

## Luku 5

# Staattinen magneettikenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvien sähkövarausten eli sähkövirtojen aiheuttamaan staattiseen magneettikenttään. Jos sähköstatiikka tuli opiskeluksi huolellisesti, niin analogioiden avulla magnetostatiikkaan pitäisi päästä helposti käsiksi. Laskennan puolella korostuu vektorimatematiikan hyvän hallinnan välttämättömyys.

### 5.1 Sähkövirta

Nykyaikana sähkövirta lienee tutumpi ilmiö kuin sähkövaraus. Todellisuudessa varauksia ja virtoja ei oikeastaan voi käsitellä erikseen. Edellisissä luvuissakin sähkövirta on ollut implisiittisesti esillä monta kertaa. Kun varaukset järjestäytyvät johdekappaleen pinnalle, systeemissä kulkee virtaa, ja sähkövirran avulla paristo pitää edellisen luvun esimerkissä kondensaattorin jännitteen vakiona. Samoin termit “johde” ja “eriste” viittaavat kappaleiden kykyyn kuljettaa sähkövirtaa.

Tarkastellaan joukkoa varauksellisia hiukkasia, joiden varaus on  $q$ , lukumäärätiheys  $n$  ja nopeus  $\mathbf{v}$ . Sähkövirta  $I$  määritellään annetun pinnan läpi aikayksikössä kulkevan varauksen määränä

$$I = dQ/dt. \quad (5.1)$$

Olkoon  $dS$  jokin pintaelementti. Sen läpi kulkeva virta on

$$dI = \frac{nq\mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n} dS}{dt} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.2)$$

missä  $\mathbf{J}$  on virrantiheys. Virrantiheys on samankaltainen vuosuure kuin sähkövuon tiheys  $\mathbf{D}$  tai pian määriteltävä magneettivuon tiheys  $\mathbf{B}$ . Fysiikkaalinen vuo pinnan läpi saadaan integroimalla vuon tiheys pinnan yli.

Sähkövirran SI-yksikkö on ampeeri  $A = C/s$ . Virrantiheys on virta pinta-alan läpi, joten sen yksikkö on  $A/m^2$ . SI-yksiköissä sähkövirran yksikkö otetaan perussuureeksi ja kaikki muut sähköiset yksiköt voidaan ilmaista ampeerin, metrin, kilogramman ja sekunnin avulla.

### 5.1.1 Jatkuvuusyhtälö

Virrantiheys ja sähkövaraus liittyvät läheisesti toisiinsa. Suljetun pinnan  $S$  läpi alueeseen  $V$  tuleva virta on ( $\mathbf{n}$  osoittaa ulospäin)

$$I = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV. \quad (5.3)$$

Tämän täytyy olla yhtä suuri kuin varausten tilavuuteen  $V$  tuoma sähkövirta

$$I = dQ/dt = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (5.4)$$

Oletetaan tilavuus kiinteäksi, jolloin aikaderivaatta voidaan viedä integraalin sisään. Koska  $\rho$  on sekä ajan että paikan funktio, kokonaisderivaatta muuttuu osittaisderivaataksi:

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (5.5)$$

joten

$$\int_V (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}) dV = 0. \quad (5.6)$$

Koska tämän täytyy olla voimassa kaikilla tilavuuksilla, saadaan virralle **jatkuvuusyhtälö**

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.7)$$

Jatkuvuusyhtälö seuraa suoraan kokonaisvarauksen säilymislaista eikä edellytä kiinteän tilavuuden tarkastelua (yleisempi johto: CL 6.1). Mikäli varaus-tiheys on ajasta riippumaton eli  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , sähkövirralla ei ole lähteitä tai nieluja ja siten kaikki virtaviivat sulkeutuvat tai jatkuvat äärettömyyksiin. Tällaista virtausta kutsutaan **stationaariseksi**.

### 5.1.2 Ohmin laki

On kokeellinen tosiasia, että vakiolämpötilassa olevissa metalleissa sähkövirta riippuu lineaarisesti sähkökentästä:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5.8)$$

Tämä on **Ohmin laki** ja sen verrannollisuuskerroin  $\sigma$  on **johtavuus**. Johtavuudelle käytetään yleisen tavan mukaan samaa symbolia kuin aiemmin pintavaraukselle. Jos joudumme jossain kirjoittamaan molemmat suureet, eroteltakoon ne vaikkapa kirjoittamalla pintavaraukselle  $\sigma_S$ . Jälleen on tärkeää oppia lukemaan yhtälöiden takana olevaa fysiikkaa eikä niinkään opetella kaavoja ulkoa!

Lineaarinen Ohmin laki on voimassa tavallisille aineille, ellei sähkökenttä ole kovin suuri. Se ei kuitenkaan ole sellainen fysiikan peruslaki kuin Maxwellin yhtälöt, vaan samantapainen rakenneyhtälö kuin  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , jonka yksityiskohtainen muoto ja jopa olemassaolo riippuvat väliaineen ominaisuuksista. Epälineaarisissa väliaineissa  $\sigma$  on sähkökentän ja mahdollisesti myös magneettikentän funktio. Jos sähkökenttä on riittävän suuri, niin väliaine kuin väliaine alkaa käyttäytyä epälineaarisesti.

Johtavuuden käänteislukua kutsutaan **ominaisvastukseksi** eli resistiivisyydeksi. On tärkeää erottaa ominaisvastus (engl. resistivity) ja vastus (resistance). Johtavuuden SI-yksikkö on  $[\sigma] = (\text{A}/\text{m}^2)/(\text{V}/\text{m}) = \text{A}/(\text{Vm})$ , joten ominaisvastuksen yksiköksi tulee  $\text{Vm}/\text{A}$ . Toisaalta  $\text{V}/\text{A}$  on tuttu vastuksen yksikkö ohmi ( $\Omega$ ), joten ominaisvastuksen yksikkö on  $\Omega\text{m}$  ja johtavuuden  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1} = \text{S}/\text{m}$ , missä on otettu käyttöön yksikkö siemens. Siemen sin sijasta ohmin käänteislukua merkitään varsinkin englanninkielisessä kirjallisuudessa symbolilla "mho". Taulukossa 5.1 luetellaan joidenkin hyvien johteiden resistiivisyyksiä.

aine	resistiivisyys $10^{-8} \Omega\text{m}$	aine	resistiivisyys $10^{-8} \Omega\text{m}$
alumiini	2,65	kupari	1,67
grafiitti	1375	nikkeli	6,84
hopea	1,59	rauta	9,71
konstantaani	50	sinkki	5,92
kulta	2,35	volframi	5,68

Taulukko 5.1: Aineiden resistiivisyyksiä. Johtavuus on resistiivisyyden käänteisluku. Aiemmin taulukossa 3.1 lueteltujen eristeiden resistiivisyydet ovat tyypillisesti suurempia kuin  $10^8 \Omega\text{m}$ . Vesi on poikkeus, sillä sen resistiivisyys on noin  $5000 \Omega\text{m}$ , joten sitä voidaan pitää myös johteena.

Tarkastellaan sähkövirran ja jännitteen välistä yhteyttä ohuessa homogeenisessa suorassa virtajohdossa, jonka päiden välillä on jännite  $\Delta\varphi$  ja jonka johtavuus on  $\sigma$ . Johteessa sähkökentällä ei ole komponenttia kohtisuorassa johtoa vastaan, koska tämä aiheuttaisi jatkuvan sähkövirran joko johtoon tai siitä pois ja johdon pinnan varautumisen. Koska systeemi on homogeeninen ja suora, sähkökenttä on sama koko johdossa, joten  $\Delta\varphi = El$ , missä  $l$  on johdon pituus. Ohmin lain mukaan johdossa kulkee virta, joka

mielivaltaisen poikkileikkauspinta-alan  $A$  läpi on

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = JA = \frac{\sigma A}{l} \Delta\varphi. \quad (5.9)$$

Verrannollisuuskerroin on vastus (resistanssi)  $R = l/(\sigma A)$ , jonka SI-yksikkö on siis ohmi. Tästä voidaan johtaa koulufysiikasta tuttuja relaatioita: Työ, jonka sähkökenttä tekee siirtäessään varauksen  $Q$  potentiaalieron  $U$  yli, on  $W = QU$ . Sitä vastaava teho on puolestaan  $P = UI = RI^2 = U^2/R$ . Tämän tehon sanotaan häviävän materiaalin **Joulen lämmityksenä**.

### 5.1.3 Johtavuuden klassinen selitys<sup>1</sup>

Tarkastellaan johteessa nopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvaa varauksellista hiukasta (varaus  $q$ , massa  $m$ ) klassisen mekaniikan mukaisesti. Sähkökentässä  $\mathbf{E}$  hiukkanen kiihtyy voiman  $q\mathbf{E}$  vaikutuksesta. Olkoon kyseessä lineaarinen ohminen johde, jossa sähkökenttä aiheuttaa tasaisen virrantiheyden  $\mathbf{J}$ . Hiukkaseen täytyy vaikuttaa toisenkin voiman, joka kumoaa sähkökentän aiheuttaman kiihtyvyyden. Jos jarruttava voima on mekaanisen kitkan kaltainen eli verrannollinen hiukkasen nopeuteen, niin liikeyhtälö on

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v}, \quad (5.10)$$

missä  $G > 0$  on vakio. Alkuehdolla  $\mathbf{v}(0) = 0$  saadaan ratkaisuksi

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G} \mathbf{E} (1 - e^{-Gt/m}). \quad (5.11)$$

Hiukkasen nopeus lähestyy ajan myötä vakionopeutta  $\mathbf{v}_d = q\mathbf{E}/G$  eksponentiaalisesti aikavakion  $\tau$  ollessa

$$\tau = m/G. \quad (5.12)$$

Sijoittamalla tähän  $\mathbf{v}_d$ :n lauseke Ohmin laki voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\tau}{m} \mathbf{E}, \quad (5.13)$$

joten

$$\sigma = nq^2\tau/m, \quad (5.14)$$

missä  $n$  on hiukkasten lukumäärätiheys. Jos virrankuljettajia on useampaa hiukkaslajeja, niin kokonaisjohtavuus on summa kaikkien hiukkaslajien ( $i$ ) yli

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i}. \quad (5.15)$$

<sup>1</sup>Kvantitatiivinen selitys edellyttää kvanttimekaniikkaa. Klassinen malli on kohtuullisen hyvä elektrolyyttiselle sähkönjohtavuudelle.

Kohtuullisen hyvillä johteilla metalleista puolijohteisiin  $\tau$  voidaan tulkita johtavuuselektronien keskimääräiseksi törmäysajaksi. Matkaa, jonka johtavuuselektroni kulkee keskimäärin törmäysten välillä kutsutaan keskimääräiseksi vapaaksi matkaksi  $l_{mfp} = v_T\tau$ , missä  $v_T$  on elektronien termien nopeus. Sen on oltava paljon suurempi kuin  $v_d$ , sillä muutoin  $\tau$  tulisi riippuvaiseksi sähkökentästä eikä väliaineella olisi enää lineaarista Ohmin lakia. Useimmilla metalleilla  $v_T \approx 10^6$  m/s ja  $v_d$  yleensä alle  $10^{-2}$  m/s. Metalleilla  $l_{mfp} \approx 10^{-8}$  m huoneenlämmössä, joten  $\tau \approx 10^{-14}$  s. Puolijohteilla relaxaatioaika voi olla kertalukua suurempi, mutta joka tapauksessa sähkövirta reagoi käytännössä välittömästi sähkökentän muutokseen. Tämän vuoksi ennen 1800-luvun loppua kentänmuutosvirtaa ( $\partial\mathbf{D}/\partial t$ , luku 9) ei oltu havaittu missään koetilanteessa.

#### 5.1.4 Samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut

Ohmin laki on siis rakenneyhtälö kuten  $\mathbf{E}$ :n ja  $\mathbf{D}$ :n välinen yhteys. Analogia menee pidemmällekin. Stationaarisen virtauksen jatkuvuusyhtälö  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  on samaa muotoa kuin  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  tai  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Stationaarisen sähkövirran virtaviivat voidaan määrittää ratkaisemalla Laplacen yhtälö tutuilla menetelmillä. Ensin on etsittävä sopivat reunaehdot virrantiheydelle. Tarkastellaan esimerkkinä johdetta, jossa on toisesta johdeaineesta koostuva pitkä sylinterinmuotoinen este. Kaukana sylinteristä sähkökenttä on kohtisuorassa sylinterin akselia vastaan.

Merkitään sylinteriä (sisäalue) alaindeksillä  $i$  ja johdetta (ulkoalue) alaindeksillä  $u$ . Sylinterin akseli on  $z$ -akseli ja sylinterin säde  $a$ . Kaukana sähkökenttä on vakio  $E_0\mathbf{e}_x$ . Koska  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , reunaehdoksi saadaan  $J_{un} = J_{in}$  (vrt. sähkövuon tiheys) eli

$$\sigma_u E_{un} = \sigma_i E_{in} \quad (5.16)$$

eli

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \sigma_u \frac{\partial \varphi_u}{\partial r} \quad (5.17)$$

sylinterin pinnalla  $r = a$ . Toisaalta potentiaali on jatkuva, joten

$$\varphi_u(a, \theta) = \varphi_i(a, \theta). \quad (5.18)$$

Kaukana sylinteristä virta on häiriintymätön, joten

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta, \text{ kun } r \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

Tehdään origossa ja kaukaisuudessa hyvin käyttäytyvät ratkaisuyritteet (vrt. kappale 2.9.3)

$$\varphi_i = Ar \cos \theta \quad (5.20)$$

$$\varphi_u = -E_0 r \cos \theta + \frac{B \cos \theta}{r}. \quad (5.21)$$

Tässä on rohkeasti arvattu, että vain  $\cos \theta$ :aan verrannolliset termit tulevat kyseeseen, sillä ainoastaan ne kytkeytyvät ulkoiseen kenttään. Nyt reunaehdot antavat

$$Aa \cos \theta = -E_0 a \cos \theta + \frac{B \cos \theta}{a} \quad (5.22)$$

$$\sigma_i A \cos \theta = \sigma_u \left( -E_0 \cos \theta - \frac{B \cos \theta}{a^2} \right). \quad (5.23)$$

Ratkaistaan näistä kertoimet  $A$  ja  $B$

$$A = \frac{-2\sigma_u}{\sigma_i + \sigma_u} E_0 \quad (5.24)$$

$$B = \frac{\sigma_i - \sigma_u}{\sigma_i + \sigma_u} E_0 a^2 \quad (5.25)$$

ja ongelma on yksikäsitteisesti ratkaistu.

Jos sylinteri on hyvä eriste ( $\sigma_i \rightarrow 0$ ), niin kaikki virta kiertää sen, jolloin

$$\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_0 - \frac{J_0 a^2}{r^2} (\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta). \quad (5.26)$$

Sähkövirran virtaviivat kiertävät esteen siististi. Ongelma on analoginen kokoonpuristumattomassa nestevirtauksessa ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ) olevan sylinterinmuotoisen virtausesteen kanssa. Laplacen yhtälön ratkominen on varsin yleispätevä menetelmä fysiikassa (Feynman Lectures, osa 2, luku 12-1: The same equations have the same solutions).

## 5.2 Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki

Magnetismi olemassaolo on tunnettu kauan, mutta sen yhteys sähköön löytyi vasta vuonna 1820, kun *Ørsted* havaitsi, että sähkövirta aiheuttaa magneettikentän. Magneettikenttä määritellään voimavaikutuksen kautta samaan tapaan kuin sähkökenttä. Pian *Ørstedin* kerrottua havainnoistaan *Ampère* julkaisi mittaustuloksensa, joiden mukaan kahden virtasilmukan, joissa kulkee virrat  $I_1$  ja  $I_2$ , välillä vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (5.27)$$

Tämä on siis virtasilmukkaan 2 vaikuttava voima (vrt. Coulombin laki). Koska SI-yksiköissä määritellään  $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$ , tämän voiman mittausta varsinaisesti määrittelee ampeerin, josta saadaan coulombi ja muut sähköopin SI-yksiköt. Magneettivuon tiheyden SI-yksikkö on tesla ( $\text{T} = \text{Ns/Cm} = \text{N/Am}$ ) ja magneettivuon yksikkö weber ( $\text{Wb} = \text{Tm}^2$ ). Koska

aivotoiminta	1 pT
galaktienvälinen kenttä	1–10 pT
tähtienvälinen kenttä	$\sim 0,1$ nT
aurinkotuulen kenttä Maan etäisyydellä	5 nT
ionosfäärivirtojen kenttä maanpinnalla	10–1000 nT
Maan magneettikenttä Helsingissä	50 $\mu$ T
kenttä Auringon pinnalla	10–100 mT
voimakas kestopagneetti	1 T
suurin ihmisen aikaansaama kenttä	20 T
neutronitähti – magnetar	$10^6 - 10^{11}$ T

Taulukko 5.2: Magneettivuon tiheyksien suuruuksia ja suuruusluokkia.

esimerkiksi maapallon magneettikenttä maan pinnalla vaihtelee välillä 30–60  $\mu$ T, on tesla useissa sovellutuksissa varsin suuri yksikkö (taulukko 5.2).

Virtasilrukoiden välisen voiman lausekkeesta ei välittömästi nähdä, että voiman ja vastavoiman laki on voimassa. Näin kuitenkin on, minkä voi todistaa pienellä vektorilaskulla. Se osoitetaan myös energiatarkastelulla luvussa 8.

Voiman lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2), \quad (5.28)$$

missä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.29)$$

on silmukan  $C_1$  synnyttämä magneettikenttä (oikeammin magneettivuon tiheys) pisteessä  $\mathbf{r}_2$ , joka on silmukassa  $C_2$ . Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi**, joskus myös Ampèren ja Laplacen laiksi (kunnia kuulunee kaikille). Se voidaan yleistää jatkuvalla virrantiheydelle korvaamalla  $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J}dV$  ja korvaamalla lenkki-integraali tilavuusintegraalilla. Integrandi on nollasta poikkeava vain alueessa, jossa  $\mathbf{J} \neq 0$ , joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (5.30)$$

Näin voidaan laskea magneettikenttä mielivaltaisesta virtajakautumasta samaan tapaan kuin staattinen sähkökenttä annetusta varausjakautumasta.

HT: Omaksu viimeistään nyt koulusta tuttu Biot'n ja Savartin lain sisältämä lyhyen virta-alkion (oikean käden peukalo) magneettikentän (oikean käden sormet) suuntasääntö.

Kokeellinen tosiasia on, että kaikki magneettikentät voidaan antaa virtajakautumien avulla. Suoraviivaisella laskulla nähdään (HT), että

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.31)$$

joka on Coulombin lain jälkeen toinen laki Maxwellin yhtälöiden joukossa ja ilmaisee, että ei ole olemassa erillisiä kentän  $\mathbf{B}$  lähteitä tai nieluja eli magneettisia varauksia (magneettisia monopoleja). Tämä merkitsee myös sitä, että magneettikentän kenttäviivoilla ei ole alku- eikä loppupäätä, vaan kaikki kenttäviivat sulkeutuvat.

Magneettikentäksi kutsuttu suure  $\mathbf{B}$  on siis täsmällisemmin magneettivuon tiheys, jonka SI-yksikkö tesla (T) vastaa yhden weberin (Wb) suuruista magneettivuota neliömetrin läpi: magneettivuon  $\Phi$  pinnan  $S$  läpi on

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.32)$$

Magneettivuon suljetun pinnan läpi on nolla:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0. \quad (5.33)$$

Tätä voi havainnollistaa epätasämillisellä toteamuksella, että jokaisesta avaruuden alueesta lähtee yhtä paljon magneettikentän kenttäviivoja kuin niitä sinne tulee.

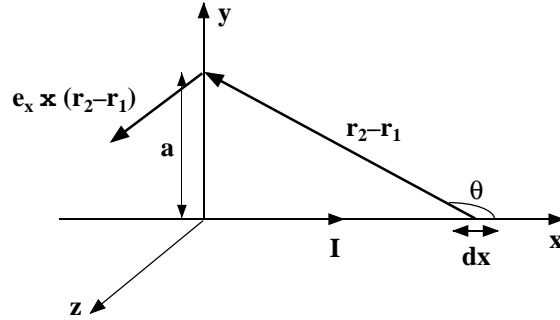
Magneettikentän lähteettömyys on puhtaasti kokeellinen laki eikä sille välttämättä ole syvempää teoreettista perustelua. Osa sähköistä, heikkoa ja vahvaa vuorovaikutusta yhdistävistä yhtenäiskenttäteorioista mahdollistaa magneettisten monopolioiden olemassaolon. Ne voidaan periaatteessa ottaa mukaan myös klassiseen elektrodynamiikkaan kirjoittamalla  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$ , missä  $\rho_m$  on magneettinen varaustiheys. Tähän ei kuitenkaan ole mitään syytä, koska monopolioiden vaikutuksia ei havaita klassisen elektrodynamiikan puitteissa.

### Esimerkki. Pitkän suoran virtajohtimen aiheuttama kenttä

Olkoon johdin  $x$ -akselilla ja lasketaan magneettikenttä pisteessä  $\mathbf{r}_2$   $y$ -akselilla. Merkitään  $d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{e}_x$ ;  $\mathbf{r}_2 = a\mathbf{e}_y$ , jolloin  $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = a dx \mathbf{e}_z$ . Biot'n ja Savartin lain suoraviivainen käyttö antaa

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left| \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.34)$$





Kuva 5.1: Suoran virtajohtimen aiheuttaman magneettikentän laskeminen.

Jos virtajohde on äärellisen mittainen, magneettikenttä on oheisessa kuvassa määritellyn kulman  $\theta$  funktio

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{e}_z \left|_{-L_1}^{L_2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{e}_z \left|_{\theta_1}^{\theta_2} (-\cos \theta). \quad (5.35)$$

Tässä käytettiin karteesta koordinaatistoa, missä suunnan  $\mathbf{e}_z$  määrää tarkastelupisteen paikka. Lukiosta muistetaan, että magneettikenttä kiertää suoran johtimen ympäri oikean käden kiertosäännön mukaisesti. Käytännöllä sylinterikoordinaatistoa, missä positiivinen  $z$ -akseli on virran suuntainen ja  $\mathbf{e}_\theta$  on atsimutaalikoordinaatin yksikkövektori (siis *eri kulma* kuin ylläolevassa kuvassa), magneettikenttä on

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{e}_\theta \quad (5.36)$$

**Esimerkki. Ympyränmuotoisen virtasilmukan kenttä ympyrän keskipisteen läpi kulkevalla akselilla**

Olkoon ympyrän säde  $a$  ja tarkastellaan kenttää ympyrän tasoa vastaan kohtisuorassa olevalla keskipisteen kautta kulkevalla  $z$ -akselilla. Olkoon  $\mathbf{e}_z$ -vektorin suunta virtaan nähden oikean käden säännön mukainen. Nyt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Jos ympyröitä on useampia, kuten kelassa, on jokaisen osuus summattava.

**Esimerkki. Helmholtzin kela**

Helmholtzin kela muodostuu kahdesta  $N$ -kertaisesta silmukasta, joiden keskipisteet ovat samalla  $z$ -akselilla. Olkoot kelojen säteet  $a$  ja etäisyys  $2b$ . Tällöin kenttä  $z$ -akselilla kelojen välissä etäisyydellä  $z$  toisesta kelasta on

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\}. \quad (5.38)$$

Helmholtzin keloja käytetään tuottamaan suhteellisen homogeeninen magneettikenttä rajoitettuun alueeseen. Tämän tapainen systeemi on käytössä Nurmijärven geofysiikan observatoriossa, jonka testilaboratoriossa voidaan esimerkiksi kumota maapallon kenttä pienessä alueessa.

Se, että kenttä on hyvin homogeeninen, nähdään tarkastelemalla magneettikentän derivaattaa  $z$ -akselilla. Kun  $z = b$ , niin  $dB_z/dz = 0$ . Myös toinen derivaatta on nolla tässä pisteessä, jos  $2b = a$ . Asettamalla siis kelat niiden säteen etäisyydelle toisistaan, on kenttä pisteen  $z = a/2$  ympäristössä mahdollisimman homogeeninen. Kolmaskin derivaatta häviää ja kentän epähomogeenisuus ilmenee vasta Taylorin sarjan neljännessä termissä

$$\begin{aligned} B_z(z) &= B_z(a/2) + \frac{(z - a/2)^4}{24} \left. \frac{d^4 B_z}{dz^4} \right|_{z=a/2} + \dots \\ &\approx B_z(a/2) \left[ 1 - \frac{144}{125} \left( \frac{z - a/2}{a} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

**5.3 Ampèren laki**

Tarkastellaan stationaarista virtaa, siis  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Lasketaan magneettikentän roottori lähtien Biot'n ja Savartin laista

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right\}. \quad (5.40)$$

Huom. Roottori lasketaan paikkavektorin  $\mathbf{r}$  suhteen. Kun se viedään integraalin sisään ja kirjoitetaan ristitulot auki, niin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'. \quad (5.41)$$

Muistetaan kaava

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.42)$$

joten integraalin ensimmäinen termi on  $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$ .

Jälkimmäisessä termissä voidaan  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ :n antisymmetrisyyden vuoksi vaihtaa derivointi tapahtuvaksi  $\mathbf{r}'$ :n suhteen vaihtamalla merkki. Koska jälkimmäinen termi sisältää  $\nabla$ :n ja  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ :n välisen dyaditulon, käsitellään se  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ :n komponentti kerrallaan. Muokataan  $x$ -komponenttia kaavalla

$$\mathbf{J} \cdot \nabla' \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left( \mathbf{J} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla' \cdot \mathbf{J}. \quad (5.43)$$

Oikean puolen jälkimmäinen termi on nolla oletuksen  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  perusteella. Jäljellä oleva tilavuusintegraali voidaan muuttaa pintaintegraaliksi

$$\int_V \nabla' \cdot \left( \mathbf{J} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV' = \oint_S \mathbf{J} \frac{x' - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}'. \quad (5.44)$$

Tämän on oltava voimassa pinnan valinnasta riippumatta, joten pinta voidaan siirtää virtajakautuman ulkopuolelle eli integraalin on oltava nolla. Sama pätee kaikille komponenteille, joten jäljelle on jäänyt **Ampèren laki** differentiaali muodossa

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.45)$$

Integraalimuotoon Ampèren laki saadaan käyttämällä Stokesin lausetta muodossa

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.46)$$

joten

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 I. \quad (5.47)$$

Siis suljettua lenkkiä pitkin integroitu magneettivuon tiheys on  $\mu_0$  kertaa lenkin läpi kulkeva kokonaisvirta. Tätä tulosta kutsutaan **Ampèren kiertosäännöksi** (vrt. sähköstatiikan Gaussin laki). Sen avulla voi laskea suoraan magneettikentän sopivissa symmetrisissä tapauksissa. Integraaleissa on muistettava, että pinnan  $S$  normaalivektori  $\mathbf{n}$  määrittelee oikeakätisesti käyräalkion  $d\mathbf{l}$ .

### Esimerkki. Kenttä toroidikäämin sisällä

Tarkastellaan toruksen ympärille kierrettyä käämiä ( $N$  kierrosta). Kentän voidaan päätellä (HT) olevan sylinterikoordinaateissa ilmaistuna muotoa  $\mathbf{B} = B(r, z)\mathbf{e}_\phi$ , missä  $\phi$  on toruksen keskipistettä kiertävä kulma ja  $r$  etäisyys toruksen keskipisteestä toruksen sisällä olevaan pisteeseen. Sovelletaan Ampèren kiertosääntöä pitkin  $r$ -säteistä ympyrää toruksen sisällä:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(r, z)2\pi r = \mu_0 NI, \quad (5.48)$$

joten kenttä riippuukin vain radiaalietäisyydestä:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi. \quad (5.49)$$

Toroidin ulkopuolella magneettikenttä on nolla, sillä geometrian perusteella  $\mathbf{B} = B(r, z)\mathbf{e}_\phi$  ja lenkin läpäisevä virta on nolla.

## 5.4 Virtasilmukan magneettimomentti

Tarkastellaan virtajohdinta, joka muodostaa suljetun silmukan  $C$ . Tällöin koko silmukkaan vaikuttaa voima (5.28)

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (5.50)$$

Kokonaisvirta ei riipu paikasta, joten se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, samoin magneettikenttä, mikäli se on vakio:

$$\mathbf{F} = -I\mathbf{B} \times \oint_C d\mathbf{l} = 0. \quad (5.51)$$

Siis *vakio*magneettikentässä virtasilmukkaan vaikuttava voima on nolla.

Silmukka-alkioon vaikuttava vääntömomentti on

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad (5.52)$$

joten koko silmukalle

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \quad (5.53)$$

Oletetaan jälleen, että magneettikenttä on vakio. Kirjoitetaan ristitulo auki kaavalla  $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})\mathbf{B}$ . Tällöin

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} - I\mathbf{B} \oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.54)$$

Jälkimmäinen integraali muuntuu Stokesin lauseella muotoon  $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ . Ensimmäinen integraali muuntuu puolestaan yleistetyllä Stokesin lauseella muotoon

$$\oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}). \quad (5.55)$$

Koska  $\mathbf{B}$  on vakio, niin  $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}$ , joten

$$\boldsymbol{\tau} = I \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = I \left( \int_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (5.56)$$

missä pinta-alavektori  $\mathbf{S}$  voidaan kirjoittaa yleistetyn Stokesin lauseen avulla

$$\mathbf{S} = \int_S \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}. \quad (5.57)$$

Tulosta  $I\mathbf{S}$  kutsutaan silmukan  $C$  **magneettimomentiksi**

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}. \quad (5.58)$$

Tämän avulla vääntömomentti on

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (5.59)$$

Vaikka silmukkaan ei kohdistukaan voimaa, joka kiihdyttäisi silmukkaa kokonaisuutena, siihen kohdistuu vääntömomentti. Se pyrkii kääntämään silmukan pintaa kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Tätä käytetään hyväksi esimerkiksi avaruusalusten asennonsäätöjärjestelmissä.

Magneettimomentti voidaan yleistää mielivaltaiselle virtajakaumalle ( $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} dV$ ) korvaamalla

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \rightarrow \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV. \quad (5.60)$$

## 5.5 Magneettikentän potentiaaliesitys

### 5.5.1 Vektoripotentiaali

Koska magneettikenttä on lähteetön ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), se voidaan ilmaista vektorikentän roottorina:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.61)$$

**Vektoripotentiaali**  $\mathbf{A}$  ei ole yksikäsitteinen, sillä olipa  $f$  mikä riittävän siisti skalaarikenttä hyvänsä, niin  $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}$ .

Vektoripotentiaali voidaan ilmaista virran avulla lähtemällä jälleen Biot'n ja Savartin laista:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (5.62)$$

Integrandi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.63)$$

Sovelletaan tähän kaavaa  $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \nabla f$ . Koska  $\nabla$  ei operoi muuttujaan  $\mathbf{r}'$ ,  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$  ja integrandiksi tulee

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (5.64)$$

$\nabla$  voidaan siirtää  $\mathbf{r}'$ :n suhteen laskettavan integraalin ulkopuolelle, joten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right\} \quad (5.65)$$

eli

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (5.66)$$

Kirjoittamalla  $\mathbf{A}$  komponenttimuodossa

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5.67)$$

nähdään, että komponentit  $A_i$  ovat matemaattisesti samaa muotoa kuin sähköstaattisen potentiaalin lauseke

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (5.68)$$

joten jokaiselle komponentille erikseen ja siten koko vektorille on voimassa Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.69)$$

Koska toisaalta

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (5.70)$$

vektoripotentiaalin on toteutettava ehto

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0. \quad (5.71)$$

Usein vektoripotentiaali valitaan siten, että  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , mikä itse asiassa toteutuu edellä, jos  $\mathbf{J}$  poikkeaa nolasta vain äärellisessä alueessa (HT).

Sähköstatiikassa skalaaripotentiaali helpottaa laskuja olennaisesti. Vektoripotentiaali on monimutkaisempi, mutta käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Se on myös hyödyllinen sähkömagneettisiin aaltoihin ja säteilyyn liittyvissä ongelmissa ja keskeinen apuväline elektrodynamiikan teoriassa ja relativistisissa tarkasteluissa. Kvanttielektrodynamiikka formuloidaan nimenomaan vektoripotentiaalin avulla, vaikka se sinällään olekaan mitattavissa oleva lokaali suure eli observaabeli.

Harjoitustehtävä elektrodynamiikan perusteista kiinnostuneelle: Etsi kirjallisuudesta tai internetistä tietoa nk. Bohmin ja Aharonovin ilmiöstä ja selvitä, kuinka ylläoleva väite on perusteltavissa.

### 5.5.2 Multipolikehitelmä

Vektoripotentiaali voidaan esittää multipolikehitelmänä samaan tapaan kuin sähköinen skalaaripotentiaali. Tarkastellaan divergenssitöntä virtajakaumaa  $\mathbf{J}$ , joka poikkeaa nolasta vain äärellisessä tilavuudessa  $V$ . Koska vektoripotentiaalin integraaliesitys on samaa muotoa kuin sähköisen skalaaripotentiaalin, voidaan komponentille  $A_l$  suoraan kirjoittaa

$$A_l(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \int J_l(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' J_l(\mathbf{r}') dV' + \dots \right). \quad (5.72)$$

Integraalien laskemiseksi käytetään seuraavaa aputulosta:

$$\nabla \cdot (fg\mathbf{J}) = f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f, \quad (5.73)$$

missä  $f$  ja  $g$  ovat vapaasti valittavia funktioita. Tässä käytettiin myös oletusta  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Integroimalla tilavuuden  $V$  yli saadaan

$$\int (f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f) dV' = 0. \quad (5.74)$$

Tässä  $\nabla \cdot (fg\mathbf{J})$ :n sisältävä integraali voidaan ulottaa yli koko avaruuden. Muuntamalla tilavuusintegraali pintaintegraaliksi (Gaussin lause) saadaan nolla, koska alueen  $V$  ulkopuolella virrantiheys on nolla.

Integroitaessa multipolikehitelmän ensimmäistä termiä valitaan yksinkertaisesti  $f = 1$  ja  $g = x_l$ , jolloin  $\int \mathbf{J} dV = 0$  eli monopolitermiä ei magneettikentän tapauksessa ole.

Seuraava eli dipolitermi käsitellään valitsemalla  $f = x_l, g = x_n$ , jolloin

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l dV' = x_n \int x'_n J_l dV' = -\frac{1}{2} x_n \int (x'_l J_n - x'_n J_l) dV', \quad (5.75)$$

missä summataan kahdesti esiintyvän indeksin  $n$  yli ja käytettiin kaavaa (5.74). Integrandi muistuttaa vektoritulon komponenttia, ja pienen tarkastelun jälkeen huomataan, että

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l dV' = -\frac{1}{2} \epsilon_{lnp} x_n \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))_p dV', \quad (5.76)$$

missä  $\epsilon_{lnp}$  on permutaatioisymboli ja summaus on nyt myös yli indeksin  $p$ . Lauseke sievennyy muotoon

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' J_l dV' = -\frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV')_l = (\mathbf{m} \times \mathbf{r})_l, \quad (5.77)$$

missä  $\mathbf{m}$  on virtajärjestelmän magneettimomentti.

Vektoripotentiaalin multipolikehitelmän johtava termi on siis

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.78)$$

Magneettivuon tiheys saadaan laskemalla tämän roottori (HT):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]. \quad (5.79)$$

Kaukaa katsottaessa ainoastaan systeemin magneettinen momentti vaikuttaa magneettikenttään. Tämä on muodoltaan samanlainen kuin sähköisen dipolin aiheuttama sähkökenttä (2.38). Tämän vuoksi magneettista momenttia kutsutaan usein **magneettiseksi dipolimomentiksi**.

### 5.5.3 Magneettikentän skalaaripotentiali

Alueissa, joissa  $\mathbf{J} = 0$ , magneettikenttä on pyörteetön,  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , joten näissä alueissa se voidaan ilmaista myös **magneettisen skalaaripotentialin**  $\psi$  avulla:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \psi. \quad (5.80)$$

Koska toisaalta aina  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , skalaaripotentiali toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (5.81)$$

joten sähköstatiikasta tuttuja apuneuvoja voi soveltaa magnetostatiikan ongelmiin, kunhan ollaan huolellisia erilaisten reunaehtojen kanssa.

Koska etäällä olevan virtasilmukan luoma magneettikenttä on matemaattisesti samaa muotoa kuin sähködipolin kenttä, voidaan magneettinen skalaaripotentiali ilmaista magneettisen dipolimomentin avulla. Koska

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right), \quad (5.82)$$

niin

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.83)$$

Erona sähköstatiikkaan magneettinen skalaaripotentiali on paikan yksiarvoinen funktio ainoastaan yhdesti yhtenäisissä alueissa, joissa ei kulje sähkövirtaa. Jos alueella on virtasilmukka niin moniarvoisuus nähdään seuraamalla silmukan läpi kulkevaa magneettikentän kenttäviivaa. Tultaessa takaisin alkupisteeseen ollaan samassa magneettikentässä, mutta  $\psi$  on joko kasvanut tai vähentynyt monotonisesti eli ei ole päätynyt samaan arvoon. Tarkastelualueesta voidaan tehdä yhdesti yhtenäinen, asettamalla tarkastelualueen rajapinnaksi jokin silmukan reunakäyrän rajoittama pinta.

Helppo esimerkki tilanteesta, jossa skalaaripotentiali ei ole paikan yksiarvoinen funktio, on äärettömän pitkä suora virtajohdin. Jos johdin on  $z$ -akselilla, niin sylinterikoordinaateissa skalaaripotentialiksi kelpaa  $\psi = -I\phi/(2\pi)$ , jolle  $\psi(\phi) \neq \psi(\phi + 2\pi)$ .



Magneettinen skalaaripotentiali eroaa sähköisestä siinä, että jälkimmäisellä on selvä fysikaalinen tulkinta: se antaa varauksellisen hiukkasen potentiaalienergian sähköstaattisessa kentässä. Magneetikentässä tällaista tulkintaa ei ole.

## 5.6 Lorentzin voima

Palautetaan mieleen origossa olevan varauksen  $q_1$  pisteessä  $\mathbf{r}$  olevaan varaukseen  $q$  aiheuttama Coulombin voima

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.84)$$

Tässä molemmat varaukset ovat levossa. Jos varaukset liikkuvat vakionopeuksilla  $\mathbf{v}$  ja  $\mathbf{v}_1$ , aiheuttaa varaus  $q_1$  varaukseen  $q$  **magneettisen voiman**

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \mathbf{v} \times \left( \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (5.85)$$

Tämän voi päätellä soveltamalla kahden virtasilmukan välistä magneettista voimaa (5.27) infinitesimaalisille virta-alkioille. Laki on luonnollisesti myös todennettavissa kokeellisesti.

Magneettinen voima voidaan myös lausua muodossa (vrt. virtasilmukat)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (5.86)$$

missä  $\mathbf{B}$  on magneettivuon tiheys

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.87)$$

Superpositioperiaate pätee myös magneettikentän tapauksessa.

Yhteenlaskettua sähköistä ja magneettista voimaa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.88)$$

kutsutaan **Lorentzin voimaksi**. Lauseke on voimassa myös ajasta riippuville kentille. Magneettinen voima on aina kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan, joten  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$ . Se ei siis tee työtä varattuun hiukkaseen. Jos halutaan muuttaa varauksellisen hiukkasen liike-energiaa, tarvitaan aina sähkökenttä, vaikka se luotaisiinkin muuttuvan magneettikentän avulla.

Tässä on hyvä muistaa, että niin liike-energia kuin sähkökenttäkin ovat koordinaatistosta riippuvia suureita. Sähkökentän koordinaatistomuunnoksiin tutustutaan lähemmin suhteellisuusteorian yhteydessä.

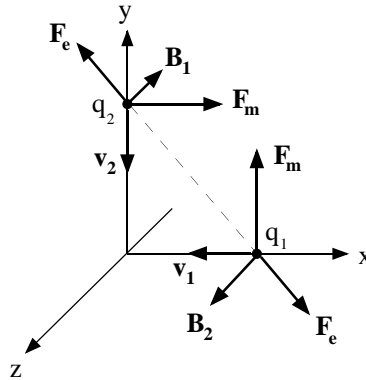
Koska  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ , niin

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left( \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (5.89)$$

Verrataan magneettista ja sähköistä voimaa toisiinsa:

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v v_1}{c c}. \quad (5.90)$$

Tavallisilla nopeuksilla liikkuville varauksille sähköiset voimat ovat paljon suurempia kuin magneettiset voimat. Magneettiset voimat eivät kuitenkaan ole merkityksettömiä, sillä vaikka aine on yleensä sähköisesti neutraalia, se saattaa olla voimakkaasti magnetoitunutta.



Kuva 5.2: Rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymlakia?

Lopuksi esitetään ongelma, johon palataan luvussa 9 (kuva 5.2). Kaksi samanmerkkistä varausta ( $q_1$  ja  $q_2$ ) liikkuu hetkellisesti negatiivisten  $x$ - ja  $y$ -akselien suuntaan. Hiukkasten välillä on sähköinen poistovoima  $\mathbf{F}_e$ . Varauksen  $q_1$  aiheuttama magneettikenttä varauksen  $q_2$  kohdalla osoittaa sivun sisään ja magneettinen voima  $\mathbf{F}_m$  oikealle. Vastaavasti varauksen  $q_2$  aiheuttama magneettikenttä varauksen  $q_1$  kohdalla osoittaa sivulta ulospäin ja magneettinen voima ylöspäin. Siispä varauksen  $q_1$  varaukseen  $q_2$  kohdistama sähkömagneettinen kokonaisvoima ei ole vastakkaisuuntainen varauksen  $q_2$  varaukseen  $q_1$  kohdistamaan voimaan. Onko jouduttu ristiriitaan Newtonin kolmannen lain kanssa ja sitä tietä ristiriitaan liikemäärän säilymlain kanssa?