

# Luku 1

## Johdanto

*It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.*

R. P. Feynman

### 1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on koko kevätlukukauden kestävä 10 opintopisteen paketti elektrodynamiikkaa, joka voidaan sisällyttää joko fysiikan syventäviin tai teoreettisen fysiikan perusopintoihin. Tämä merkitsee, että kurssille osallistuvien opiskelijoiden mielenkiinnon suuntautuminen, esitiedot ja laskutekniikan hallinta vaihtelevat huomattavasti. **Kurssin tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaan tulevilla tilanteissa.** Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtäminen kuuluu jokaisen fyysikon yleissivistykseen. Toisaalta sähkömagnetismi on keskeisessä osassa niin kaikkialla fysiikassa kuin arkipäivässäkin. Parempaa syytä elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Kurssi on jaksotettu siten, että sähkö- ja magnetostatiikka sekä induktiolaki tulevat käsitellyiksi ensimmäisen puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää pääasiassa dynaamisia ilmiöitä, jolloin samalla mennään syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön.

Kurssin **lähtötasoksi sähkömagnetismin osalta oletetaan fysiikan peruskurssien hallinta.** Tämänhetkessä kurssiohjelmassa se tarkoittaa kurssien Sähkömagnetismin perusteet I ja II suoritusta. Toki myös hyvin suoritettu fysiikan approbatur riittää sekini.

Elektrodynamiikka on useimmille opiskelijoille ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä on ratkaiseva osa. Sähkö- ja magneettikentät

ovat **vektorikenttiä** eli niillä on suunta ja suuruus, jotka riippuvat siitä, missä avaruuden pisteessä niitä tarkastellaan. Myös avaruuden jokainen piste voidaan ajatella vektorikenttänä. Sen suunta riippuu siitä, missä pään tarkastelupistettä kyseinen avaruuden piste on, ja suuruus siitä, kuinka kaukana se on. Fysiikassa on myös skalaarikenttiä, joiden käsittely on paljon helpompaa. Elektrodynamiikassa esimerkiksi varausjakautuma on tällainen. Sillä on jokaisessa avaruuden pisteessä suuruus muttei suuntaa.

Kentän käsittely johtaa aiempaa vaativampien matemaattisten apuneuvojen tarpeeseen: **elektrodynamiikkaa oppiakseen ja ymmärtääksen on opeteltava laskemaan sujuvasti**. Tällä kurssilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MAPU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat suorittavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä FYMM II:ta ei oleteta suoritetuksi, mutta kurssin opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on suositeltavaa. Sähkö- ja magnetostatiikassa tarvitaan vektorilaskentaa, johon kuuluu erinäinen kokoelma derivointi- ja integrointitaitoja. Ne on syytä opetella heti kunnolla, koska niitä tarvitaan ihan oikeasti (jopa myöhemmin esimerkiksi tutkijan työssä). Muuta perustarvikkeistoa ovat esimerkiksi FYMM I:ltä tutut Fourier-sarjat ja kompleksiluvut. Eksoottisinta lienee tensorilaskenta, jota tarvitaan suhteellisuusteoriassa. Sen perusteita opiskellaan hieman tämän kurssin loppuvaiheessa.

Laskuharjoitustehtävien ratkaiseminen on olennainen osa oppimista. Vaikeimpien ongelmien kohdalla aktiivinen ryhmätyö on erittäin hyödyllistä, kuten myös kirjallisuuden käyttö. Physicumin kirjasto tarjoaa tähän hyvän ympäristön. On myös täysin luvallista kysyä vihjeitä luennoitsijalta ja assistenteilta.

Välikokeissa ja lopputenteissa on syytä “laskennallisissa” tehtävissä kirjoittaa lyhyt sanallinen perustelu. Oikein ymmärretystä fysiikasta voi herua irtopisteitä, vaikka laskenta olisi epäonnistunut. Sanattomat kaavailut eivät ole välttämättä kovin ansiokkaita.

## 1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti formaalisesti nykyasunsa vuonna 1864, kun *James Clerk Maxwell* julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan “*Treatise on Electricity and Magnetism*”. Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen monumenttinsa perustui tietenkin useiden aiempien fyysikkopolvien tutkimuksiin. Mainittakoon tässä 1700-luvulta vaikkapa *Cavendish*, *Coulomb*, *Franklin*, *Galvani*, *Gauss* ja *Volta* sekä aiemmalta 1800-luvulta *Ampère*, *Arago*, *Biot*, *Faraday*, *Henry*, *Savart* ja *Ørsted*.

Tärkeimpiä Maxwellin teorian ennustuksia oli valonnopeudella etenevä sähkömagneettinen aaltoliike, jonka *Heinrich Hertz* onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suureen murroskauteen. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksia olivat esimerkiksi liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri tällaisia ongelmia selittämään *Albert Einstein* kehitti suppeamman suhteellisuusteoriaansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian perusteet voikin nykyään olla havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria. Jälkiviisaasti ajatellen Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korrektille muotoilluksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi kvanttifysiikan kehitys. Siihen liittyi vielä vaikeampia elektrodynamiikan ongelmia. Ensinnäkään ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi riittävän yleinen myös mikromaailmassa. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset muotoilut, kuten Schrödingerin yhtälö, olivat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennen kuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan **kvanttielektrodynamiikaksi** (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat *Julian Schwinger*, *Richard Feynman*, *Sin-itiro Tomonaga* ja *Freeman Dyson*. QED:ssä osataan laskea tarkkoja tuloksia, mutta sen matemaattinen perusta ei ole kovin tyydyttävä sillä teoria sisältää äärettömyyksiä, jotka pitää "renormalisoida" pois erityisen muodollisen reseptin turvin.

Vuonna 1967 *Weinberg* ja *Salam* onnistuivat johtamaan sekä (Q)ED:n että heikon vuorovaikutuksen teorian erään monimutkaisemman yhtenäisteorian matalaenergiarajana. Kyseinen yhtenäisteoria on elektrodynamiikan yleistys tapaukseen, jossa varauksia on enemmän kuin yhtä (etumerkillistä) tyyppiä. Samaan tapaan elektrodynamiikkaa monimutkaistamalla luotiin 1970-luvulla ilmeisen onnistunut malli myös vahvoille vuorovaikutuksille. Siinä "varauksia" on kolmenlaisia, minkä vuoksi vahvojen vuorovaikutusten yhteydessä puhutaan usein "väreistä" ja "värivoimasta". Tämä vahvojen vuorovaikutusten teoria ja Weinbergin ja Salamin sähköheikon vuorovaikutuksen teoria elävät nykyään rauhanomaista rinnakkaineloa niinsanottuna hiukkasfysiikan standardimallina. Niiden johtaminen syvemmästä yhtenäisteoriasta ei toistaiseksi ole onnistunut ainakaan kaikkia tyydyttävällä tavalla. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on todellakin välttämätön perusta pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle, sillä siihen nojaavat sekä suhteellisuusteoria että kvanttiteoria, ja modernit hiukkasfysiikan teorit ovat sen yleistä.

HT: Kertaa perusvuorovaikutukset ja aaltohiukkasdualismi.

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka onkin tullut osaksi kvanttima-

ilmaa, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä aina ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Se on keskeistä materiaalfysiikassa, hiukkassuihkujen fysiikassa, röntgenfysiikassa, elektroniikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Elektrodynamiikan perusasioihin kuuluvat:

- Varauksellisten hiukkasten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän (sekä staattisen että aaltokentän) määrittäminen.
- Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.
- Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.
- Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.
- Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

### 1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päätyen **Maxwellin yhtälöihin** ikäänkuin olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei ole aivan totta enää opintojen tässä vaiheessa, vaan Maxwellin yhtälöihin on jo tutustuttu ainakin päällisin puolin eikä sähkömagnetismi ole aivan uusi ja outo asia. Pohditaanpa jo näin kurssin aluksi hieman, mistä elektrodynamiikassa on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt “tyhjiömuodossaan”:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Sähkökentän  $\mathbf{E}$  ja magneettikentän (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden)  $\mathbf{B}$  aiheuttajina ovat sähkövaraukset  $\rho$  ja sähkövirrat  $\mathbf{J}$ . Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein kenttien  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{H}$  avulla, mihin palataan myöhemmin.

Yllä  $\epsilon_0$  on tyhjiön sähköinen permittiivisyys ja  $\mu_0$  on tyhjiön magneettinen permeabiliteetti. Näiden ja valonnopeuden  $c$  välillä on yhteys  $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ . Koska valonnopeus tyhjiössä on vakio, sille annetaan nykyään *tarkka* arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Sekunti määritellään puolestaan tietyn Ce-133:n siirtymäviivan avulla, jolloin metrillä tulee johdannaissuure, joka on aika tarkkaan saman mittainen kuin tietty Pariisissa säilytettävä platinatanko. Myös  $\mu_0$  määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am},$$

joten myös tyhjiön permittiivisyydelle tulee tarkka arvo  $\epsilon_0 = (c^2\mu_0)^{-1}$ , jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}.$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Nopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvaan varaukseen  $q$  vaikuttaa **Lorentzin voima**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.5)$$

Tämä on suureen määrään kokeita perustuva **empiirinen laki**, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä perustavammasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan “nähdä”, ne ovat fyysisiä olioita. Niillä on energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjiössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mikroskooppisessa kuvailussa QED:n tasolla sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Tähän ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratoriokokeissa, mikä käy ilmi seuraavista esimerkeistä (HT: tarkasta lukuarvot peruskurssien tietojen avulla):

- Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on suunnilleen 50 V/m. Tämä merkitsee  $10^{15}$  näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.
- Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Vastaavan fotonin liikemäärä on  $2,2 \cdot 10^{-34}$  Ns. Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.
- Varausten diskreettisyyttä ei myöskään tarvitse huomioida tavanomaisessa käyttöelektronikassa. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan  $10^{15}$  alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljetukseen tarvitaan  $6,2 \cdot 10^{12}$  varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin päätellä, että riippuvuus on ainakin lähes tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa  $1/r^{2+\varepsilon}$ , voidaan mittauksilla etsiä rajoja  $\varepsilon$ :lle. *Cavendish* päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen  $|\varepsilon| \leq 0,02$ . Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden  $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ . Nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen  $|\varepsilon| \leq (2,7 \pm 3,1) \cdot 10^{-16}$ .

Teoreettisesti voi perustella, että  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus on yhtäpitävää fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin *Cavendishin* menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa  $1,6 \cdot 10^{-50}$  kg. Geomagneettisilla mittauksilla yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi:  $1,4 \cdot 10^{-51}$  kg. Fotonin massattomuus ja sähköisen voiman  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus ovat siis erittäin hyvin todennettuja *kokeellisia* tosiasioita.

Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin kävi selväksi, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

## 1.4 Kirjallisuutta

Vaikka tämä luentomoniste pyrkiikin kattamaan kurssin materiaalin, tulevien opintojen kannalta on hyödyllistä oppia käyttämään myös muita lähteitä. Kurssin oppikirjoina voi pitää teoksia:

- Cronström, C., ja P. Lipas, *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan*, Limes ry., 2000 (jatkossa viite CL).

Uudistettu laitos TFO:n monivuotisesta luentomonisteesta.

- Reitz, J. R., F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic theory*, 4th edition, Addison-Wesley, 1993 (viite RMC).

Kokeellisen fysiikan laudaturin perinteinen oppikirja.

### Suosittelavaa oheislukemistoa:

- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, vol. II, Addison-Wesley, 1964 (viite Feynman).

Ehdottomasti tutustumisen arvoinen teos! Kirja sisältää erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua ilman hankalaa laskennallista käsittelyä.

- Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.

Suosittu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.

- Jackson, J. D., *Classical electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998 (viite Jackson).

Klassisen elektrodynamiikan piipia. Harjoitustehtävistä löytyy riittävän haastavia ongelmia parhaillekin oppilaille. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.

- Kurki-Suonio, K. ja R., *Vuorovaikutuksista kentiin – sähkömagnetismin perusteet ja Aaltoliikkeestä dualismiin*, Limes ry., useita painoksia.

Erittäin fysikaalista tekstiä selvällä suomen kielellä. Tukee erityisen hyvin sähkö- ja magnetostatiikkaa ja aaltoliikkeen perusteita.

- Lindell, I., *Sähkötekniikan historia*, Otatiето, 1994.

Sähkömagnetismin historiaa ammoisista ajoista 1900-luvun alkuun.

- Lindell, I. ja A. Sihvola, *Sähkömagneettinen kenttäteoria. 1. Staattiset kentät*, Otatiето, 1999. Sihvola, A. ja I. Lindell, *Sähkömagneettinen kenttäteoria. 2. Dynaamiset kentät*, Otatiето, 2000. Sihvola, A., *Sähkömagneettisen kenttäteorian harjoituskirja*, Otatiето, 2001.

Elektrodynamiikkaa suunnilleen vastaava kokonaisuus TKK:lla. Hieman erilainen lähestymistapa, mutta tutustumisen arvoinen.

