle$ on eri polarisaatiokomponenttien intensiteettien summa.

**Esimerkkejä**

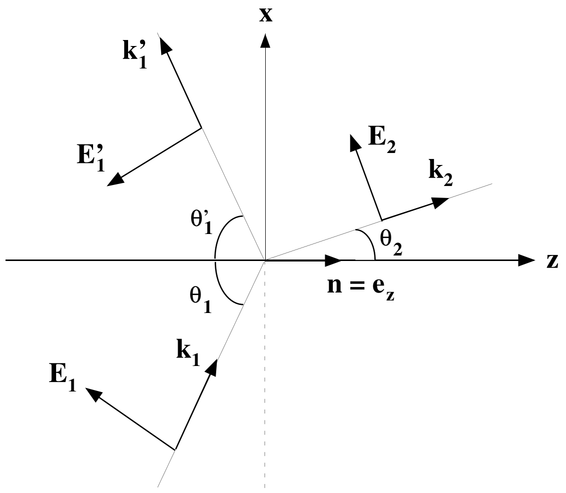
1. Ilman ($n_1 = 1$) ja lasin ($n_2 = 1.5$) rajapinnalla $R_n = 0.04$ ja $T_n = 0.96$.
2. Puhtaan veden taitekerroin näkyvän valon aallonpituudella on $n_2 = 1.33$, joten $R_n = 0.02$. Kun $\omega$ on alle $10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}$, veden suhteellinen permittiivisyys on kuitenkin suuri (81), joten $n_2 = 9$ ja $R_n = 0.64$. Vesi siis heijastaa huomattavasti tehokkaammin radioaaltoja kuin valoa. Paremmin sähköä johtavalle suolaiselle merivedelle heijastussuhde on paljon suurempi.

## 11.2 Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa

Tarkastellaan sitten mielivaltaista saapumiskulmaa. Kuvan 11.2 tilanteessa rajapinta on $xy$-tasossa ja saapuvan aallon aaltovektori $xz$-tasossa (**saapumistasossa**). Valitaan jokaiselle osa-aallolle jälleen $\{\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u}\}$-kanta, jolloin kuvan tilanteessa kullakin aallolla on vain sähkökentän $p$-komponentti.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{p}_1 \hat{E}_{1p} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}_1' &= \mathbf{p}_1' \hat{E}_{1p}' e^{i(\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{p}_2 \hat{E}_{2p} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \tag{11.11}$$

Koska kunkin osa-aallon magneettikenttä on kohtisuorassa sekä **k**- että **p**-vektoreihin nähden, magneettikentällä on vain $s$-komponentti ja se on tässä geometriassa kaikilla osa-aalloilla $y$-akselin suuntainen. Vaikka kuva 11.2 näyttää erikoistapaukselta, kyseessä on toinen kahdesta perustilanteesta.




Kuva 11.2: Heijastuminen ja taittuminen $p$-polarisaatiolle.

Olkoon $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ rajapinnan yksikkönormaali. Jotta aaltokenttä olisi jatkuva rajapinnalla, täytyy aaltojen taajuuden lisäksi myös vaiheiden olla samat missä hyvänsä rajapinnan pisteessä $\mathbf{r}_0$, joten

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \tag{11.12}$$

Tästä on helppo (HT) näyttää, että

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}'_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}_2 \tag{11.13}$$

Siis kaikki $\mathbf{k}$-vektorit ja $\mathbf{n}$ ovat kohtisuorassa vektoria $(\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1)/|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1| = \mathbf{e}_y$ kohtaan, joten kaikkien osa-aaltojen aaltovektorit ovat samassa tasossa.

Muistisääntönä $p$-komponentti viittaa saapumistasossa olevaan komponenttiin (parallel). Tällaisesta polarisaatiosta käytetään nimitystä $p$-**polarisaatio**. Radioaaltojen yhteydessä tätä kutsutaan myös **vertikaaliseksi polarisaatioksi**, sillä tarkasteltaessa radioaallon heijastumista ionosfääristä näin polarisoituneen aallon sähkökentällä on pystykomponentti.

Toinen peruspolarisaatio on $s$-**polarisaatio** tai **horisontaalinen polarisaatio**, jossa sähkökentällä on vain $s$-komponentti. $s$ viittaa saksankielen sanaan senkrecht (kohtisuora). Tällöin puolestaan osa-aaltojen magneettikentillä on erisuuntaiset $p$-komponentit. Koska kaikki muut polarisaatiotilat voidaan ilmaista eri vaiheissa värähtelevien $s$- ja $p$-polarisoituneiden aaltojen summana, riittää tarkastella näitä kahta perustapausta

Ehdosta (11.12) seuraa kaksi muutakin tärkeää tulosta. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} &= k_1 \cos\theta_1 \\ \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n} &= -k'_1 \cos\theta'_1 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} &= k_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{11.14}$$

joten

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| &= k_1 \sin\theta_1 \\ |\mathbf{k}_1' \times \mathbf{n}| &= k_1' \sin\theta_1' \\ |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}| &= k_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{11.15}$$

Niinpä on oltava

$$k_1 \sin\theta_1 = k_1' \sin\theta_1' = k_2 \sin\theta_2 \tag{11.16}$$

Koska saapuva ja heijastunut aalto etenevät samalla taajuudella samassa väliaineessa, $k_1 = k_1'$ ja saadaan **heijastuslaki**

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_1' \qquad \text{eli} \qquad \theta_1 = \theta_1' \tag{11.17}$$

Aaltolukuja eri väliaineissa puolestaan sitoo dispersioyhtälö $k = n\omega/c$, mistä seuraa **Snellin laki**

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{11.18}$$

**Huom.** Näissä relaatioissa ei ole käytetty Maxwellin yhtälöistä seuraavia reunaehtoja, vaan ne riippuvat aaltoliikkeen yleisistä geometrisista ominaisuuksista ja Snellin lain osalta väliaineen taitekertoimesta.

Fresnelin kertoimet määritetään kenttien tangentiaalikomponenttien jatkuvuusehdoista. Normaalikomponenttien jatkuvuusehdot toteutuvat automaattisesti. Vektorikenttä voidaan hajottaa normaali- ja tangentiaalikomponentteihin kirjoittamalla $\mathbf{E} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$. Tangentiaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa, että

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1') = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \tag{11.19}$$

Magneettikentälle puolestaan (kun $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1') = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_2 \tag{11.20}$$

Jos aaltovektorin suuntainen yksikkövektori on $\mathbf{u}$, niin $\mathbf{B} = (n/c)\mathbf{u} \times \mathbf{E}$, joten magneettikentän jatkuvuus edellyttää, että

$$n_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1' \times \mathbf{E}_1') = n_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{E}_2) \tag{11.21}$$

Kirjoittamalla vektorikolmitulot auki ja tarkastelemalla $s$-komponenttia saadaan osa-aallolle $\mathbf{E}_1$ yhtälö

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{1s}) = -\cos\theta_1 \mathbf{E}_{1s} \tag{11.22}$$

ja vastaavasti muille osa-aalloille. Näin (11.21) saadaan muotoon

$$n_1(\cos\theta_1 \mathbf{E}_{1s} - \cos\theta_1' \mathbf{E}_{1s}') = n_2 \cos\theta_2 \mathbf{E}_{2s} \tag{11.23}$$

Koska $\theta_1 = \theta_1'$, tämä sievenee muotoon

$$n_1 \cos\theta_1(\mathbf{E}_{1s} - \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos\theta_2 \mathbf{E}_{2s} \tag{11.24}$$

Sähkökentän tangentiaalikomponentin jatkuvuudesta saadaan suoraan $s$-komponenteille ehto

$$\mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}'_{1s} = \mathbf{E}_{2s} \tag{11.25}$$

Näistä yhtälöistä saadaan Fresnelin kertoimet $s$-polarisaatiolle:

$$\mathbf{E}'_{1s} = r_{12s}\mathbf{E}_{1s} \ , \ \mathbf{E}_{2s} = t_{12s}\mathbf{E}_{1s} \tag{11.26}$$

missä

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{11.27}$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \tag{11.28}$$

$p$-polarisaatio näyttää geometrialtaan hankalammalta, koska sähkökenttä ei ole rajapinnan tasossa. Nyt kannattaa tarkastella magneettikenttää, joka on rajapinnan tasossa. Näin saadaan yhtälöpari

$$\frac{1}{n_1} \cos\theta_1(\mathbf{B}_{1s} - \mathbf{B}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos\theta_2 \mathbf{B}_{2s} \tag{11.29}$$

$$\mathbf{B}_{1s} + \mathbf{B}'_{1s} = \mathbf{B}_{2s} \tag{11.30}$$

ja Fresnelin kertoimet tulevat ehdosta

$$\mathbf{B}'_{1s} = r_{12p}\mathbf{B}_{1s} \ , \ \mathbf{B}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p}\mathbf{B}_{1s} \tag{11.31}$$

missä

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \tag{11.32}$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} \tag{11.33}$$

Koska Snellin laki sitoo taitekertoimet saapumis- ja taittumiskulmiin

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2\theta_1} \tag{11.34}$$

voidaan taittumiskulma eliminoida Fresnelin kertoimista.

Intensiteettien väliset relaatiot saadaan keskimääräisten Poyntingin voiden avulla, mutta nyt täytyy käsitellä $s$- ja $p$-polarisaatiot erikseen:

$$R_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \qquad T_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \tag{11.35}$$

$$R_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} \qquad T_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \tag{11.36}$$

jotka Fresnelin kertoimien avulla saavat muodon

$$R_s = r_{12s}^2 \qquad T_s = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1} t_{12s}^2 \tag{11.37}$$

$$R_p = r_{12p}^2 \qquad T_p = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1} t_{12p}^2 \tag{11.38}$$

ja lisäksi $R_s + T_s = 1$ ja $R_p + T_p = 1$.

Käyttämällä hyväksi Snellin lakia Fresnelin kertoimet voi muuntaa puhtaasti trigonometrisiksi (HT):

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \tag{11.39}$$

$$t_{12s} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \tag{11.40}$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \tag{11.41}$$

$$t_{12p} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)} \tag{11.42}$$

Tarkastellaan näiden avulla paria esimerkkiä.

### Brewsterin kulma

Millä kulmilla aalto ei lainkaan heijastu rajapinnalta? Molemmilla polarisaatioilla tämä tapahtuu, kun $\theta_1 = \theta_2$, mutta tämä ei ole mielenkiintoinen tapaus, koska silloin molemmilla väliaineilla on oltava sama taitekerroin. $p$-polarisaation kyseessä ollen myös tapaus $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ tekee heijastuskertoimesta nollan. Taittuneen ja heijastuneen säteen välinen kulma on silloin suora. Merkitään sisääntulokulmaa $\theta_B$ ja kirjoitetaan $\theta_2 = \pi/2 - \theta_B$, jolloin Snellin laista saadaan ratkaistuksi **Brewsterin kulma**

$$\tan\theta_B = n_2/n_1 \tag{11.43}$$

Koska tämä ehto on voimassa vain $p$-polarisaatiolle (vertikaaliselle polarisaatiolle), sen avulla voidaan tuottaa polarisoitunutta valoa. Esimerkiksi ilman ($n = 1$) ja lasin ($n = 1.5$) rajapinnalla $\theta_B = 56°$ ja tässä kulmassa rajapinnalle tulevasta polarisoitumattomasta (tai mielivaltaisesti polarisoituneesta) valosta heijastuu vain $s$-polarisoitunut komponentti.

### Kokonaisheijastus

Aalto heijastuu kokonaan, jos $\theta_2 = \pi/2$. Sitä vastaava sisääntulokulma saadaan jälleen Snellin laista

$$\sin\theta_c = n_2/n_1 \tag{11.44}$$

Tätä kutsutaan **kriittiseksi kulmaksi**. Se on reaalinen vain, jos $n_2 < n_1$. Tarkastellaan jälleen lasin ja ilman rajapintaa, mutta nyt lasin suunnasta, jolloin $\theta_c = 42°$. Jos kulma on tätä suurempi, Snellin laki antaa ehdon

$$\sin\theta_2 > 1 \tag{11.45}$$

jolla ei ole reaalisia ratkaisuja. Tarkastelemalla kompleksisia Fresnelin kertoimia voidaan näyttää, että $R_s = R_p = 1$ kaikille $\theta_1 \geq \theta_c$. Kriittistä kulmaa suuremmilla saapumiskulmilla kaikki aallon energia heijastuu. Tästä on hyötyä käytännön optiikassa, kuten prismakiikareissa ja valokaapeleissa.

# Luku 12

# Aaltoputket ja resonanssikaviteetit

Tässä luvussa tutustutaan ohjattuun aaltoliikkeeseen. Kerrataan ensin ajasta riippuvan sähkömagneettisen kentän käyttäytyminen ideaalijohteessa ja sen pinnalla. Äärettömän hyvän johteen sisällä ei ole sähkökenttää, koska vapaasti liikkuvat varaukset luovat pinnalle sellaisen varauskatteen $\sigma_S$, että kokonaiskenttä johteen sisällä on nolla. Samoin ajasta riippuva magneettikenttä häviää ideaalijohteen sisällä. Varaukset liikkuvat pinnalla luoden sellaisen pintavirran $\mathbf{K}$, että kokonaiskenttä on nolla johteessa. Muut reunaehdot ovat $\mathbf{B}$:n normaalikomponentin ja $\mathbf{E}$:n tangentiaalikomponentin jatkuvuus. Koska $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{E}$ ovat nollia ideaalijohteessa, niin aivan johteen ulkopuolella sähkökenttä on kohtisuorassa ja magneettikenttä yhdensuuntainen pintaan nähden. Todellisuudessa ideaalijohteita ei ole, mutta malli antaa kuitenkin hyvän peruskäsityksen aaltoputkista. Käytännön esimerkki aaltoputkesta on optinen kuitu ja resonanssikaviteetista mikroaaltouuni.

## 12.1 Sylinteriputki

Tarkastellaan onttoa poikkileikkaukseltaan mielivaltaista metallisylinteriä, jonka seinämät oletetaan ideaalijohteiksi. Sylinterin sisällä aine oletetaan johtamattomaksi (permittiivisyys $\epsilon_0$, permeabiliteetti $\mu_0$). Kenttien aikariippuvuus olkoon harmoninen ($e^{-i\omega t}$). Maxwellin yhtälöt sylinterin sisällä ovat

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{12.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{12.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = 0 \tag{12.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} + i\omega\epsilon_0\mu_0 \mathbf{E} = 0 \tag{12.4}$$

Kenttien Helmholtzin yhtälöt ovat

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E} = 0 \ , \ (\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{B} = 0 \tag{12.5}$$

Valitaan koordinaatisto siten, että $z$-akseli osoittaa aallon etenemissuuntaan. Sylinterigeometrian vuoksi tehdään yritteet

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \ , \ \mathbf{B}(x,y,z) = \mathbf{B}(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \tag{12.6}$$

($z$-akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto $e^{-ikz}$ käsitellään vastaavalla tavalla.) On huomattava, että nyt ei enää yleensä ole $k = \omega/c$. Sijoittamalla yritteet aaltoyhtälöihin saadaan

$$(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{E} = 0 \ , \ (\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{B} = 0 \tag{12.7}$$

missä

$$\nabla_t = \nabla - \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \ , \ \nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12.8}$$

Jaetaan kentät pitkittäiseen ja poikittaiseen osaan, esimerkiksi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t \tag{12.9}$$

missä

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= (\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}_t &= (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{12.10}$$

Nyt Maxwellin yhtälöt saadaan muotoon (HT)

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = -\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ikE_z \tag{12.11}$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = -ikB_z \tag{12.12}$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z \tag{12.13}$$

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \nabla_t E_z - ik\mathbf{E}_t = i\omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_t \tag{12.14}$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -\frac{i\omega}{c^2}E_z \tag{12.15}$$

$$\nabla_t B_z - \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} = \nabla_t B_z - ik\mathbf{B}_t = -i\frac{\omega}{c^2}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \tag{12.16}$$

Jos $B_z$ ja $E_z$ tunnetaan, voidaan poikittaiset kentät ratkaista yhtälöistä 12.14 ja 12.16. Yhtälöitä 12.11-12.16 ei pidä opetella ulkoa, vaan on ymmärrettävä käsittelyn perusideat.

### TEM-moodit

TEM-moodit (transverse electromagnetic modes) ovat sähkömagneettisia aaltoja, joiden kentät ovat kohtisuorassa etenemissuuntaan nähden (siis $B_z = 0$, $E_z = 0$). Tällöin yhtälöistä 12.11-12.16 seuraa $\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0, \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = 0, \nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0, \nabla_t \times \mathbf{B}_t = 0$ ja kenttien laskeminen palautuu muodollisesti kaksiulotteiseksi statiikan ongelmaksi:

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t = 0, \nabla_t^2 \mathbf{B}_t = 0 \tag{12.17}$$

Havaitaan seuraavat seikat:

1) Aaltoluku $k$ on

$$k = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \tag{12.18}$$

2) Kentillä on 12.16:n mukaan samanlainen yhteys kuin tyhjön tasoaalloissa:

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{c}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \tag{12.19}$$

3) TEM-moodi ei voi edetä, jos sylinteri on ontto (sähkökenttä sisällä on täsmälleen nolla). Jos sylinteripintoja on useampia kuten koaksiaalikaapelissa, TEM-moodit voivat edetä.

4) TEM-moodilla ei ole **katkaisutaajuutta** (cut-off frequency) eli taajuutta, jolla aaltoluku häviäisi.

### TM- ja TE-moodit

Tarkastellaan onttoa sylinteriä, jossa ei siis ole TEM-moodeja. Oletetaan nyt, että kentillä on etenemissuuntaiset ($z$-)komponentit. Kentät voidaan jakaa kahteen toisistaan riippumattomaan moodiin:

1) TM-moodit (transverse magnetic modes):
$B_z = 0$ kaikkialla
$E_z = 0$ sylinterin pinnalla

2) TE-moodit (transverse electric modes):
$E_z = 0$ kaikkialla
$\partial B_z/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla_t B_z = 0$ sylinterin pinnalla (HT).

**Huom.** Kirjallisuus on moodien nimityksessä varsin sekava.

Tarkastellaan ensin TM-moodeja ja oletetaan $z$- ja $t$-riippuvuus $e^{i(kz-\omega t)}$. Lausutaan $\mathbf{B}_t$ ja $\mathbf{E}_t$ $E_z$:n avulla (vrt. 12.11, 12.14, 12.16):

$$\mathbf{B}_t = \frac{\omega}{kc^2}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \tag{12.20}$$

ja

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t E_z \tag{12.21}$$

missä on merkitty

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \tag{12.22}$$

$E_z$ ratkaistaan yhtälöstä 12.7:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)E_z = 0 \tag{12.23}$$

Samalla tavalla käsitellään TE-moodeja, ja saadaan (HT)

$$\mathbf{E}_t = \frac{\omega}{k}\mathbf{B}_t \times \mathbf{e}_z \tag{12.24}$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t B_z \tag{12.25}$$

missä $B_z$ toteuttaa yhtälön 12.7:

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)B_z = 0 \tag{12.26}$$

Suureen $\gamma^2$:n on oltava positiivinen, jotta $E_z$ ja $B_z$ ovat värähteleviä ja reunaehdot voivat toteutua. Yhtälöiden ratkaisuja vastaa joukko ominaisarvoja $\gamma_p$, joita puolestaan vastaavat aaltoluvut $k_p$. Katkaisutaajuus saadaan määritelmän mukaan asettamalla $k^2$ nollaksi, jolloin

$$\omega_p = c\gamma_p = \gamma_p/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \tag{12.27}$$

Aaltoluku on tällöin

$$k_p = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \tag{12.28}$$

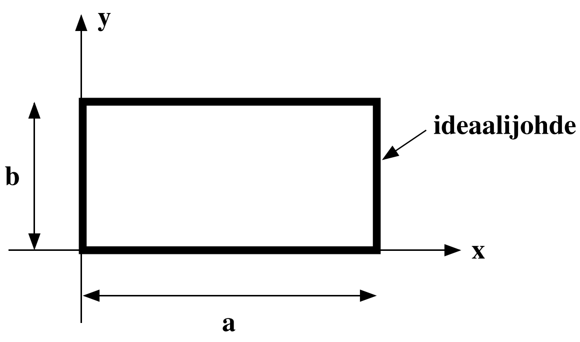
Jos taajuus on alle katkaisutaajuuden, aaltomoodi on eksponentiaalisesti vaimeneva, eikä siis etene.

## 12.2 Suorakulmainen aaltoputki

Erikoistapauksena tutkitaan suorakulmaisessa aaltoputkessa eteneviä TE-moodeja (kuva 12.1). Ratkaistaan ensin $B_z$:n Helmholtzin yhtälö

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2)B_z = 0 \tag{12.29}$$

reunaehdoin $\partial B_z/\partial n = 0$, kun $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.




Kuva 12.1: Aaltoputki, jonka poikkileikkaus on suorakaide.

Sähköstatiikan menetelmiä muistellen tehdään separointiyrite $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$, jolloin saadaan

$$X'' + p^2 X = 0,\ Y'' + q^2 Y = 0 \tag{12.30}$$

missä $p^2$ on separointivakio ja $q^2 = \gamma^2 - p^2$. Ratkaisu on

$$B_z(x, y) = B_0(e^{ipx} + Ce^{-ipx})(e^{iqy} + De^{-iqy}) \tag{12.31}$$

missä $B_0$, $C$ ja $D$ ovat vakioita. Reunaehdot toteutuvat, jos

$$\begin{aligned} C = D &= 1 \\ \sin pa = 0 &\Rightarrow p = m\pi/a, m = 0, 1, 2, ... \\ \sin qb = 0 &\Rightarrow q = n\pi/b, n = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{12.32}$$

Yhtälön ominaisarvot ovat siis

$$\gamma_{mn}^2 = p^2 + q^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2) \tag{12.33}$$

joita vastaavat ratkaisut ovat

$$B_{z,mn}(x, y) = B_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \tag{12.34}$$

Katkaisutaajuudet ovat

$$\omega_{mn} = c\gamma_{mn} = \pi c\sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2} \tag{12.35}$$

Jos $a > b$, niin matalin katkaisutaajuus on $\omega_{10} = \pi c/a$. Tämän $TE_{10}$-moodin $B_z$-komponentti on

$$B_z = B_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{i(kz-\omega t)} \tag{12.36}$$

ja muut komponentit saadaan yhtälöistä 12.24 ja 12.25:

$$\mathbf{B}_t = -\frac{ika}{\pi} B_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_x \tag{12.37}$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{i\omega a}{\pi} B_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_y \tag{12.38}$$

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{10}^2}}{c} \tag{12.39}$$

Vastaavalla tavalla käsitellään $z$-akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto ($e^{-ikz}$).

## 12.3 Resonanssikaviteetit

Tarkastellaan äärellisen pituisia sylinterimäisiä aaltoputkia (kaviteetteja, onkaloita), joiden päissä on täydellisesti johtavat seinät. Sisällä oleva aine on johtamatonta sähkömagneettisin parametrein $\mu_0$, $\epsilon_0$. Resonanssikaviteetti on onkalo, jonka pituus on jonkin aaltoputken moodin aallonpituuden monikerta. Kenttien $z$-riippuvuus on muotoa $A \sin kz + B \cos kz$ (seisovat aallot eli $e^{+ikz}$ ja $e^{-ikz}$- aaltojen summa). Jos päädyt ovat tasoilla $z = 0$ ja $z = d$, niin reunaehdot voivat sekä TM- että TE-moodeille toteutua vain, jos $k = \pi p/d$, $p = 0, 1, 2, ...$ Silloin

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \tag{12.40}$$

eli jokaisella $p$ ominaisarvoa $\gamma_q$ vastaa ominaistaajuus $\omega_{qp}$:

$$\omega_{qp}^2 = c^2(\gamma_q^2 + \frac{\pi^2 p^2}{d^2}) \tag{12.41}$$

Ominaisarvot määräytyvät systeemin geometriasta. Havaitaan seuraava ero aaltoputkien ja resonanssikaviteettien välillä: aaltoputkissa taajuus $\omega$ voi saada minkä tahansa katkaisutaajuutta suuremman arvon. Kaviteetissa taajuus saa vain diskreettejä arvoja.

TM- ja TE-moodit voidaan käsitellä käyttämällä suoraan aaltoputkille saatuja tuloksia laskemalla sopivasti yhteen $e^{+ikz}$- ja $e^{-ikz}$-aaltoja. Esimerkiksi TM-moodilla sähkökentän tangentiaalikomponentin häviäminen pinnoilla $z = 0$ ja $z = d$ vaatii, että

$$E_z = \psi(x, y) \cos\frac{\pi p z}{d} \tag{12.42}$$

koska silloin

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\pi p}{\gamma^2 d} \sin\frac{\pi p z}{d} \nabla_t \psi(x, y) \tag{12.43}$$

Funktio $\psi$ toteuttaa Helmholtzin yhtälön

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi(x,y) = 0 \tag{12.44}$$

Magneettikenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{B}_t = \frac{i\omega}{\gamma^2 c^2} \cos\frac{\pi p z}{d} \mathbf{e}_z \times \nabla_t \psi(x,y) \tag{12.45}$$

Hyödyllinen HT on osoittaa, että nämä lausekkeet toteuttavat kaikki Maxwellin yhtälöt. Reunaehdoista seuraa puolestaan lisäehtoja $\psi$:lle.

Esimerkkinä tarkastellaan ympyräsylinteriä (säde $R$). TM-moodissa $E_z$:n on hävittävä sylinterin pystyreunoilla eli sylinterikoordinaateissa $\psi(R,\phi) = 0$. Separointimenetelmällä saadaan fysikaalisesti kelvolliseksi ratkaisuksi

$$\psi(r,\phi) = \psi_{mn}(r,\phi) = AJ_m(\gamma_{mn} r)e^{\pm im\phi}\ ,\ m = 0,1,2,... \tag{12.46}$$

missä $J_m$ on Besselin funktio ja $\gamma_{mn} = x_{mn}/R$ ja $x_{mn}$ on yhtälön $J_m(x) = 0$ $n$:s juuri. Ominaistaajuudet ovat nyt

$$\omega_{mnp}^2 = c^2\left(\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 p^2}{d^2}\right) \tag{12.47}$$

Alin TM-moodi on $TM_{010}$, jossa $\omega_{010} \approx 2{,}405c/R$. Tämä on riippumaton sylinterin korkeudesta. Vastaavalla tavalla käsitellään TE-moodit (yksityiskohdat sivuutetaan). Niiden ominaistaajuuksissa on aina myös $d$-riippuvuus, joten taajuuksien säätäminen on helpompaa kuin TM-moodilla.

### Mikroaaltouuneista[1]

Mikroaallot ovat sähkömagneettista säteilyä aallonpituuksilla 1 mm-0,3 m (taajuus $10^9 - 3 \cdot 10^{11}$ Hz). Mikroaaltouunin käyttö ruuanvalmistuksessa perustuu siihen, että mikroaallot saavat ruoka-aineiden polaariset molekyylit pyörähtelemään. Kitkan takia osa pyörähdysenergiasta muuttuu lämmöksi. Mikroaaltouuneissa käytetään tyypillisesti aallonpituutta 12,2 cm (taajuus 2450 MHz), jolloin saavutetaan hyvä absorptio erityisesti vesimolekyylille. Oleellista on, että ruoka-aineiden pitää sisältää polaarisia molekyylejä. Polaarittomat aineet läpäisevät mikroaaltoja, ja metallit taas heijastavat niitä. Tyypillinen tunkeutumissyvyys ruoka-aineissa on muutaman senttimetrin luokkaa. Kypsennys tapahtuu siis suoraan ruuan sisällä, ellei annos ole kovin paksu, jolloin sisäosissa kuumennus tapahtuu johtumalla.

Mikroaaltouunin tärkein osa on luonnollisesti uunitila, jossa ruoka kuumennetaan ja joka siis on resonanssikaviteetti. Mikroaaltokenttä synnytetään

[1] Arkipäivän yleissivistystä

magnetronissa, josta kenttä johdetaan aaltoputkea pitkin uuniin. Magnetroni koostuu useasta resonanssiontelosta (sähköisestä värähtelypiiristä). Erillinen uunitila on tarpeen, koska näihin onteloihin ei mahdu ruokaa.

HT: Monissa uunimalleissa on ovessa verkko, jonka läpi näkee uunin sisälle. Koska siis näkyvä valo kulkee oviverkon läpi, voiko mikroaaltosäteily vuotaa ympäristöön?

# Luku 13

# Liikkuvan varauksen kenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvan varauksen aiheuttamaan kenttään. Jokaisen sähködynaamikon on laskettava ainakin kerran elämässään Liénardin ja Wiechertin potentiaalit ja kentät.

## 13.1 Liénardin ja Wiechertin potentiaalit

Tarkastellaan yksittäistä varauksellista hiukkasta, jonka rata on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$. Varaus- ja virrantiheys ovat tällöin

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) && (13.1)\\
\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= q\dot{\mathbf{r}}_q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) && (13.2)
\end{aligned}$$

Käyttökelpoisten potentiaalien laskeminen ei ole aivan helppo tehtävä. Hahmotellaan tässä ratkaisumenetelmä Greenin funktioita käyttäen (yksityiskohdat HT).

Tehtävänä on ratkaista epähomogeeniset aaltoyhtälöt

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi &= -\rho/\epsilon_0 && (13.3)\\
\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{J} && (13.4)
\end{aligned}$$

Kuten luvussa 9 todettiin, näiden ratkaisut ovat Greenin funktion avulla lausuttuina

$$\psi^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \int\int G^{\pm}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t')\, dV' dt' \qquad (13.5)$$

missä $\psi^{\pm}(\mathbf{r}, t)$ ovat viivästyneet (+) ja edistyneet (–) skalaaripotentiaalit tai vektoripotentiaalin karteesiset komponentit ja $f(\mathbf{r}', t')$ vastaa lähdetermejä

$(\rho/\epsilon_0, \mu_0 \mathbf{J})$. Nyt riittää käyttää viivästyneen potentiaalin Greenin funktiota

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{13.6}$$

Tekijä $4\pi$ on otettu Greenin funktion määritelmään, kun se luvussa 9 oli $G$:n aaltoyhtälössä.

Ensin integroidaan paikkaintegraalit lähdetermien $\delta$-funktioiden avulla. Sen jälkeen aikaintegraalia laskettaessa käytetään hyväksi tulosta

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{13.7}$$

missä $g(x_i) = 0$. Lopputuloksena saadaan **Liénardin ja Wiechertin potentiaalit**:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R}\right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}\right]_{ret} \tag{13.8}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R}\right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}\right]_{ret} \tag{13.9}$$

missä $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ja $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Alaindeksi $ret$ viittaa lausekkeen laskemiseen viivästyneellä ajalla $t'$, joka on ratkaistava ehdosta

$$t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|/c = t \tag{13.10}$$

Havaitsija siis mittaa kentän pisteessä $\mathbf{r}$ hetkellä $t$.

Kaikkein eleganteinta (?), joskaan ei sen helpompaa, on tehdä ylläoleva lasku relativistisessa formalismissa, missä $\varphi$ ja $\mathbf{A}$ ovat nelipotentiaalin $A^\alpha$ komponentit ja

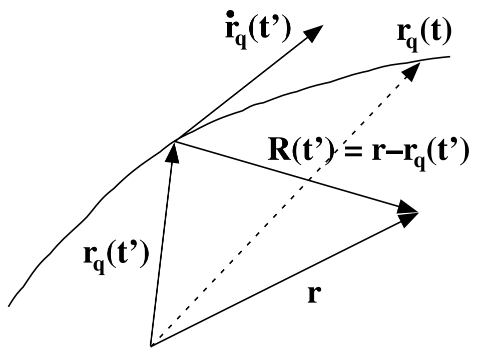
$$A^\alpha(x) = \int G(x - x') J^\alpha(x')\, d^4x' \tag{13.11}$$

(ks. Jackson tai CL luku 13.3).

## 13.2 Kenttien laskeminen

Kun potentiaalit tunnetaan, kentät saadaan derivoimalla, mikä vaatii kärsivällisyyttä. Hankaluuden aiheuttaa viivästyneen ajan implisiittisesti määrittelevä yhtälö 13.10. Aluksi kannattaa selvittää itselleen koordinaatisto (kuva 13.1). Sähkökenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\nabla(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2}\right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}\right] \tag{13.12}$$




Kuva 13.1: Varauksellisen hiukkasen liiketila hetkellä $t'$ määrää kentän myöhempänä hetkenä $t$. Kenttä etenee pisteestä $\mathbf{r}_q(t')$ havaintopisteeseen $\mathbf{r}$ ajassa $R(t')/c$, jolloin hiukkanen on ehtinyt radallaan pisteeseen $\mathbf{r}_q(t)$.

Hakasulku viittaa lausekkeen laskemiseen viivästetyllä ajalla (jätetään sulut pois välivaiheissa).

Aloitetaan $R(t')$:n derivoinnista: koska $t'$ riippuu paikkavektorista $\mathbf{r}$, niin $\nabla R(t') = -c\nabla t'$. Derivoidaan lauseketta 13.10 puolittain, jolloin esimerkiksi gradientin $x$-komponentti on

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x_q - c\boldsymbol{\beta}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)(\partial t'/\partial x)}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|} \tag{13.13}$$

Tässä on käytetty derivoinnin ketjusääntöä $\partial/\partial x = (\partial t'/\partial x)(\partial/\partial t')$. Nyt voidaan ratkaista

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-(x-x_q)}{c(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})} \tag{13.14}$$

joten

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})} \tag{13.15}$$

ja

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.16}$$

Tarvitaan myös $\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})$. Lasketaan taas $x$-komponentti:

$$(\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}))_x = \beta_x + \frac{\partial t'}{\partial x}(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{r}}_q) \tag{13.17}$$

Täten

$$\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}) = \boldsymbol{\beta} + (\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\mathbf{r}}_q)\nabla t' = \frac{(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{\beta} + (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{R-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.18}$$

Kokoamalla tulokset saadaan skalaaripotentiaalin gradientiksi

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{R} - (R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{\beta} - (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})^3}\right] \tag{13.19}$$

Vektoripotentiaalia varten täytyy laskea $\partial R/\partial t = c(1 - \partial t'/\partial t)$. Nyt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{13.20}$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.21}$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{cR\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}} \tag{13.22}$$

Vektoripotentiaalin lausekkeessa esiintyvä aikaderivaatta on siis

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R}}\right] = \left[\frac{R(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (R\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} + c\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R} - cR\beta^2)\boldsymbol{\beta}}{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})^3}\right] \tag{13.23}$$

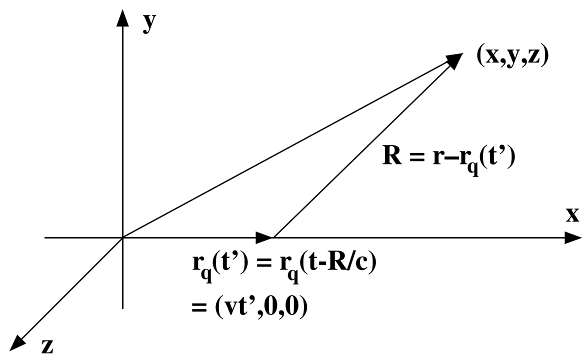
Sähkökentäksi saadaan lopulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(1-\beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R}\times((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})/c}{(R - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{R})^3}\right]_{ret} \tag{13.24}$$

Magneettikenttä on (HT)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{R}}{R}\right]_{ret}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{13.25}$$

Välittömästi todetaan, että staattisen varauksen ($\boldsymbol{\beta} = 0$) sähkökenttä on Coulombin kenttä. Silloin sähkökenttä on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{R}$ kanssa, joten staattinen varaus ei odotetusti aiheuta magneettikenttää. Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä on selvästi tekemisissä Lorentzin muunnoksen kanssa. **Säteilykentäksi** kutsutaan kiihtyvyyteen $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ verrannollista termiä, joka pienenee kaukana varauksesta kuten $1/R$ eli kertalukua hitaammin kuin Coulombin kenttä. Tästä seuraa erityisesti se, että säteilykentän Poyntingin vuo ei mene nollaan äärettömyydessäkään. Tarkastellaan näitä tilanteita seuraavassa yksityiskohtaisemmin.




Kuva 13.2: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen kentän laskeminen.

### 13.2.1 Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä

Tarkastellaan $x$-akselia pitkin vakionopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvan varauksen kenttää (kuva 13.2). Kenttä pisteessä $(x, y, z)$ lasketaan hetkellä $t$, jolloin varaus on ehtinyt pisteeseen $(vt, 0, 0)$ (varaus on ohittanut origon hetkellä $t = 0$).

Koska $R = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} = c(t - t')$, niin viivästynyt aika $t'$ saadaan lausekkeesta

$$(1 - \beta^2)t' = t - \beta x/c - (1/c)\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \tag{13.26}$$

jolloin

$$[R - \mathbf{R} \cdot \beta]_{ret} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \tag{13.27}$$

Skalaaripotentiaali voidaan nyt esittää muodossa

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} \tag{13.28}$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Vektoripotentiaalilla on vain $x$-komponentti

$$A_x(x, y, z, t) = \beta\varphi(x, y, z, t)/c \tag{13.29}$$

Varauksen lepokoordinaatistossa potentiaalilla on tuttu lauseke

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{13.30}$$

Liikkuvan varauksen potentiaali saadaan (melkein) koordinaattimuunnoksella, jossa $y$ ja $z$ pysyvät ennallaan ja $x$:stä tulee $\gamma(x - vt)$. Vielä jää mietittäväksi, mistä tekijä $\gamma$ ilmestyy kertomaan potentiaalia. Lisäksi täytyy selvittää, mistä vektoripotentiaali saadaan, kun se on nolla lepokoordinaatistossa. Tähän palataan suhteellisuusteoriassa, jossa **A**:n ja $\varphi$:n havaitaan yhdessä muodostavan nelivektorin.

Kentät saadaan derivoimalla (tällä kertaa helposti):

$$E_x(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x-vt)}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13.31}$$

$$E_y(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13.32}$$

$$E_z(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{(\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13.33}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}(x,y,z,t) \tag{13.34}$$

Nämä lausekkeet pätevät kaikilla nopeuksilla. Kaukana varauksesta kenttä heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön. Suurellakaan vakionopeudella liikkuva hiukkanen ei siis säteile.

Kenttää on mukavinta tarkastella varauksen kulloisenkin paikan suhteen. Kohtisuorassa suunnassa ($x - vt = 0$) sähkökentän voimakkuus on

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{y^2+z^2} \tag{13.35}$$

Tämä on Coulombin kenttä tekijällä $\gamma$ suurennettuna (aina $\gamma \geq 1$). Varauksen edessä ja takana $y = z = 0$ ja

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2(x-vt)^2} \tag{13.36}$$

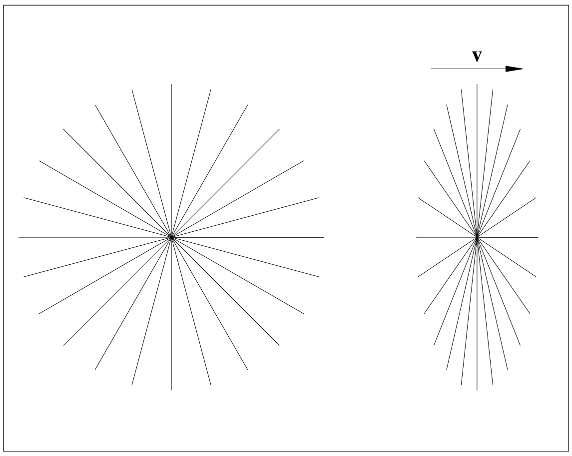
Tämä on puolestaan Coulombin kenttä tekijällä $1/\gamma^2$ pienennettynä.

Kenttäviivat saadaan piirtämällä ensin staattisen varauksen kenttäviivat ja sitten liikuttamalla kuviota suurella nopeudella silmien ohi, jolloin havaitaan Lorentz-kontraktio (ei onnistu kotioloissa kovin helposti). Vaihtoehtoisesti puristetaan $x$-akselia kasaan tekijän $\gamma$ verran (kuva 13.3). Kannattaa kuitenkin muistaa, että kenttäviivat eivät ole todellisia fysikaalisia olioita. Magneettikentän hahmottaminen jää lukijan mietittäväksi samoin kuin hitaasti liikkuvan varauksen magneettikentän osoittaminen samaksi kuin luvussa 5.

### 13.2.2 Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä

Tarkastellaan aluksi epärelativistista rajaa ($\beta \ll 1$), jolloin $1/R$-säteilykentiksi tulee

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})/R \tag{13.37}$$




Kuva 13.3: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen sähkökentän kenttäviivat. Vasemmalla staattinen varaus, oikealla liikkuva varaus.

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3}\,\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}/R \tag{13.38}$$

missä $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Näistä saadaan Poyntingin vektoriksi

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}|^2}{R^5}\mathbf{R} \tag{13.39}$$

Tämä vaimenee etäisyyden funktiona kuten $1/R^2$, joten Poyntingin vuo ei $1/R$-säteilykentillä mene nollaksi kaukanakaan varauksesta.

Säteilyteho avaruuskulmaan $d\Omega$ on

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2\dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta \tag{13.40}$$

missä $\theta$ on $\dot{\mathbf{v}}$:n ja $\mathbf{n}$:n välinen kulma. Laskemalla kulmaintegraalit saadaan **Larmorin kaava**

$$P = \frac{q^2\dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{13.41}$$

On oleellista ymmärtää, mistä verrannollisuus tekijään $(q\dot{\mathbf{v}})^2$ on peräisin.

Relativistisille hiukkasille $t$:n ja $t'$:n välinen ero on tärkeä[1]. Aikavälillä $t_1 = t'_1 + R(t'_1)/c ... t_2 = t'_2 + R(t'_2)/c$ säteilty energia on

$$W = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}]_{ret}\,dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\frac{dt}{dt'}dt' \tag{13.42}$$

[1]Tämän kappaleen loppu on yleissivistystä

On siis mielekästä määritellä hiukkasen säteilyn intensiteetti $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\; dt/dt' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\,(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ sen omassa ajassa ja omassa paikassa:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\left|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})\right|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \tag{13.43}$$

Kun $\beta \to 1$, niin $dP/d\Omega$:n nimittäjän merkitys kasvaa ja säteilykeila alkaa venyä hiukkasen liikkeen suuntaan. Maksimi-intensiteetti saavutetaan, kun $\theta_{max} \to 1/(2\gamma)$ ja keilan leveys on $\approx 1/\gamma$. Koska laskuissa ei ole tehty oletuksia kiihtyvyyden suunnasta, saadut kaavat kuvaavat sekä jarrutussäteilyä että syklotroni- ja synkrotronisäteilyä. Säteilyn kokonaisteho saadaan integroimalla kulmien yli (siis ei helposti) tai tekemällä Larmorin kaavalle Lorentzin muunnos (jos osataan suhteellisuusteoriaa). Lopputulos on

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c}\,\gamma^6(\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2) \tag{13.44}$$

Pienillä nopeuksilla tämä palautuu odotetusti epärelativistiseen tulokseen.

# Luku 14

# Elektrodynamiikka ja suhteellisuusteoria

Tämän luvun esitietoina oletetaan modernin fysiikan alkeista tai muualta tutut perustiedot Lorentzin muunnoksista jne. Koska tensorilaskenta ei ole kaikille ennestään tuttua, tässä luvussa esitellään joitain käytännön laskuissa tarvittavia perusasioita. Johdatus tensoreihin löytyy CL:n lisäksi kirjoista *Honkonen, Pitkänen, Perko*: Fysiikan matemaattiset apuneuvot (Limes, 1994) tai *Arfken & Weber*: Mathematical Methods for Physicists (Academic Press, 1995) sekä useista suhteellisuusteorian oppikirjoista.

## 14.1 Lorentzin muunnos

Suhteellisuusteoria ja elektrodynamiikka liittyvät läheisesti toisiinsa, mikä on tullut esiin useampaan kertaan. Koordinaatistomuunnosten merkitys elektrodynamiikassa ilmenee esimerkiksi tilanteessa, jossa on varauksia levossa tarkastelijan suhteen. Hän näkee niistä aiheutuvan sähkökentän, mutta ne eivät aiheuta hänen koordinaatistossaan magneettikenttää. Jos tarkastelija kuitenkin liikkuu varauksiin nähden, varaukset kuljettavat tarkastelijan näkökulmasta sähkövirtaa ja aiheuttavat magneettikentän. Niinpä sähkö- ja magneettikentät muuntuvat jollain tavoin toisikseen liikkeen seurauksena.

Ehkä vieläkin tärkeämpi esimerkki liittyy lukuun 7, jossa kuljetettiin johdetankoa magneettikentässä ja saatiin aikaan sähkökenttä. Siirrettiinpä tankoa magneettikentässä, kestomagneettia tangon suhteen tai muutettiin magneettikenttää ajan suhteen, kaikissa tapauksissa pätee *sama* Faradayn laki $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$. Siis vaikka kentät itsessään riippuvat liiketilasta, niitä toisiinsa sitova fysikaalinen laki on liikkeestä riippumatta sama.

Sähkömagneettisen aallon olemassaolo oli 1800-luvun lopulla kokeellinen tosiasia. Kysymys, missä koordinaatistossa sen nopeus on tasan $c$, oli ongelmallinen. Tähän liittyi kysymys eetteristä, johon mm. Maxwell oli itse uskonut ja joka oli hänelle ilmeisesti tärkein syy kentänmuutosvirran käyttöönottoon. Tämä pelasti myös jatkuvuusyhtälön, mikä oli tietenkin hyvä asia sinänsä. Vuosisadan loppupuolen havainnot tähden näennäisen paikan pienestä siirtymisestä Maan rataliikkeen suuntaan sekä kuuluisa Michelsonin ja Morleyn koe, jolla pyrittiin määrittämään Maan liikenopeus eetterin koordinaatistossa, kuitenkin viittasivat siihen, että valo etenee tyhjössä vakionopeudella havaitsijan koordinaatistosta riippumatta.

Klassisessa Galilei-muunnoksessa koordinaatisto $K'$ liikkuu koordinaatiston $K$ suhteen $x$-suuntaan vakionopeudella $v$ siten, että koordinaatistojen akselit ovat samansuuntaisia ja origot yhtyvät nollahetkellä. Tällöin muunnos $K \to K'$ on $x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$. Newtonin lait ovat samat molemmissa systeemeissä. Aaltoyhtälö ei ole kuitenkaan ole sama (HT).

Vuonna 1904 *Lorentz* huomasi, että varsin erikoinen koordinaatistomuunnos jätti Maxwellin yhtälöt samoiksi. Asian yksinkertaistamiseksi tarkastellaan homogeenista skalaarimuotoista aaltoyhtälöä, joka kuvaa valon nopeudella $(x, y, z)$-koordinaatistossa $K$ etenevää aaltoa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{14.1}$$

Olkoon $K'$ toinen koordinaatisto, joka liikkuu tasaisella nopeudella $v$ $x$-akselin suuntaan. **Lorentzin muunnos** on[1]

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) \end{aligned} \tag{14.2}$$

Osittaisderivaatat muuntuvat muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} \tag{14.3}$$

[1]Suhteellisuusteoreetikot käyttävät yleensä yksikköjärjestelmää, jossa $c = 1$. Me emme tee niin.

Sijoitetaan nämä aaltoyhtälöön (HT), jolloin saadaan koordinaatistossa $K'$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2} \tag{14.4}$$

eli aalto etenee samalla nopeudella $c$ myös koordinaatistossa $K'$.

Lorentz ei ilmeisesti ymmärtänyt muunnoksen merkitystä. Ehkä se soti vastoin hänenkin käsitystään eetterin olemassaolosta. Suhteellisuusteorian merkityksen oivalsivat ensimmäisinä *Poincaré* ja *Einstein*. Poincaré oli jo vuonna 1899 esittänyt **suhteellisuusperiaatteen**, jonka mukaan *fysiikan lakien pitää olla samat toistensa suhteen tasaisessa liikkeessä olevissa koordinaatistoissa*. Vuonna 1905 Einstein lisäsi tähän postulaatin, että *valon nopeus tyhjössä on sama kaikissa koordinaatistoissa ja riippumaton valoa lähettävän kappaleen liikkeestä*. Suppeampi suhteellisuusteoria oli syntynyt.

Tarkastellaan Lorentzin muunnosta neliulotteisessa avaruudessa, jonka paikkavektori on $X = (ct, x, y, z)$. Sen koordinaatteja merkitään $x^\alpha$, missä $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Jatkossa käytetään kreikkalaisia indeksejä osoittamaan neliavaruuden komponentteja ja latinalaisia indeksejä tavallisen kolmiulotteisen kotiavaruuden komponenteille (1,2,3 tai $x, y, z$). Otetaan lisäksi käyttöön merkinnät $\beta = v/c$ sekä $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-(v/c)^2}$. Kaikilla vektoreilla (nelinopeus, nelivoima, neliliikemäärä jne.) on nyt neljä komponenttia. Esimerkiksi nelinopeus $u$ on

$$u = \frac{dX}{d\tau} \tag{14.5}$$

missä $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ on liikkeessä olevan olion **itseisaika** eli aika mitattuna sen omassa lepokoordinaatistossa.

Sellaiset muunnokset, jotka jättävät **neliömuodon**

$$I = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{14.6}$$

invariantiksi ($I = I'$) koordinaatistomuunnoksessa $K \to K'$, ovat Lorentzin muunnoksia. Tämän voi todeta esimerkiksi sähkömagneettiselle aallolle tilanteessa, jossa koordinaatistojen origot ovat samat hetkellä $t = 0$ ja $t' = 0$. Jos origosta lähtee tuolla hetkellä aalto, $I = 0$ aaltorintaman mukana kummassakin koordinaatistossa.

### Lorentz-muunnoksen johtaminen

Esitetään tässä täydellisyyden vuoksi yksi hyvin yleisiin periaatteisiin perustuva tapa johtaa Lorentz-muunnoskaavat (K. ja R. Kurki-Suonio, Vuorovaikuttavat kappaleet). Liikkukoon koordinaatisto $K'$ koordinaatiston $K$ suhteen vakionopeudella $\mathbf{v}$. Havaitsijat $O$ ja $O'$ havaitsevat saman tapahtuman ja määrittävät sen paikan ja hetken: $(x, y, z, t)$ ja $(x', y', z', t')$. Lisäksi oletetaan, että heillä on yhteinen fysikaalisiin ilmiöihin perustuva standardi, jonka perusteella he käyttävät samoja mittayksiköitä. Etsitään havaintojen välinen yhteys käyttäen neljää yleistä ehtoa.

**Ehto 1.** Aika ja avaruus ovat homogeenisia ja isotrooppisia. Kahden infinitesimaalisen lähekkäisen tapahtuman siirtymien ja aikavälien välinen muunnos $(\mathbf{dr}, dt) \leftrightarrow (\mathbf{dr}', dt')$ on silloin sama aina ja kaikkialla eli niiden välillä on lineaarinen yhteys. Tästä seuraa, että myös koordinaattien välinen yhteys on lineaarinen:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + e_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + e_2 \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + e_3 \\ t' &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t + e_4 \end{aligned}$$

missä $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$ ovat vakioita.

Yleisyyttä rajoittamatta voidaan sopia, että koordinaatistojen origot yhtyvät kummankin nollahetkellä. Voidaan myös sopia, että koordinaattiakselit ovat samansuuntaisia ja että $K'$ liikkuu $K$:n $x$-akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Tällöin yhtälöryhmä yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= hx + kt \end{aligned}$$

**Ehto 2.** Koordinaatistojen suhteellinen nopeus on kummankin havaitsijan mielestä sama. Tällöin $K'$:n origossa hetkellä $t'$ sattuva tapahtuma havaitaan $K$:ssa hetkellä $t$ pisteessä $x = vt$ tapahtuvaksi: $(vt, t) \leftrightarrow (0, t')$. Vaaditun symmetrian mukaan pätee vastaavasti $(0, t) \leftrightarrow (-vt', t')$. Sijoittamalla muunnoskaavoihin saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= avt + bt \\ t' &= hvt + kt \\ -vt' &= bt \\ t' &= kt \end{aligned}$$

Muunnos siis pelkistyy muotoon

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= k(t - \alpha x) \end{aligned}$$

missä $\alpha = h/k$.

**Ehto 3.** Valon nopeus $c$ on absoluuttinen. Tämä on ratkaiseva ero klassiseen Galilei-muunnokseen verrattuna. Ajatellaan, että yhteisellä nollahetkellä yhteisessä origossa tapahtuu valonvälähdys. Valon saapuminen mielivaltaisessa pisteessä olevaan ilmaisimeen havaitaan hetkillä $t$ ja $t'$. Tapahtumien vastaavuus on $(x = ct, t) \leftrightarrow (x' = ct', t')$, koska $c$ on sama kummankin havaitsijan mielestä. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} ct' &= k(ct - vt) \\ t' &= k(t - \alpha ct) \end{aligned}$$

ja voidaan ratkaista $\alpha = v/c^2$.

**Ehto 4.** Käänteismuunnos saadaan symmetrisesti vaihtamalla nopeuden etumerkki eli molempien inertiaalikoordinaatistojen on oltava samassa asemassa (vrt. ehto 2). Tällöin

$$\begin{aligned} x &= k(x' + vt') \\ t &= k(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

Näin voidaan ratkaista $k = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Lorentz-muunnoskaavat ovat siis

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned}$$

## 14.2 Tensorilaskentaa

Edellä ollut $x$-akselin suuntainen Lorentzin muunnos voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{14.7}$$

Merkitsemällä kerroinmatriisia $\Lambda$:lla tämä voidaan kirjoittaa tensorimuodossa

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{14.8}$$

missä on käytetty Einsteinin summaussääntöä eli toistetun indeksin yli summataan:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{14.9}$$

Tässä luvussa käytettävässä tensoriformalismissa indeksien paikka ja järjestys ovat tärkeitä[2]. Toisen kertaluvun tensoreilla indeksien järjestys kertoo, onko kyseessä tensorin matriisiesityksen vaakarivi vai pystyrivi. Vektoria, jolla on yläindeksi, kutsutaan **kontravariantiksi** vektoriksi ja alaindeksillä varustettua vektoria puolestaan **kovariantiksi** vektoriksi. Summaus tapahtuu *aina* ylä- ja alaindeksin välillä. Jos tensorilaskenta muotoillaan ilman ylä- ja alaindeksejä, siitä tulee teknisesti jonkin verran hankalampaa.

Kahdesta kontravariantista vektorista $u^{\mu}$ ja $v^{\nu}$ muodostetaan toisen kertaluvun **tensori** $T^{\mu\nu}$ suorana tulona, jonka komponentit muodostavat matriisin $u^{\mu}v^{\nu}$. Tensori $T^{\mu\nu}$ muuntuu siis seuraavasti:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta} \tag{14.10}$$

Muotoillaan määritelmä yleisemmin: jokaista suuretta $T^{\alpha\beta}$, joka muuntuu tällä tavalla Lorentz-muunnoksessa, sanotaan 2. kertaluvun (kontravariantiksi) tensoriksi.

Kahden kontravariantin nelivektorin pistetulo määritellään puolestaan

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta} \tag{14.11}$$

missä

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14.12}$$

on **metrinen perustensori**. Se on symmetrinen ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$) ja sillä on käänteismatriisi $g^{\alpha\beta}$ eli $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}$, missä $\delta^{\alpha}{}_{\gamma}$ on yksikkötensori eli Kroneckerin deltan neliulotteinen vastine, jolle $\delta^{\alpha}{}_{\gamma} = 1$, kun $\alpha = \gamma$ ja muulloin $\delta^{\alpha}{}_{\gamma} = 0$.

Metrisellä perustensorilla on tärkeä laskutekninen rooli. Koska summaus tapahtuu aina ylä- ja alaindeksin välillä, täytyy esimerkiksi kahden kontravariantin vektorin pistetuloa laskettaessa toinen muuntaa kovariantiksi eli laskea sen indeksi alas, mikä tapahtuu seuraavasti:

$$v^{\beta} = g^{\alpha\beta} v_{\alpha};\ \ v_{\beta} = g_{\alpha\beta}\, v^{\alpha} \tag{14.13}$$

Edellä oleva pistetulo (14.11) on siis

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^{\alpha} B^{\beta} = A_{\beta} B^{\beta} = A^{\alpha} B_{\alpha} \tag{14.14}$$

[2] Käsin kirjoitettaessa kannattaa "tyhjä" indeksi merkitä vaikka pisteellä: $\Lambda^{\mu\cdot}_{\cdot\nu}$

Samalla tavalla nostetaan ja lasketaan toisen tai korkeamman kertaluvun tensoreiden indeksejä:

$$T_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\omega}T^{\omega\beta} \tag{14.15}$$

**Huom.** Metrisen perustensorin komponenttien ±-merkit määritellään joko näin tai päinvastoin. Valinnalla ei ole fysikaalista merkitystä, mutta laskettaessa on pidettävä kiinni tehdystä valinnasta. Lisäksi indeksit on syytä kirjoittaa selvästi peräkkäin, etteivät vaaka- ja pystyrivit mene sekaisin.

Invariantti neliömuoto $I$ ennen Lorentzin muunnosta on

$$I = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \tag{14.16}$$

ja Lorentzin muunnoksen jälkeen ($x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$)

$$I' = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta \tag{14.17}$$

Vaatimus $I = I'$ antaa ehdon

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \tag{14.18}$$

tai

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu = g^{\alpha\beta} \tag{14.19}$$

Vain sellaiset muunnokset, jotka toteuttavat tämän yhtälön, ovat Lorentzin muunnoksia. Yleisessä lineaarisessa muunnoksessa on 16 vapaata parametria ja ehdossa (14.19) on 10 eri yhtälöä, joten Lorentzin muunnoksessa on kuusi vapaata parametria: pusku jokaisen (kolmiavaruuden) koordinaattiakselin suuntaan ja kierto jokaisen akselin ympäri.

Määritetään vielä $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\gamma$. Merkitään $M^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta}\Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma}$ ja kerrotaan puolittain $\Lambda^\mu{}_\alpha$:lla:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha M^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma} = g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma} = \delta^\mu{}_\gamma$$

joten

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\gamma = g^{\alpha\beta}\Lambda^\nu{}_\beta g_{\nu\gamma} = \Lambda_\gamma{}^\alpha \tag{14.20}$$

HT: laske $\Lambda^{-1}$ $x$-akselin suuntaisen Lorentz-muunnoksen tapauksessa.

## 14.3 Lorentzin muunnokset ja dynamiikka

Vaikka suhteellisuusteorian fysikaalinen perusta onkin elektrodynamiikassa – valon nopeushan on nimenomaan sähkömagneettisen aallon nopeus, Lorentzin muunnokset, ajan venyminen jne. ovat useille tutumpia mekaanisen liikkeen avulla annetuissa esimerkeissä.

Valon nopeus on rajanopeus, jolla vain massaton hiukkanen voi edetä. Sitä ei voi saavuttaa laskemalla yhteen nopeuksia, jotka ovat alle valon nopeuden, eli esimerkiksi tekemällä kaksi Lorentz-muunnosta peräkkäin. Yhtälöt (14.2) kuvaavat muunnosta koordinaatistoon $K'$, joka liikkuu nopeudella $v$ koordinaatiston $K$ suhteen. Liikkukoon sitten koordinaatisto $K''$ nopeudella $v'$ koordinaatiston $K'$ suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\,(x'-v't') \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\left(t'-\frac{v'}{c^2}\,x'\right) \end{aligned} \tag{14.21}$$

Sijoittamalla tähän systeemin $K'$ (yhdellä pilkulla merkityt) koordinaatit muunnoksen (14.2) mukaisesti saadaan yhdistetty muunnos

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\,(x-wt) \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\left(t-\frac{w}{c^2}\,x\right) \end{aligned} \tag{14.22}$$

missä

$$w = \frac{v+v'}{1+vv'/c^2} \tag{14.23}$$

Tämä on **nopeuksien yhteenlaskukaava**. Olivatpa $v$ ja $v'$ kuinka lähellä valon nopeutta tahansa, niiden summa jää kuitenkin alle valon nopeuden. Tämä on itse asiassa seuraus siitä, että Lorentzin muunnokset muodostavat matemaattisesti ryhmän. Yhdistämällä kaksi muunnosta saadaan uusi Lorentzin muunnos, tässä tapauksessa koordinaatistosta $K$ koordinaatistoon $K''$, joiden suhteellinen nopeus on $w$.

**Suppea suhteellisuusperiaate** voidaan ilmaista sanomalla, että *kaikki Lorentzin muunnosten yhdistämät inertiaalijärjestelmät ovat samanarvoisia kaikkien fysikaalisten tapahtumien kuvailussa.* Tämä jättää kiihtyvät koordinaatistot tarkastelun ulkopuolelle. Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti tavallista massapistemekaniikkaa suhteellisuusperiaatteen valossa.

Kutsutaan massapisteen (hiukkasen) liikerataa neliavaruudessa sen **maailmanviivaksi** ja merkitään sen koordinaatteja $x^\mu$. Differentiaalit $dx^\mu$ määrittävät hiukkasen differentiaalisen siirtymän pitkin maailmanviivaa. Muodostetaan sitten Lorentz-invariantti skalaarisuure

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{14.24}$$

joka on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Tarkastellaan nyt hiukkasta koordinaatistossa, jossa se on hetkellisesti levossa. Tällöin

$$dx' = (dx'^0, 0, 0, 0) \tag{14.25}$$

eli tässä koordinaatistossa vain aika kuluu. Nyt

$$ds^2 = g_{00}(dx'^0)^2 = c^2(dt')^2 \tag{14.26}$$

Ajanlaatuinen suure $ds/c$ on invariantti aikaväli hiukkasen hetkellisessä lepokoordinaatistossa eli se on hiukkasen mukana liikkuvan kellon mittaama aikaväli. Määritellään kiinteästä maailmanpisteestä $s_A$ laskettu hiukkasen **ominaisaika** integraalina

$$\tau = \frac{1}{c}\int_{s_A}^{s} ds = \int_{t_A}^{t} dt \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{14.27}$$

Tässä esiintyy kolminopeus $\mathbf{v}$ koordinaatistossa $K$:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) \tag{14.28}$$

Ominaisajan differentiaalinen muoto on sama kuin luvussa 14.1 mainittu

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = dt \tag{14.29}$$

joka kuvaa ajan venymistä liikkeessä olevassa koordinaatistossa.

Hiukkasen **nelinopeus** $u$ määritellään sen nelipaikan derivaattana ominaisajan suhteen. Sen komponentit ovat

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{14.30}$$

Kolminopeuden avulla ilmaistuna tämä on $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$. Suoralla laskulla nähdään, että nelinopeuden neliö on invariantti:

$$u^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2 \tag{14.31}$$

Vastaavasti määritellään **nelikiihtyvyys**

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \tag{14.32}$$

Nelinopeus on nelivektori, koska $x^\mu$ on nelivektori ja $d/d\tau$ on invariantti. Tällöin myös nelikiihtyvyys on nelivektori.

Tarkastellaan sitten Newtonin liikeyhtälöä

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{14.33}$$

missä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ on liikemäärä. Tämä on kuitenkin Galilei-invariantti yhtälö, missä mikään ei rajoita nopeutta alle valon nopeuden. Muodostetaan nelivektoriyhtälö

$$m_0 \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu \tag{14.34}$$

missä $m_0$ on massanlaatuinen vakiosuure ja $K^\mu$ **nelivoima**. Jotta tämä olisi kelvollinen liikeyhtälö pienen nopeuden rajalla (sama asia kuin raja $c \to \infty$), sen avaruusosasta on saatava Newtonin liikeyhtälö. Käyttäen koordinaattiaikaa $t$ kirjoitetaan yhtälön avaruuskomponentit muodossa

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = K^i \sqrt{1-\beta^2} \tag{14.35}$$

Jos ulkoinen voima on nolla, liikemäärä on vakio, joten liikemäärän määritelmäksi tulee

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.36}$$

joka rajalla $\beta \to 0$ vastaa Newtonin mekaniikan liikemäärää. Näin kolmivoiman ja nelivoiman välinen yhteys on

$$F^i = K^i \sqrt{1-\beta^2} \tag{14.37}$$

Liikeyhtälön (14.34) nollannen komponentin määrittämiseksi kirjoitetaan se nelikiihtyvyyden $a^\mu$ avulla

$$m_0 a^\mu = K^\mu \tag{14.38}$$

Laskemalla nelikiihtyvyyden ja nelinopeuden pistetulo saadaan

$$g_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \tag{14.39}$$

eli nelikiihtyvyys ja nelinopeus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten myös

$$g_{\mu\nu} K^\mu u^\nu = 0 \tag{14.40}$$

Sijoittamalla tähän nelinopeuden komponentit ($u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$) ja nelivoiman avaruusosa jää jäljelle

$$\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} K^0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{F^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.41}$$

eli

$$K^0 = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.42}$$

Liikeyhtälön nollas komponentti on siis

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{14.43}$$

Hiukkasen liike-energia määritellään Newtonin mekaniikassa siten, että sen aikaderivaatta (teho) on $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. Tarkastellaan sitten energianlaatuista suuretta

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.44}$$

Binomisarjan avulla saadaan

$$W = m_0c^2\left[1+\frac{v^2}{2c^2}+\mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right] \tag{14.45}$$

Epärelativistisella rajalla ($\beta \to 0$) tästä tulee

$$W = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{14.46}$$

eli Newtonin mekaniikan mukainen $m_0$-massaisen hiukkasen liike-energia ja suure $m_0c^2$, jota kutsutaan $m_0$-massaisen hiukkasen **lepoenergiaksi**.

Nyt neliliikemäärä voidaan kirjoittaa muodossa

$$p = \left(\frac{W}{c}, \frac{m_0v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{14.47}$$

tai

$$p^\mu = m_0u^\mu \tag{14.48}$$

Tämän invariantiksi neliöksi saadaan

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = (m_0c)^2 = W^2/c^2 - \mathbf{p}^2 \tag{14.49}$$

Relativistiset liikeyhtälöt voi tiivistää muotoon

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = K^\mu \tag{14.50}$$

**Huom.** Hiukkasen **massa** on $m_0$. Sitä kutsutaan joskus lepomassaksi, mutta siihen ei ole mitään syytä, sillä massa $m_0$ on itseasiassa Lorentz-invariantti suure, joka määrittelee *lepoenergian* kaavalla

$$W_0 = \lim_{v\to 0} W = m_0c^2 \tag{14.51}$$

## 14.4 Elektrodynamiikan kovariantti formulointi

Tarkastellaan seuraavaksi Lorentzin voiman lauseketta muodossa

$$F^i = q(E^i + \epsilon^i{}_{jk} v^j B^k) \tag{14.52}$$

missä $\epsilon_{ijk}$ on permutaatiotensori ja summataan toistettujen indeksien yli (HT: kertaa $\epsilon_{ijk}$:n ominaisuudet). Varaus $q$ oletetaan invariantiksi säilymislain perusteella. Edellä saatiin hiukkasen liikeyhtälö muotoon

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \tag{14.53}$$

missä nelivoiman komponentit ovat

$$K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \ ; \ K^i = \gamma F^i \tag{14.54}$$

Oletetaan nyt, että kyseisen voiman avaruusosa on juuri Lorentzin voima. Kirjoitetaan liikeyhtälö komponenteittain. Aikakomponentista tulee

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma}{c} q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \tag{14.55}$$

eli kentän tekemä työ. Paikkakomponenteista saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dp^1}{d\tau} &= \gamma q \left( E^1 + (v^2 B^3 - v^3 B^2) \right) = q \left( \frac{E^1}{c} u^0 + u^2 B^3 - u^3 B^2 \right) \\
\frac{dp^2}{d\tau} &= \gamma q \left( E^2 + (v^3 B^1 - v^1 B^3) \right) = q \left( \frac{E^2}{c} u^0 + u^3 B^1 - u^1 B^3 \right) \\
\frac{dp^3}{d\tau} &= \gamma q \left( E^3 + (v^1 B^2 - v^2 B^1) \right) = q \left( \frac{E^3}{c} u^0 + u^1 B^2 - u^2 B^1 \right)
\end{aligned} \tag{14.56}$$

Aika- ja paikkakomponentit voidaan koota yhtälöiksi

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q u_\beta F^{\beta\mu} \tag{14.57}$$

missä $(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = (1/c)(E^1, E^2, E^3)$, $(F^{23}, F^{31}, F^{12}) = (B^1, B^2, B^3)$ ja $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Tästä saa suoralla laskulla liikeyhtälön komponentit.

Osoitetaan sitten, että $(F^{\mu\nu})$ on kelvollinen toisen kertaluvun tensori eli että se muuntuu oikein Lorentzin muunnoksissa. Todetaan aluksi, että kovariantin vektorin muunnos on $u'_\beta = \Lambda_\beta{}^\alpha u_\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta u_\alpha$, minkä voi päätellä suoraan muunnoskaavojen avulla. Sen näkee teknisemminkin nostamalla ja laskemalla indeksejä perustensorin avulla: $u'_\beta = g_{\mu\beta} u'^\mu = g_{\mu\beta} \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu =$

$g_{\mu\beta}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}g^{\nu\alpha}u_{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}u_{\alpha}$, missä käytettiin lopuksi tulosta 14.20. Muunnettu liikeyhtälö on siis

$$\frac{dp'^{\mu}}{d\tau} = qu'_{\beta}F'^{\,\beta\mu}$$

$$\Leftrightarrow\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\frac{dp^{\nu}}{d\tau} = q\Lambda_{\beta}{}^{\alpha}u_{\alpha}F'^{\,\beta\mu} = q\Lambda^{\mu}{}_{\nu}u_{\alpha}F^{\alpha\nu}$$

$$\Rightarrow\ \Lambda_{\beta}{}^{\alpha}F'^{\,\beta\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu}$$

$$\Leftrightarrow\ (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}F'^{\,\beta\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu}$$

$$\Leftrightarrow\ \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta}F'^{\,\beta\mu} = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu}$$

$$\Leftrightarrow\ F'^{\,\gamma\mu} = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\alpha\nu} \tag{14.58}$$

Tensoria $(F^{\mu\nu})$ kutsutaan **sähkömagneettiseksi kenttätensoriksi** ja sen komponentit ovat

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.59}$$

Kirjoitetaan sitten Maxwellin yhtälöt kenttätensorin komponenttien avulla. Määritellään ensin operaattori $\partial_{\alpha}$: $\partial/\partial x^{\alpha} = (\partial/\partial x^0, \nabla)$. Vastaavasti $\partial^{\alpha} = \partial/\partial x_{\alpha} = (\partial/\partial x_0, -\nabla)$. Indeksien sijoittelu on loogista: $\partial_{\alpha}$ muuntuu kuten kovariantti vektori, koska $\partial/\partial x'^{\alpha} = (\partial x^{\beta}/\partial x'^{\alpha})\partial x^{\beta}$.

Nyt $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \equiv \mu_0 c^2 \rho$ tulee muotoon

$$\partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = \mu_0 c\rho \tag{14.60}$$

Ampèren ja Maxwellin lain kolme komponenttia ovat puolestaan

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{10} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} &= \mu_0 j^1 \\ \partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_3 F^{23} &= \mu_0 j^2 \\ \partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} &= \mu_0 j^3 \end{aligned} \tag{14.61}$$

Ottamalla käyttöön **nelivirta** $J = (j^{\mu}) = (c\rho, \mathbf{J})$ voidaan nämä yhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\mu} \tag{14.62}$$

Nelivirta on nelivektori, joten varaustiheys $\rho$ ja virrantiheys $\mathbf{J}$ muuntuvat samalla tavalla kuin aika $t$ ja paikka $\mathbf{r}$. Homogeeniset yhtälöt ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$) saadaan muotoon (HT)

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{14.63}$$

Koska Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa tensoriyhtälöinä, ne säilyttävät muotonsa Lorentzin muunnoksissa. Näin siis Maxwellin 1860-luvulla kehittämä teoria on osoittautunut ensimmäiseksi suppeamman suhteellisuusteorian kanssa sopusoinnussa olevaksi fysiikan kuvailuksi.

HT: Totea toisen kertaluvun tensoreiden muunnoskaavojen avulla, että suure $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ on invariantti Lorentz-muunnoksessa. Lausu sitten tämä suure kenttien avulla.

## 14.5 Kenttien muunnokset

Elektrodynamiikan Lorentz-kovarianssi tarkoittaa siis sitä, että Maxwellin yhtälöt ovat samat inertiaalikoordinaatistosta riippumatta. Sitävastoin sähkö- ja magneettikentät riippuvat havaitsijan liiketilasta. Muunnosten täytyy olla sellaiset, että sijoitettaessa muunnetut kentät Maxwellin yhtälöihin tuloksena ovat alkuperäiset yhtälöt. Kaikki tämä on jo edellisen kappaleen formalismin sisällä, mutta johdetaan tässä vielä kenttien muunnoskaavat.

Valitaan koordinaattiakselit siten, että koordinaatistojen välinen suhteellinen nopeus $\mathbf{v}$ on $x$-akselin suuntainen. Muunnosmatriisi on tällöin

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.64}$$

Muuntumaton sähkökentän 1-komponentti on $F^{01} = E^1/c$, mikä nähdään laskemalla $F'^{\,01}$:

$$\begin{aligned} F'^{\,01} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_0F^{00} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1F^{11} \\ &= \gamma^2\frac{1}{c}E^1 + \beta^2\gamma^2(-\frac{1}{c}E^1) \quad \Rightarrow \quad E'^1 = E^1 \end{aligned} \tag{14.65}$$

Siis puskun suuntainen sähkökenttä säilyy ennallaan. Lasketaan seuraavaksi $F^{02} = E^2/c$:n muunnos:

$$\begin{aligned} F'^{\,02} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^2{}_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^0{}_0\Lambda^2{}_0F^{02} + \Lambda^0{}_0\Lambda^2{}_2F^{02} + \Lambda^0{}_1\Lambda^2{}_2F^{12} \\ &= \gamma\frac{1}{c}E^2 - \beta\gamma B^3 \quad \Rightarrow \quad E'^2 = \gamma E^2 - \gamma v B^3 \end{aligned} \tag{14.66}$$

Vastaavat laskut komponentille $E^3$ ja magneettikentän komponenteille antavat muunnoskaavat

$$\mathbf{E}'_{\|}(\mathbf{r}',t') = \mathbf{E}_{\|}(\mathbf{r},t) \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}',t') = \gamma(\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))$$
$$\mathbf{B}'_{\|}(\mathbf{r}',t') = \mathbf{B}_{\|}(\mathbf{r},t) \quad ; \quad \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}',t') = \gamma(\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) \tag{14.67}$$

missä $\|$ ja $\perp$ viittaavat $\mathbf{v}$:n suuntaisiin ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin.

**Esimerkki. Liikkuvan varauksen kenttä**

Käsitellään luvun 13.2.1 esimerkki suhteellisuusteorian keinoin. Pistevaraus liikkuu nopeudella $v$ $x$-akselia pitkin pilkuttomassa tarkkailijan koordinaatistossa, jossa halutaan määrittää kentät. Olkoon pilkullinen koordinaatisto sellainen, että se liikkuu varauksen mukana ja sen origo olkoon varauksen kohdalla. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' &= 0\\ \mathbf{E}' &= \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}\end{aligned} \tag{14.68}$$

Käytetään edellä johdettuja muunnoskaavoja (käänteisesti!):

$$\begin{aligned}E_x = E_{\|} = E'_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}\\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\gamma q\mathbf{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0(r')^3}\end{aligned} \tag{14.69}$$

Vektorin $\mathbf{r}'$ komponentit ovat

$$\mathbf{r}' = (\gamma(x-vt), y, z) \tag{14.70}$$

Määritellään suure

$$\gamma\mathbf{R}^* = (\gamma(x-vt), y, z) \tag{14.71}$$

jolloin sähkökentän komponentit ovat

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x-vt)}{\gamma^3(R^*)^3}\\ E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma y}{\gamma^3(R^*)^3}\\ E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z}{\gamma^3(R^*)^3}\end{aligned} \tag{14.72}$$

eli koottuna vektoriksi

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3}(1-\beta^2) \tag{14.73}$$

missä $\mathbf{R} = (x - vt, y, z)$. Tämä on luvusta 13.2.1 tuttu tulos.

Magneettikentäksi tulee puolestaan

$$\begin{aligned} B_x &= B_\parallel = 0 \\ \mathbf{B}_\perp &= \gamma\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}' = \gamma\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_\perp = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}_\perp \end{aligned} \tag{14.74}$$

eli

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E} \tag{14.75}$$

## 14.6 Potentiaalien muunnokset

Homogeeniset Maxwellin yhtälöt ovat luvussa 14.4 opitun mukaan

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{14.76}$$

Nämä yhtälöt ovat välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että on olemassa **nelipotentiaali** $A_\mu$, jolle

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \tag{14.77}$$

Suoralla laskulla nähdään, että näin esitetty $F_{\mu\nu}$ toteuttaa homogeeniset Maxwellin yhtälöt eli välttämättömyysehto on voimassa. Riittävyysehdon todistaminen sivuutetaan (ks. CL).

Nostamalla indeksit saadaan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{14.78}$$

Muistamalla kenttätensorin määritelmä ja kenttien esitys potentiaalien avulla saadaan nelipotentiaali

$$(A^\mu) = (\varphi/c, \mathbf{A}) \tag{14.79}$$

joka toteuttaa aaltoyhtälön

$$\partial_\gamma\partial^\gamma A^\nu - \partial^\nu(\partial_\alpha A^\alpha) = \mu_0 j^\nu \tag{14.80}$$

Valitsemalla Lorenzin mittaehto ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$) tämä palautuu tutuksi aaltoyhtälöksi.

Todetaan lopuksi, että nelipotentiaali yleensä ajatellaan nelivektoriksi. Tämä on oikeutettua, vaikkakaan ei välttämätöntä. Voidaan osoittaa, että nelipotentiaali muuntuu mittamuunnosta vaille nelivektorina (ks. CL).

## 14.7 Säilymislait

Luvussa 9 esitettiin energian, liikemäärän ja impulssimomentin säilymislait kolmiavaruuden Maxwellin jännitystensorin avulla. Esitetään nämä säilymislait nyt kovariantissa muodossa.

Lorentzin voimatiheys on

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{14.81}$$

Olkoon $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$. Tällöin

$$\begin{aligned} f^1 &= \rho E^1 + j^2 B^3 - j^3 B^2 \\ &= c\rho F^{01} + j^2 F^{12} - j^3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} - j_2 F^{12} + j_3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} + j_2 F^{21} + j_3 F^{31} \end{aligned} \tag{14.82}$$

sillä $(j^0, j^1, j^2, j^3) = (j_0, -j_1, -j_2, -j_3)$. Koska $F^{\alpha\alpha} = 0$, niin

$$f^i = j_\alpha F^{\alpha i} \tag{14.83}$$

Lorentzin voimatiheys on siten nelivektorin $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$ avaruusosa. 0-komponentti on puolestaan

$$f^0 = j_\alpha F^{\alpha 0} = -F^{0\alpha} j_\alpha = \frac{1}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \tag{14.84}$$

eli tehohäviö tilavuusyksikössä. Koska

$$j_\alpha = g_{\alpha\beta} j^\beta = \frac{1}{\mu_0} g_{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\beta\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F_\alpha{}^\nu \tag{14.85}$$

voidaan nelivoima kirjoittaa muodossa

$$f^\mu = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha{}^\nu) F^{\alpha\mu} \tag{14.86}$$

Määritellään (jälkiviisaasti) symmetrinen tensori $(T^{\nu\mu})$

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} [F_\alpha{}^\nu F^{\alpha\mu} - \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] = T^{\mu\nu} \tag{14.87}$$

Nyt pieni indeksijumppa antaa tuloksen

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha{}^\nu) F^{\alpha\mu} = f^\mu \tag{14.88}$$

$(T^{\mu\nu})$ on siis sellainen tensori, jonka divergenssi antaa Lorentzin nelivoimatiheyden. Tensori on Maxwellin jännitystensorin yleistys neliavaruudessa.

Tämän toteamiseksi lasketaan tensorin komponentit. Tensorin määritelmässä on mukana invariantti $-(1/4)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = (1/2)((E/c)^2 - B^2)$, joka tulee mukaan diagonaalisiin termeihin. Nyt

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0}\left[F_\alpha{}^0 F^{\alpha_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}E^2 - B^2\right)\right] = -\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) \tag{14.89}$$

eli kentän energiatiheys $w_{em} = -T^{00}$.

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0}F_\alpha{}^0 F^{\alpha i} = \ldots (HT) \ldots = -\frac{1}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})^i = -\frac{1}{c}S^i \tag{14.90}$$

ovat puolestaan Poyntingin vektorin komponentit. Pelkästään avaruusosia sisältävät komponentit ovat

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \frac{1}{\mu_0}\left[F_\alpha{}^k F^{\alpha_l} + g^{kl}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}E^2 - B^2\right)\right] \\ &= \epsilon_0 E^k E^l + g^{kl}\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}B^k B^l + g^{kl}\frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= T_e^{kl} + T_m^{kl} \end{aligned} \tag{14.91}$$

eli luvussa 9 johdetun Maxwellin jännitystensorin $\mathcal{T}$ sähköiset ja magneettiset komponentit. Tensori $T^{\alpha\beta}$ on Maxwellin jännistystensorin laajennus, koska sen $0\alpha$-komponentit antavat suoraan sekä sähkömagneettisen energiatiheyden että Poyntingin vektorin.

Tuloksista $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$ ja $f^\mu = \partial_\beta T^{\beta\mu}$ saadaan yhtälö

$$\partial_\beta T^{\beta\mu} = j_\alpha F^{\alpha\mu} \tag{14.92}$$

Tämän nollas komponentti $\partial_\beta T^{\beta 0} = j_\alpha F^{\alpha 0}$ antaa

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \tag{14.93}$$

eli differentiaalisen energian säilymislain (Poyntingin teoreeman). Avaruuskomponentit $\partial_\beta T^{\beta i} = j_\alpha F^{\alpha i}$ puolestaan antavat liikemäärän säilymislain

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B})^l + \partial_k(T_e^{kl} + T_m^{kl}) = \rho E^l + (\mathbf{J}\times\mathbf{B})^l \tag{14.94}$$

Olemme siis onnistuneet kirjoittamaan olennaisesti koko klassisen mikroskooppisen elektrodynamiikan kovariantissa muodossa, kun väliaineeksi oletetaan tyhjö.

Luvussa 13 käsitelty liikkuvan varauksen säteily voidaan esittää hieman tyylikkäämmin tässä luvussa käsitellyssä formalismissa. Asiasta kiinnostuneita kehotetaan tutustumaan CL:n lukuun 13 tai Jacksonin säteilyteoriaa käsitteleviin lukuihin.

# Luku 15

# Varatun hiukkasen liike SM-kentässä

Tarkastellaan lopuksi varatun hiukkasen liikettä sähkömagneettisessa kentässä. Liikeyhtälö on tullut esiin useaan otteeseen kurssin aikana aiemminkin. Yleisesti asetettuna tehtävänä on ratkaista relativistinen liikeyhtälö

$$d\mathbf{p}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{15.1}$$

missä $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Lisäksi muistetaan, että kenttä tekee työtä teholla $dW/dt = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$. Liikeyhtälö on hankala integroitava yleisille ajasta ja paikasta riippuville kentille, joten se on yleensä ratkaistava numeerisesti. Jos aika- ja paikkariippuvuuksien voi olettaa olevan riittävän hitaita ja laakeita, on mahdollista käyttää häiriöteoriaa lähtien vakiokentistä ja tehdä niihin pieniä korjauksia.

## 15.1 Säteilyhäviöiden vaikutus

Liikeyhtälön käsittelyyn sisältyy hyvin vaikea ongelma. Jos hiukkasella on kiihtyvyyttä, se säteilee ja säteily kuljettaa mukanaan energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Varatun hiukkasen säteilyä kuitenkin tarkastellaan tyypillisesti kaksivaiheisesti. Ensin ratkaistaan liikeyhtälöstä hiukkasen rata annetussa ulkoisessa kentässä. Sen jälkeen lasketaan säteilyhäviöt olettaen, että hiukkanen pysyy ratkaistulla radallaan. Käytännössä monessa tilanteessa säteilyn vaikutus voidaankin jättää huomiotta.

Säteilyn merkitystä voidaan arvioida tutkimalla tilannetta, jossa hiukkasen (varaus $q$) kiihtyvyys on suuruusluokkaa $a$ ajan $T$ verran. Jos nopeus on paljon valon nopeutta pienempi, niin Larmorin kaavan perusteella hiukkasen säteilemä energia on

$$W_{rad} \sim \frac{q^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{15.2}$$

Jos kyseessä on levosta lähtenyt hiukkanen, niin silloin sen liike-energia on luokkaa $W_{kin} \sim m(aT)^2$. Siten

$$\frac{W_{rad}}{W_{kin}} \sim \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3 T} = \frac{\tau}{T} \tag{15.3}$$

missä $\tau = q^2/(6\pi\epsilon_0 mc^3)$ on karakteristinen aika. Varauksellisista hiukkasista se on suurin elektroneille ($\sim 10^{-23}$ s), missä ajassa valo etenee matkan $c\tau \sim 10^{-15}$ m. Jos taas kyseessä on jaksollinen liike amplitudilla $d$ ja kulmataajuudella $\omega$, niin $W_{kin} \sim m\omega^2 d^2$, $a \sim \omega^2 d$ ja $T \sim 1/\omega$. Silloin

$$W_{rad}/W_{kin} \sim \omega\tau \tag{15.4}$$

Yhteenvetona voi todeta, että säteilyhäviöt ovat lyhytkestoisessa liikkeessä merkittäviä vain, jos hiukkasen liike muuttuu ulkoisten voimien takia merkittävästi aikaskaalassa $\tau$ tai pituusskaalassa $c\tau$. Pitkäkestoisessa liikkeessä kumuloituvat säteilyhäviöt on puolestaan aina otettava huomioon.

## 15.2 Homogeeninen ja staattinen B

Oletetaan aluksi, että $\mathbf{E} = 0$ ja $\mathbf{B} =$ vakio. Rajoitutaan lisäksi epärelativistiseen tapaukseen $v << c$, jolloin

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{15.5}$$

Ottamalla tästä pistetulo **v**:n kanssa saadaan

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0 \tag{15.6}$$

Hiukkasen liike-energia ja nopeuden itseisarvo ovat siis vakioita. Valitaan koordinaatisto siten, että $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Tällöin

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \tag{15.7}$$

Magneettikentän suuntainen nopeus on siis vakio ($v_\parallel$).

Ratkaistaan liikeyhtälö alkuehdoilla $\mathbf{r}(0) = 0$ ja $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, v_\parallel)$. Määritellään **pyörähdystaajuus** eli **syklotronitaajuus** eli **Larmorin taajuus**

$$\omega_c = qB/m \tag{15.8}$$

Koska $\ddot{y} = -\omega_c \dot{x}$, niin integroimalla ja alkuehdot huomioimalla saadaan $v_y = -\omega_c x$. Tällöin yhtälöstä $\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$ seuraa

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \tag{15.9}$$

Yhtälö kuvaa harmonista värähtelyä, jonka kulmataajuus on $\omega_c$. Ratkaisemalla hiukkasen rata nähdään (HT), että ratakäyrän projektio $xy-$tasossa on ympyrä, jonka säde on

$$r_L = \frac{v_\perp}{|\omega_c|} = \frac{mv_\perp}{|q|B} \tag{15.10}$$

Tässä $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ on hiukkasen nopeus kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Sädettä $r_L$ kutsutaan **pyörähdyssäteeksi** (Larmorin säteeksi) ja pyörimisliikkeen keskipistettä **johtokeskukseksi** (guiding center, GC). Yhteen kierrokseen kuluva aika, **pyörähdysperiodi** (Larmorin aika), on

$$\tau_L = 2\pi/|\omega_c| \tag{15.11}$$

Katsottaessa magneettikentän suuntaan myötäpäivään pyörivän hiukkasen varaus on negatiivinen (HT).

Näin hiukkasen liike on jaettu kahteen komponenttiin: vakionopeus $v_\parallel$ kentän suuntaan ja pyörimisliike $v_\perp$ kenttää vastaan kohtisuoraan. Näiden summa on ruuviviiva. Ruuviviivan **nousukulma** määritellään kaavalla

$$\tan\alpha = v_\perp/v_\parallel \tag{15.12}$$

Koordinaatistoa, jossa $v_\parallel = 0$, kutsutaan **johtokeskuskoordinaatistoksi** (guiding centre system, GCS).

GCS:ssä varaus aiheuttaa sähkövirran $I = q/\tau_L$, johon liittyvä **magneettinen momentti** on

$$\mu = I\pi r_L^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2 r_L^2 B}{m} = \frac{1}{2}\frac{mv_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B} \tag{15.13}$$

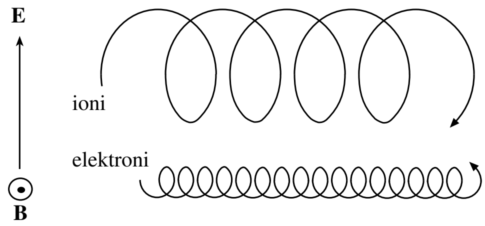
Vektorimuodossa magneettinen momentti on

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\, q\, \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_\perp \tag{15.14}$$

Koska pyörähdyssädevektorissa on mukana varauksen merkki, $\boldsymbol{\mu}$:n suunta on varauksesta riippumatta vastakkainen taustan magneettikentälle eli vapaat varatut hiukkaset muodostavat tässä mielessä diamagneettisen systeemin.

Myös relativistinen liikeyhtälö on tässä tapauksessa helppo ratkaista. Koska liike-energia on vakio ($\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}/dt = 0$), niin $\gamma$ on vakio. Liikeyhtälön komponentit ovat siis

$$\begin{aligned} \gamma m \dot{v}_x &= qBv_y \\ \gamma m \dot{v}_y &= -qBv_x \\ \gamma m \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \tag{15.15}$$




Kuva 15.1: Sähköinen kulkeutuminen.

eli vakiotekijää $\gamma$ lukuunottamatta samat kuin edellä. Pyörähdystaajuus on nyt $\omega_c = qB/(\gamma m)$.

## 15.3 Homogeeniset ja staattiset B ja E

Oletetaan nyt, että vakiomagneettikentän lisäksi hiukkasiin vaikuttaa myös vakiosähkökenttä **E**. Magneettikentän suuntaiseksi epärelativistiseksi liikeyhtälöksi tulee

$$m\dot{v}_{\|} = qE_{\|} \tag{15.16}$$

Tämä kuvaa kiihdytystä magneettikentän suuntaan. Tarkastellaan sitten poikittaista sähkökenttää ja valitaan se $x$-akselin suuntaiseksi, jolloin

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x \end{aligned} \tag{15.17}$$

Ratkaisun yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. Tässäkin tapauksessa hiukkanen kieppuu GC:n ympäri, mutta GC kulkeutuu $y$-akselin suuntaan nopeudella $E_x/B$. Vektorimuodossa kulkeutumisnopeus on

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \tag{15.18}$$

Tätä kutsutaan **sähköiseksi kulkeutumiseksi** tai $E \times B$-kulkeutumiseksi (kuva 15.1). Kulkeutumisnopeus ei riipu varauksesta eikä hiukkasen massasta!

## 15.4 Liikeyhtälö kanonisessa formalismissa

Hiukkasliike voidaan käsitellä elegantisti käyttäen mekaniikasta (toivottavasti) tuttua kanonista formalismia. Koska elektrodynamiikan esitietoina ei kuitenkaan oleteta mekaniikan kurssia, seuraava jää yleissivistäväksi tärkeäksi tiedoksi.

Sijoitetaan sähkö- ja magneettikentät Lorentzin voiman lausekkeeseen skalaari- ja vektoripotentiaalien avulla:

$$\mathbf{F} = q(-\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \tag{15.19}$$

Muunnetaan tämä kanoniseen muotoon ilmaisemalla se riippumattomien muuttujien $\mathbf{r}$ ja $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ avulla. Käytetään seuraavassa merkintöjä $\partial/\partial r_i = \partial_i = \nabla_i$ ja oletetaan summaus toistetun indeksin yli. Suorilla laskuilla nähdään, että

$$[\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \dot{r}_j \partial_i A_j - \dot{r}_j \partial_j A_i = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

Yhtälöiden $d\mathbf{A}/dt = \partial_t \mathbf{A} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ ja $\dot{r}_j \partial_i A_j = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$ avulla voiman lausekkeeksi saadaan

$$\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \nabla(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt}\mathbf{A}\right] \tag{15.20}$$

Koska $\varphi$ ja $\mathbf{A}$ eivät riipu nopeudesta, voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}A_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(-\varphi + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\right)$$

minkä avulla voiman $i$:s komponentti saadaan muotoon

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial r_i}(q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})\right) \tag{15.21}$$

Lorentzin voima on nyt ilmaistu Lagrangen mekaniikassa *yleistetyn* potentiaalin

$$U = q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \tag{15.22}$$

avulla:

$$m\ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}_i} \tag{15.23}$$

**Lagrangen funktion** $L = m\,\dot{\mathbf{r}}^2/2 - U$ avulla liikeyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0 \tag{15.24}$$

Nämä **Lagrangen liikeyhtälöt** ovat toista kertalukua. Niistä voidaan muodostaa ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä siirtymällä **kanonisiin muuttujiin** $r_i$ (kanoninen koordinaatti) ja $\pi_i = \partial L/\partial \dot{r}_i = m\dot{r}_i + qA_i$ (kanoninen liikemäärä). Muodostetaan näiden muuttujien **Hamiltonin funktio**

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{r}, t) &= \dot{r}_i \pi_i - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \dot{r}_i \pi_i - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\varphi - q\,\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \end{aligned} \tag{15.25}$$

**Kanoniset liikeyhtälöt** ovat nyt

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \frac{1}{m}(\pi_i - qA_i) \tag{15.26}$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -q\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} + \frac{q}{m}\boldsymbol{\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} - \frac{q^2}{m}\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} \tag{15.27}$$

joista alkuperäisen liikeyhtälön johtaminen on suoraviivainen HT.

Kvanttimekaniikan Schrödingerin yhtälö voidaan ilmaista Hamiltonin funktion avulla yleistämällä se kvanttimekaaniseksi operaattoriksi. Kun elektrodynamikkaa viedään kvanttitasolle, se tehdään nimenomaan tässä formalismissa, missä olennaista on kappaleen mekaanisen liikemäärän $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ korvaaminen sen **sähkömagneettisella liikemäärällä** $m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$.

# Luku 16

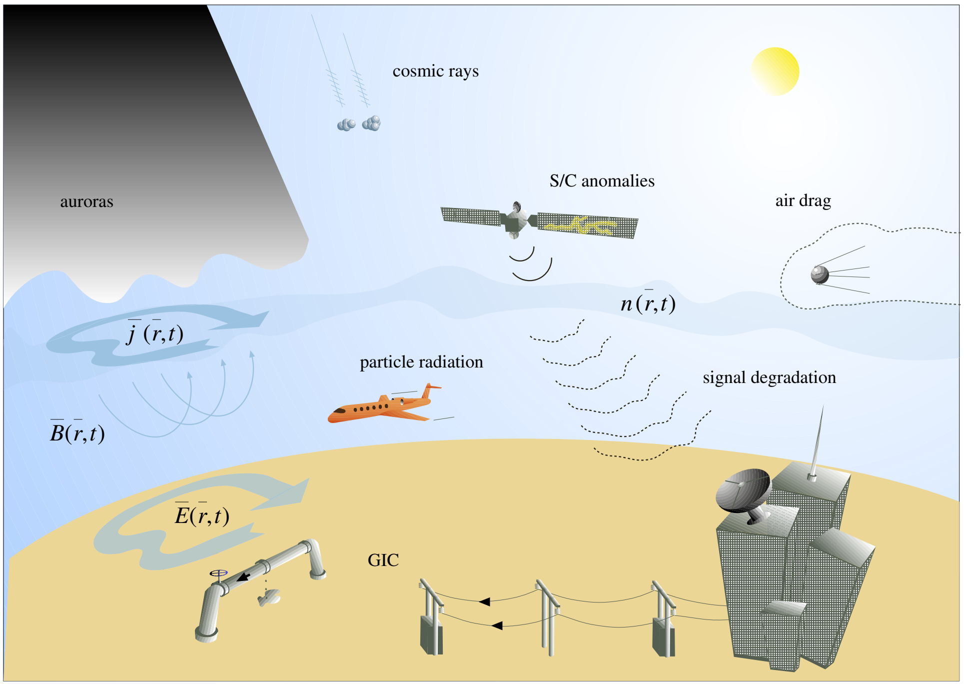
# Ihan oikea esimerkki

## 16.1 Avaruussäästä

Esitellään lopuksi yleissivistävästi geomagnetismiin liittyvä sovellutus: geomagneettisesti indusoituvat virrat (GI-virta, geomagnetically induced current, GIC). Ilmiö liittyy avaruussäähän (space weather; kuva 16.1), joka on viimeisten 15 vuoden aikana ollut nopeasti kehittyvä avaruusfysiikan alue.

Avaruussää tarkoittaa Maan lähiavaruuden vaihtelevia sähkömagneettisia ja hiukkasolosuhteita, jotka voivat haitata avaruudessa ja Maan pinnalla olevia teknologisia laitteita ja joissain tapauksissa myös ihmisten terveyttä. Ilmiöiden tärkeimpinä aiheuttajina ovat auringosta peräisin olevat varaukselliset hiukkaset, jotka kulkevat aurinkotuulen mukana. Maan magneettikenttä muodostaa suojan aurinkotuulta vastaan, ja kentän vaikutuksesta hiukkaset pyrkivät ohjautumaan napa-alueille, jossa ne synnyttävät revontulia. Auringon aktiivisuuden 11 vuoden pituinen auringonpilkkujakso näkyy tilastollisesti myös avaruussääilmiöissä. Edellinen maksimi saavutettiin kesällä 2000. Auringon aktiivisuus vaikuttaa myös Maahan kohdistuvaan kosmiseen säteilyyn, ja pitkäaikaisvaihteluilla on ilmeinen yhteys ilmastoon.

Maanpinnalla avaruussään vaikutukset ovat selvimpiä revontulialueiden lähellä, missä ionosfäärin sähkövirrat ovat voimakkaita ja nopeasti vaihtelevia. GIC:tä havaittiin lennätinlaitteissa jo 1800-luvun puolivälissä Englannissa, mutta merkittävimmät haitat esiintyvät sähköverkoissa. Tunnetuin tapaus sattui maaliskuussa 1989, jolloin Kanadassa oli usean tunnin sähkökatkos ja Yhdysvalloissa tuhoutui suurjännitemuuntaja. Lokakuun lopussa 2003 Etelä-Ruotsissa oli noin tunnin sähkökatkos GIC:n takia. Suomessa havaitut haitat ovat olleet vähäisiä ja esimerkiksi sähköverkossa merkityksettömiä. Tavallisen sään haittoihin verrattuna GIC on varsin vähäinen riskitekijä yleismaailmallisestikin. Ilmiönä se on kuitenkin opettavainen ja antaa aihetta monipuoliseen lähiavaruuden tutkimukseen.




Kuva 16.1: Avaruussääilmiöitä. Kuva: Antti Pulkkinen, Ilmatieteen laitos.

Ilmatieteen laitos on tehnyt korkeajänniteverkkoa ja maakaasuputkea koskevaa GIC-yhteistyötä suomalaisen teollisuuden (Fingrid, Gasum) kanssa yli 25 vuoden ajan. Tutkimuksessa on kehitetty mallit, joiden avulla GIC voidaan laskea johdinjärjestelmissä, kun geofysikaaliset olosuhteet tunnetaan. Suomalaisten yliopistojen (Helsinki, Turku, Oulu) ja Ilmatieteen laitoksen tutkimusaiheet kattavat auringosta maan pinnalle ulottuvan plasmafysikaalisen vuorovaikutusketjun monta osa-aluetta.

## 16.2 GI-virran laskeminen sähköverkossa

GI-virran laskeminen sähköverkossa on kätevä jakaa kahteen osaan. Ensin määritetään maanpinnan sähkökenttä, joka aiheutuu maan magneettikentän nopeista vaihteluista Faradayn lain mukaan. Sen jälkeen lasketaan sähkökentän synnyttämä virta tarkasteltavassa johdinjärjestelmässä.

Sähkökentän mallintamisessa tarvitaan kuvaus ionosfäärin ja magnetosfäärin virroista, jotka ovat GIC-ilmiön ensisijaiset aiheuttajat. Lisäksi sähköä johtava maa on otettava huomioon. Koska avaruusvirrat ovat monimutkaisia ajan ja paikan funktioita ja maan johtavuus paikan funktio, tarvitaan käytännössä runsaasti yksinkertaistavia oletuksia.

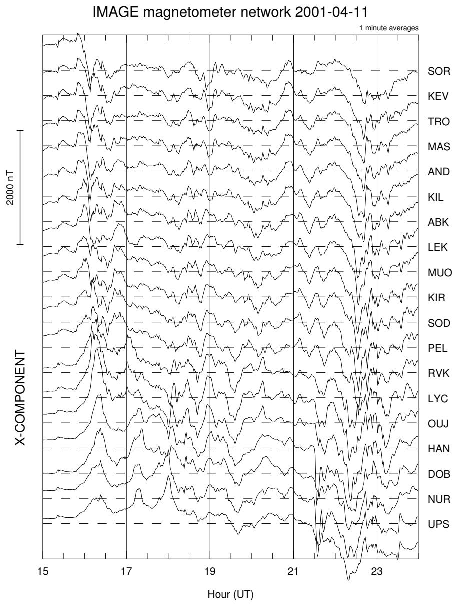
Yksinkertaisimmassa mallissa maan magneettikentän vaihteluja kuvataan tasoaallolla, joka etenee maanpintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Voidaan rajoittua paikalliseen tarkasteluun, jossa maanpinta on ääretön taso. Maan sähkömagneettisten parametrien oletetaan riippuvan vain syvyydestä, ja maa kuvataan koostuvaksi homogeenisista kerroksista. Nyt on mahdollista ratkaista sähkömagneettinen kenttä kaikkialla, kun kokonaismagneettikenttä oletetaan tunnetuksi pinnalla. Aaltoyhtälö palautuu maassa diffuusioyhtälöksi, koska geomagneettisten vaihteluiden tapauksessa siirrosvirtatermi on häviävän pieni verrattuna johtavuusvirtaan. Tasoaaltomallissa maanpinnan sähkökenttä voidaan ilmaista pintaimpedanssin ja magneettikentän tulona. Vaihteluiden hitaus on myös perussyy sille, että GIC voi olla haitallinen sähköverkoille: muuntajat on suunniteltu toimimaan vaihtovirralla (50 Hz), mutta tyypilliset GIC-taajuudet ovat alle 1 Hz luokkaa. GIC on siis sähköverkon kannalta tasavirtaa.

Kun sähkökenttä on määritetty, mallinnetaan sähköverkko tasavirtapiirinä, jonka solmupisteet ovat maadoitettuja muuntajia. Solmupisteiden välinen jännite saadaan integroimalla sähkökenttää pitkin johdinten määrittelemää tietä. On tärkeää huomata, että tasavirtatarkastelusta huolimatta sähkökenttä ei yleensä ole pyörteetön, joten jännite riippuu integroimistiestä. Ohmin ja Kirchhoffin lakien soveltaminen johtaa matriisiyhtälöön maadoitusvirroille. Vastaava mallinnus on mahdollinen maahan haudatulle putkiverkolle (esimerkiksi Suomen maakaasuputki), mutta laskennallisesti ongelma on monimutkaisempi, koska maadoitus on jatkuva eikä diskreetti.

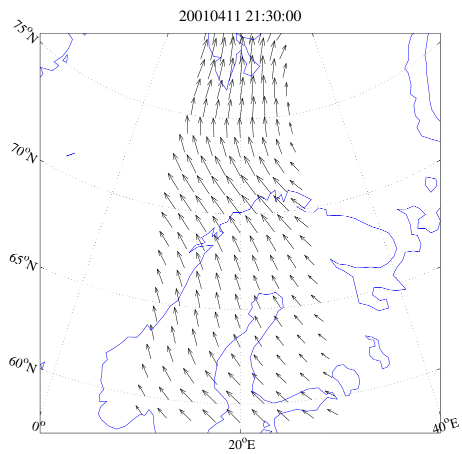
Tasoaaltomalli ei sellaisenaan ole hyvä revontulialueen lähellä, missä ionosfäärivirrat aiheuttavat hyvin epähomogeenisen kentän. Käytännölliseksi on havaittu ratkaisu, jossa mitatun magneettikentän avulla ensin mallinnetaan ionosfäärin ekvivalenttivirrat. Se on virtajärjestelmä, joka selittää täysin ionosfäärin alapuolella havaittavan magneettikentän (todistus potentiaaliteorian avulla). Kun ekvivalenttivirrat tunnetaan, voidaan maanpinnan magneettikenttä laskea missä tahansa pisteissä. Sen jälkeen sovelletaan paikallisesti tasoaaltomallinnusta sähkökentän laskemiseksi.

Esimerkkinä on magneettinen myrsky huhtikuussa 2001. Pohjoismaiden alueella mitataan maan magneettikenttää yli 20 paikassa ja kentän pohjoiskomponentin vaihtelut on esitetty kuvassa 16.2. Havainnoista voidaan määrittää ionosfäärin ekvivalenttivirrat ja niistä puolestaan interpoloida kenttä maanpinnalla. Kuvassa 16.3 esitetään maanpinnan horisontaalikenttä yhtenä ajanhetkenä. Kenttävektorit on ionosfääritutkimuksen tavanomaisen käytännön mukaan käännetty 90 astetta myötäpäivään. Tällöin ne antavat karkean kuvan ionosfäärin horisontaalivirroista (HT: miksi näin?).

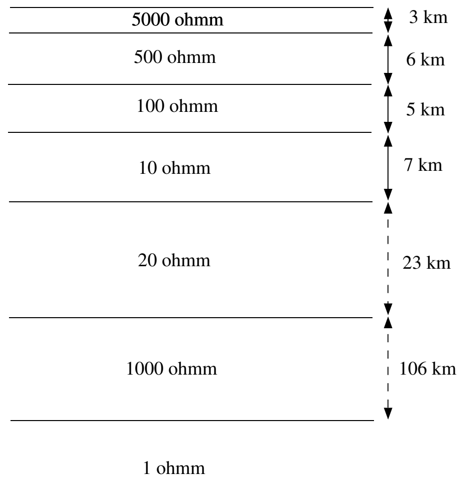
Sähkökentän laskemiseksi tarvitaan maalle johtavuusmalli, joita Suomessa on kehitetty erityisesti Oulun yliopistossa. Yksinkertainen Etelä-Suomelle sopiva malli on kuvassa 16.4. Tasoaaltomenetelmää sovellettaessa tarkastelu




Kuva 16.2: Maan magneettikentän pohjoiskomponentin vaihtelut 11.4. 2001 Fennoskandian manneralueella IMAGE-magnetometrin verkon mittaamana. Asemat ovat järjestyksessä etelästä (UPS) pohjoiseen (SOR).




Kuva 16.3: Maan magneettikentän interpoloitu horisontaalikomponentti maanpinnalla 11.4. 2001. Vektorit on käännetty 90 astetta myötäpäivään.

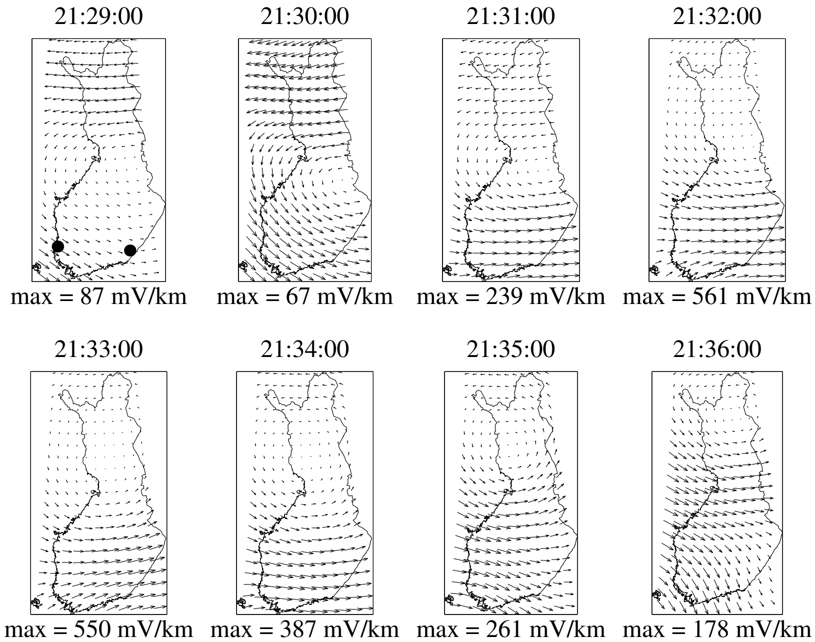



Kuva 16.4: Yksinkertainen maan johtavuusmalli Etelä-Suomessa. Kuvassa annetaan resistiivisyyden eli johtavuuden käänteisluvun arvot. Maan permeabiliteetti voidaan suurella tarkkuudella olettaa samaksi kuin tyhjössä. Permittiivisyyden tarkalla arvolla ei ole merkitystä matalataajuusapproksimaatiossa (HT: totea tämä kuvan lukuarvoilla, kun taajuudet ovat alle 1 Hz).

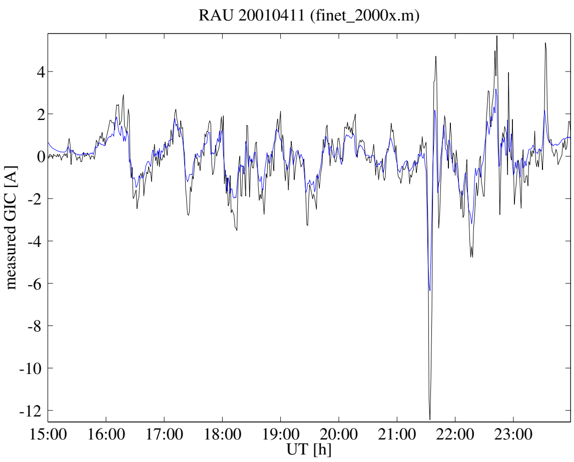
on helpointa taajuusalueessa. Aikasarjana mitattu magneettikenttä Fourier-muunnetaan (FFT), minkä jälkeen se kerrotaan taajuudesta riippuvalla pintaimpedanssilla. Näin määritetty taajuusalueen sähkökenttä käänteismuunnetaan lopuksi aika-alueeseen (kuva 16.5).

GI-virran laskemiseksi tarvitaan tiedot sähköverkon geometriasta ja vastusarvoista. Tarkastelu voidaan rajoittaa 220 kV ja 400 kV verkkoihin Suomessa, koska alempijännitteisten verkkojen suuremmat vastukset rajoittavat tehokkaasti virran kulkua. Mitattua ja laskettua virtaa verrataan kuvassa 16.6 Rauman 400 kV muuntajalla. Käytetyt oletukset huomioon ottaen tulos on erinomainen. (HT: Laskettu virta on systemaattisesti hieman pienempi kuin mitattu. Miten yhteensopivuus saataisiin vielä paremmaksi johtavuusmallia muuttamalla?)

Yhteenvetona todetaan, että GIC osataan laskea sähköverkossa, jos käytettävissä on magneettikentän mittauksia maanpinnalta, maan johtavuusmalleja ja sähköverkon tasavirtamalli. Tutkimuksella on silti vielä paljon haasteita. Suuria GIC-tapahtumia aiheuttavat ionosfäärin virrat tunnetaan huonosti eikä erilaisia tapahtumatyyppejä ole luokiteltu kovinkaan tarkasti. Vielä suurempi työ on sellaisten ennusteiden kehittäminen, että aurinkotuulihavaintojen perusteella pystyttäisiin ennustamaan tarkasti magneettikentän käyttäytyminen maanpinnalla. Tämä aihepiiri tarjoaa siis huomattavan paljon työtä puhtaassa perustutkimuksessa.




Kuva 16.5: Kuvasarja lasketusta horisontaalisesta sähkökentästä 11.4. 2001. Kuvan 16.4 johtavuusmallia on sovellettu koko alueelle.




Kuva 16.6: Mitattu (musta) ja laskettu (sininen) GIC Rauman 400 kV muuntajalla. Positiivinen arvo tarkoittaa verkosta maahan kulkevaa virtaa.

# Sisältö