

## Luku 6

# Magneettikenttä väliaineessa

### 6.1 Magnetoituma

Edellä rajoituttiin magneettikentän määrittämiseen magneettisilta ominaisuuksiltaan tyhjiönkaltaisessa väliaineessa. Aineen mikroskooppinen rakenne aiheuttaa todellisuudessa kullekin atomille ominaisen magneettisen dipolimomentin  $\mathbf{m}_i$ . Lasketaan yhteen kaikkien atomien dipolimomentit tilavuusalkiossa  $\Delta V$ . Aineen **magnetoituma** määritellään raja-arvona

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{m}_i. \quad (6.1)$$

Magnetoituma on siis väliaineen magneettisten dipolimomenttien tiheys paikan funktiona (vrt. polarisoituma). Koska magneettisen momentin SI-yksikkö on  $\text{Am}^2$ , on magnetoituman yksikkö  $\text{A/m}$ .

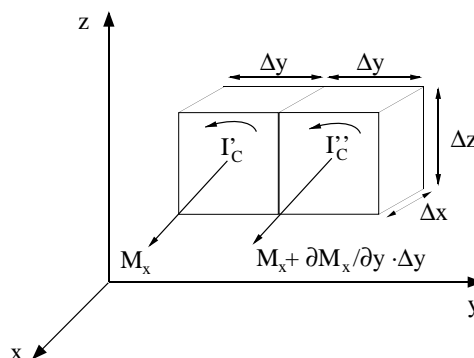
Jos dipolimomenttien tiheys on homogeeninen, kutakin dipolimomenttia vastaavat virtasilmukat summautuvat nolnaan eivätkä aiheuta nettovirtaa. Jos jakautuma kuitenkin on epätasainen, on tarkastelupisteen eri puolilla eri määrä virta-alkioita ja tuloksena on kokonaisvirta  $\mathbf{J}_M$ . Virran laskemiseksi tarkastellaan kahta pientä tilavuusalkiota. Olkoon kummankin tilavuus  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ja sijaitkoot ne rinnakkain  $y$ -akselin suuntaan (kuva 6.1).

Jos ensimmäisen alkion magnetoituma on  $\mathbf{M}(x, y, z)$ , niin toisen magnetoituma on

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{korkeamman kertaluvun derivaattoja.}$$

Ensimmäisen elementin magneettisen momentin  $x$ -komponentti ilmaistaan silmukavirran  $I'_C$  avulla:

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_C \Delta y \Delta z \quad (6.2)$$



Kuva 6.1: Magnetoitumasta aiheutuvan virran laskeminen.

ja vastaavasti toiselle elementille

$$\left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta y \Delta z = I_C'' \Delta y \Delta z. \quad (6.3)$$

Elementtien välistä nousee nettovirta  $z$ -akselin suuntaan:

$$I_C' - I_C'' = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (6.4)$$

Toistamalla tarkastelu kahdelle rinnakkaiselle alkiolle  $x$ -akselilla (tarkkana merkien kanssa!), saadaan  $z$ -akselin suuntaiseksi virraksi

$$I_C = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (6.5)$$

Nämä ovat ainoat magneettiset momentit, jotka tuottavat virtaa  $z$ -akselin suuntaan. Laskemalla ne yhteen ja jakamalla pinta-alaelementillä saadaan magnetoitumisvirran tiheyden  $z$ -komponentiksi

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (6.6)$$

eli vektorimuodossa

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (6.7)$$

## 6.2 Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä

Lasketaan sitten magneettisen aineen aiheuttama magneettikenttä. Lähdetään liikkeelle vektoripotentialista (vrt. 5.78)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.8)$$

Tutuilla vektorikikoilla tämä saadaan muotoon

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS', \quad (6.9)$$

missä  $S$  on tilavuuden  $V$  pinta. Pinnalla magnetoitumisvirran tiheys on

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (6.10)$$

Tämä on magnetoitumisvirta yksikköpituutta kohti eli virta on ikään kuin litistetty kulkemaan yksiulotteisen pinnan (eli viivan) läpi. Vektoripotentiaali määräytyy siis magnetoitumisvirrasta tilavuudessa  $V$  ja tilavuuden pinnalla  $S$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (6.11)$$

Tulos ei liene yllätys (vrt. sähköstaattinen potentiaali). Tästä ei kuitenkaan ole aivan helppo laskea magneettikenttää, koska  $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ .

Lähdetäänkin liikkeelle suoraan vektoripotentiaalin määritelmästä:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV', \quad (6.12)$$

missä roottori kohdistuu vektoriin  $\mathbf{r}$ . Nyt integrandi saadaan muokatuksi muotoon (HT)

$$\nabla \times \left[ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - (\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.13)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi tuo magneettikenttään osuuden

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (6.14)$$

Toinen termi vaatii jälleen vähän vektoriakrobatiaa (HT), joka antaa tuloksen

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \cdot \left( \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}). \quad (6.15)$$

Tässä  $\psi(\mathbf{r})$  on magneettisen materiaalin skalaaripotentiaali. Magneettikenttä on tämän potentiaalin ja paikallisten virtojen aiheuttaman kentän summa:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (6.16)$$

Aineen ulkopuolella  $\mathbf{M}$  on nolla, joten siellä kenttä saadaan skalaaripotentiaalista, joka on siis aineessa olevien dipolimomenttialkioiden integraali.

Tässä on päädytty jokseenkin samanlaiseen kuvailuun kuin eristekappaleiden kanssa. Magneettisen skalaaripotentialin saa edelleen muotoon

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (6.17) \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' .\end{aligned}$$

**Magneettisten napojen tiheys**  $\rho_M$  ja **magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys**  $\sigma_M$  ovat samankaltaisia apusuureita kuin polarisaatiotiheydet  $\rho_P$  ja  $\sigma_P$  sähköstatiikassa.

### 6.3 Magneettikentän voimakkuus

Magneettisen aineen itsensä lisäksi kokonaiskenttään vaikuttaa vapaiden varausten aiheuttama virta. Esimerkiksi rauta voi olla magnetoitunutta ja lisäksi sen johtavuuselektronit kuljettavat “vapaata” virtaa. Niinpä

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) . \quad (6.18)$$

Tämä voidaan laskea, mikäli  $\mathbf{M}$  ja  $\mathbf{J}$  ovat tiedossa kaikkialla. Usein virta tunnetaan, mutta  $\mathbf{M}$  riippuu  $\mathbf{B}$ :stä.

Otetaan käyttöön apukenttä  $\mathbf{H}$ , jota kutsutaan **magneettikentän voimakkuudeksi**:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} . \quad (6.19)$$

Tällöin

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \nabla \psi(\mathbf{r}) . \quad (6.20)$$

Tämä voi näyttää turhalta tempulta, koska  $\mathbf{H}$  riippuu yhä  $\mathbf{M}$ :stä  $\rho_M$ :n ja  $\sigma_M$ :n kautta, mutta toimihan sama menetelmä myös sähköstatiikassa.

Kentän  $\mathbf{H}$  hyödyllisyys piilee siinä, että sille saadaan virrantiheydestä riippuva differentiaaliyhtälö. Palautetaan ensiksi mieleen, että  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  on kokeellinen laki, jonka mukaan magneettivuon tiheys voidaan aina palauttaa virtajakautumiin, eikä todellisista eristetyistä magneettisista monopoleista ole havaintoja. Nyt Ampèren laissa on tärkeä huomioida kaikki sähkövirrat

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) , \quad (6.21)$$

missä  $\mathbf{J}$  kuvaa varausten siirrokseen liittyvää vapaata virtaa. Ottamalla huomioon yhteys  $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$  saadaan tästä

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (6.22)$$

$\mathbf{H}$ -kentän pyörteet aiheutuvat vain vapaiden varausten kuljettamasta virrasta. Magneettisten ongelmien ratkomiseen tarvitaan tämän lisäksi  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , reunaehdot ja rakenneyhtälö  $\mathbf{B}$ :n ja  $\mathbf{H}$ :n välille.

Integraalimuodossa  $\mathbf{H}$ :lle pätee

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.23)$$

eli magneettikentän voimakkuuden integraali pitkin suljettua lenkkiä on yhtä suuri kuin varausten kuljettama kokonaisvirta, siis "vapaa" virta, lenkin läpi.

## 6.4 Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti

Kenttien  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{H}$  välinen suhde riippuu väliaineen ominaisuuksista samaan tapaan kuin kenttien  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{E}$  yhteys. Magneettiset aineet ovat yleensä niin monimutkaisia, että rakenneyhtälö on määritettävä kokeellisesti. Suurelle joukolla aineita yhteys on muotoa

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (6.24)$$

missä kerroin  $\chi_m$  on **magneettinen suskeptiivisuus**. Epäisotrooppiselle mutta lineaariselle väliaineelle  $\chi_m$  on tensori, epälineaarisessa väliaineessa se riippuu lisäksi magneettikentästä. SI-yksiköissä magneettinen suskeptiivisuus on laaduton suure (sähköisen  $\chi$ :n laatu on sama kuin  $\epsilon_0$ :n).

Jos  $\chi_m > 0$ , väliaine vahvistaa ulkoista magneettivuon tiheyttä ja ainetta kutsutaan **paramagneettiseksi**. Jos taas  $\chi_m < 0$ , magneettivuon tiheys heikkenee ja aine on **diamagneettista**. Sekä paramagneettisilla että diamagneettisilla aineilla magneettinen suskeptiivisuus on pieni:  $|\chi_m| \ll 1$ .

Kenttien  $\mathbf{M}$  ja  $\mathbf{H}$  välinen lineaarinen yhteys merkitsee, että myös kenttien  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{H}$  välinen rakenneyhtälö on lineaarinen

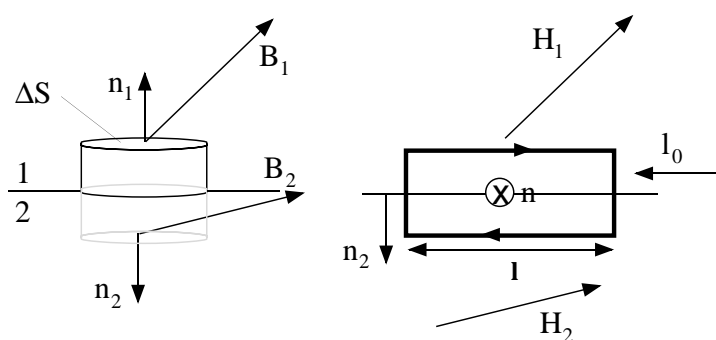
$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \equiv \mu\mathbf{H}, \quad (6.25)$$

missä  $\mu$  on väliaineen **permeabiliteetti**. Aineiden magneettisia ominaisuuksia tarkastellaan hieman enemmän tämän luvun lopussa.

## 6.5 Magneettikenttävektoreiden rajapintaehdot

Tarkastellaan kuvan 6.2 mukaista kahden väliaineen rajapintaa. Magneettivuon tiheyden  $\mathbf{B}$  reunaehto on analoginen sähkövuon tiheyden  $\mathbf{D}$  reunaehdon kanssa. Kuvan pillerirasian pinnan yli laskettu  $\mathbf{B}$ :n integraali on

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0. \quad (6.26)$$



Kuva 6.2: Magneettikenttävektoreiden rajapintaehtojen määrittäminen.

Litistämällä pillerirasian vaippa infinitesimaaliseksi saadaan

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0, \quad (6.27)$$

missä  $\Delta S$  on rasian kannen pinta-ala. Koska  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ , niin

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (6.28)$$

eli magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi.

Magneettikentän voimakkuudelle saadaan reunaehto Stokesin lauseen avulla tarkastelemalla  $\mathbf{H}$ :n lenkki-integraalia kuvan suorakaidetta pitkin

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.29)$$

missä  $\mathbf{n}$  on normaalikomponentti integroimislenkin läpi ( $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0$ ). Litistettäessä integroimislaatikko jälleen infinitesimaaliseksi silmukan läpi kulkeva virta voi olla ainoastaan pintavirtaa  $\mathbf{K}$ , joten

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \Delta l \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0), \quad (6.30)$$

jonka avulla saadaan

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 \Delta l = \Delta l \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \Delta l (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{l}_0. \quad (6.31)$$

Tästä seuraa reunaehto

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_2)_t \quad (6.32)$$

eli magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentti on jatkuva rajapinnan yli, ellei pinnalla ole pintavirtaa. Mikäli  $\mathbf{H}$ -kenttä tunnetaan pinnan molemmiin puolin, saadaan pintavirran tiheys lausekkeesta

$$\mathbf{K} = \mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1). \quad (6.33)$$

Useissa magnetismiin liittyvissä ongelmissa on näppärää tarkastella vuoputkia. Tarkastellaan magneettikentän kenttäviivoja, jotka ovat jokaisessa pisteessä kentän  $\mathbf{B}$  tangentin suuntaisia. Vuoputki on ikäänkuin kimppu kenttäviivoja tai täsmällisemmin alue, jonka vaipan läpi ei kulje yhtään kenttäviivaa. Olkoot  $S_1$  ja  $S_2$  vuoputken päät. Tällöin vuoputken tilavuuden yli laskettu integraali on

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS_2 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' dS_1 = \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0, \quad (6.34)$$

missä  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{n}'$  ovat magneettikentän suuntaisia putken päiden normaalivektoreita. Magneettivuo pitkin vuoputkea on siis vakio. Tämä koskee vain  $\mathbf{B}$ -kenttää eikä välttämättä päde  $\mathbf{H}$ -kentälle:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{H} dV = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dV = \int_V \rho_M dV. \quad (6.35)$$

Vuoputken voi siis tulla magneettikentän voimakkuutta, mikäli aineella on nollasta poikkeava napavoimakkuus.

## 6.6 Reuna-arvotehtäviä magneettikentässä

Magneettiset reuna-arvotehtävät ovat yleensä monimutkaisempia kuin sähköstatiikassa. Sähkövirrat, epätasainen magnetoituminen tai epälineaarinen rakenneyhtälö edellyttävät Laplacen yhtälöä monimutkaisempien yhtälöiden ratkomista ja hankaloittavat reunaehtoja. Rajoitutaan tässä yksinkertaisiin tilanteisiin.

Virrattomuus ( $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ ) tekee mahdolliseksi magneettikentän esittämisen skalaaripotentialin gradienttina  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ . Jos lisäksi aine on magneettisesti ainakin likimain lineaarista eli  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  ja tasaisesti magnetoitunutta ( $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ ), niin  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  ja päästään ratkaisemaan Laplacen yhtälöä

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (6.36)$$

**Esimerkki. Magnetoituva pallo tasaisessa magneettikentässä**

Tämä ongelma on sama kuin luvun 3.5.1 eristepallo tasaisessa ulkoisessa sähkökentässä. Lausumalla  $\psi$  vyöhykeharmonisten funktioiden avulla ja käyttämällä reunaehtoja saadaan pallon sisällä magneettikentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3B_0}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \mathbf{e}_z = \text{vakio} \quad (6.37)$$

ja ulkopuolella

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{e}_z + \left[ \frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left( \frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta), \quad (6.38)$$

missä  $\mathbf{e}_z$  on ulkoisen magneettikentän suuntainen, koordinaatiston origo on pallon keskipisteessä ja kulma  $\theta$  on poikkeama  $z$ -akselilta. Laiskempi laskija huomaa, että  $\mathbf{B}$ -kenttä vastaa sähköstatiikan  $\mathbf{D}$ -kenttää, ja kirjoittaa vastaukset suoraan symboleja vaihtamalla.

**Esimerkki. Tasaisesti magnetoituneen pallon kenttä tyhjiössä**

Olkoon pallon säde  $a$  ja magnetoituma vakio  $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$ . Tilanne on jälleen aksiaalisymmetrinen, joten magneettinen skalaaripotentiali pallon ulkopuolella (1) ja sisällä (2) voidaan kirjoittaa (ks. luku 2.9.2)

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (6.39)$$

$$\psi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta). \quad (6.40)$$

Nyt ei ole taustan kenttää, joten ulkokentässä kaikki  $r$ :n positiiviset potenssit on jätettävä pois. Sisäkentässä ei voi puolestaan olla negatiivisia potensseja, jotta ratkaisu olisi äärellinen pallon keskipisteessä. Reunalla  $r = a$

$$H_{1\theta} = H_{2\theta} \quad (6.41)$$

$$B_{1r} = B_{2r}. \quad (6.42)$$

$\mathbf{H}$ :n reunaehdosta seuraa yksinkertaisesti

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}. \quad (6.43)$$

$\mathbf{B}$ -kentässä on mukana myös magnetoituma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.44)$$



ja tämän normaalikomponentin jatkuvuus reunalla edellyttää, että

$$-\mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \mu_0 M \cos \theta. \quad (6.45)$$

Sijoittamalla näihin  $\psi$ :n lausekkeet saadaan yhtälöt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) P_n(\cos \theta) = \text{vakio} \quad (6.46)$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) [C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] \quad (6.47)$$

$$-\mu_0 M \cos \theta = 0.$$

Muistetaan, että Legendren polynomit ovat lineaarisesti riippumattomia funktioita. Kun  $n = 0$ , saadaan ehdot

$$C_{10} a^{-1} - A_{20} = \text{vakio} \quad (6.48)$$

$$\mu_0 C_{10} a^{-2} = 0. \quad (6.49)$$

Siis  $C_{10} = 0$  ja myös  $A_{20}$  voidaan valita nolaksi ilman, että sillä on vaikutusta kenttiin  $\mathbf{B}$  tai  $\mathbf{H}$ . Termeille  $n = 1$  on voimassa

$$C_{11} a^{-3} - A_{21} = 0 \quad (6.50)$$

$$2C_{11} a^{-3} + A_{21} - M = 0, \quad (6.51)$$

jonka ratkaisuna on  $C_{11} = Ma^3/3$ ;  $A_{21} = M/3$ .

Kun  $n \geq 2$ , yhtälöt toteutuvat ainoastaan kertoimilla  $C_{1n} = A_{2n} = 0$ . Ongelma on ratkaistu<sup>1</sup>. Potentiaalit ovat

$$\psi_1(r, \theta) = \frac{1}{3} M (a^3/r^2) \cos \theta \quad (6.52)$$

$$\psi_2(r, \theta) = \frac{1}{3} M r \cos \theta \quad (6.53)$$

ja  $\mathbf{H}$ -kentät saadaan näiden gradientteina

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} M (a^3/r^3) [2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \quad (6.54)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} M \mathbf{e}_z. \quad (6.55)$$

Ulkoinen  $\mathbf{B}$ -kenttä on  $\mu_0 \mathbf{H}_1$ . Koska pallon magnetoituma  $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z$ , jää pallon sisäiseksi  $\mathbf{B}$ -kentäksi

$$\mathbf{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M \mathbf{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}, \quad (6.56)$$

joka on siis vastakkaisuuntainen  $\mathbf{H}$ -kentälle. Ongelman voisi ratkaista myös suoraan integroimalla magnetoitumaa (yhtälö 6.17). Tasaisesti magnetoitunut pallo on analoginen tasaisesti polarisoituneen pallon kanssa.

<sup>1</sup>Olisi voitu myös päätellä suoraan, että sisäkentät ovat vakioita ja  $z$ -akselin suuntaisia. Tällöin potentiaalın kehityksessä kyseeseen tulevat vain  $\cos \theta$ -termit.

## 6.7 Kenttien $\mathbf{E}$ , $\mathbf{D}$ , $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$ merkityksestä

Olemme kutsuneet kenttiä  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{H}$  apukentiksi. Kentät  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  ovatkin siinä mielessä enemmän peruskenttiä, että juuri ne vaikuttavat varausten liikkeeseen Lorentzin voiman kautta. Toisaalta edellä olleessa esimerkissä todettiin magnetoituvan pallon tapauksessa  $\mathbf{B}$ :n käyttäytyvän samalla tavoin kuin  $\mathbf{D}$  eristepallon tapauksessa (huomaa myös nimitysanalogia: magneettivuon tiheys – sähkövuon tiheys).

Myös nimityskäytännöissä on eroja. Vahvasti yleistäen voi sanoa, että fyysikot kutsuvat  $\mathbf{B}$ :tä magneettikentäksi kun taas insinöörit käyttävät sitä nimitystä  $\mathbf{H}$ -kentästä. Varsinkin radioaaltojen yhteydessä käytetään usein nimenomaan  $\mathbf{E}$ - ja  $\mathbf{H}$ -kenttiä, sillä niiden avulla aaltoliikkeen keskeisimmät yhtälöt näyttävät symmetrisemmiltä sähkö- ja magneettikenttien suhteen. Niissä ongelmissa tosin magnetoituma on usein merkityksetön eli  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , jolloin  $\mathbf{B}$ - ja  $\mathbf{H}$ -kentät ovat fysikaalisesti aivan samat.

## 6.8 Molekulaarinen magneettikenttä

Tarkasteltaessa aineen magnetismia molekyyalitasolla kenttien  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{H}$  välinen ero katoaa, sillä molekyylien ajatellaan sijaitsevan tyhjiössä ja mikroskooppinen magneettikenttä  $\mathbf{B}_m$  tarkasteltavan molekyylin kohdalla voidaan korvata mikroskooppisella kentällä  $\mathbf{H}_m$ :  $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$ . Molekulaarisen magneettikentän muodostavat kaikki ulkoiset sähkövirrat ja kaikki molekulaariset dipolit lukuunottamatta molekyyliä, jonka kohdalla kenttä lasketaan. Tehdään tarkasteltavan pisteen ympärille onkalo, jonka ulkopuolinen väliaine käsitellään jatkumona samalla tavalla kuin luvussa 3.6 molekulaarista polarisoitumista määritettäessä. Molekulaarinen kenttä on siis

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{near}, \quad (6.57)$$

missä  $\mathbf{H}$  on makroskooppinen kenttä,  $\mathbf{H}_s$  onkalon reunoilla olevien pintadi-polien aiheuttama kenttä ja  $\mathbf{H}_{near}$  onkalon sisällä olevien dipolien tuottama kenttä. Samanlaisella laskulla, jolla määritettiin  $\mathbf{E}_m$  aiemmin, saadaan (vrt. tasaisesti magnetoitunut pallo)

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3} \mathbf{M}. \quad (6.58)$$

Suurelle joukolle aineita  $\mathbf{H}_{near}$  on merkityksettömän pieni, jolloin

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M}. \quad (6.59)$$

## 6.9 Para- ja diamagnetismista

Tarkastellaan hieman yksityiskohtaisemmin väliaineen vaikutusta magneettikenttään rajoittuen kvalitatiiviseen käsittelyyn. Hyviä kuvauksia voi löytää lukion oppikirjoistakin (esim. *Kurki-Suonio et al.*, Kvantti 2, jota tässä on käytetty yhtenä lähdeveksena).

Aine magnetoituu ulkoisessa magneettikentässä. Väliaine ja kenttään tuodut kappaleet synnyttävät oman kenttensä. Tilanne on kuitenkin selvästi erilainen kuin sähkökentän tapauksessa, mikä lienee tuttua kaikille hankaussähkön ja kestopagneettien kanssa leikkineille. Kaikkien aineiden polarisoituminen sähkökentässä havaitaan siitä, että varattu kappale vetää puoleensa neutraalejakin kappaleita. Sen sijaan magneeteilla on selvästi näkyvä vaikutus vain harvoihin aineisiin. Lähellä olevat kappaleet ja väliaineet eivät siksi yleensä häiritse merkittävästi magneettisia tutkimuksia.

Väliaineen vaikutusta magneettikenttään on yksinkertaista tutkia toroidikäämin avulla, koska käämin kenttä on kokonaan toroidin sisällä (vrt. eristeiden tutkimus kondensaattorin avulla). Kentän muoto ei muutu, jos toroidi täytetään väliaineella, vaan ainoastaan magneettivuon tiheys muuttuu. Väliaineen suhteellinen permeabiliteetti voidaan silloin mitata vertaamalla magneettivuon tiheyttä käämissä väliaineen kanssa ja ilman sitä.

Koska suurimmalla osalla aineista suhteellinen permeabiliteetti on lähellä ykköstä, käytetään useammin magneettista susceptiivisuutta

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (6.60)$$

ja monille aineille pätee yksinkertainen rakenneyhtälö

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}. \quad (6.61)$$

Ainetta kutsutaan diamagneettiseksi, jos  $\chi_m < 0$  ja paramagneettiseksi, jos  $\chi_m > 0$ . Näille aineille on tyypillisesti  $|\chi_m| < 10^{-3}$ , joten yleensä voidaan aineen permeabiliteetti olettaa samaksi kuin tyhjiön permeabiliteetti (taulukko 6.1). Poikkeuksena ovat ferromagneettiset aineet, jotka eivät noudata yksinkertaista magnetoitumislakia.

Aineen magneettisten ominaisuuksien mikroskooppinen selitys perustuu useisiin eri tekijöihin. Alkeishiukkaset ovat pieniä alkeismagneetteja, joiden magneettimomentti liittyy hiukkasten spiniin. Elektronin kiertoliike atomissa vastaa virtasilmukkaa ja siitä aiheutuva magneettimomentti on samaa suuruusluokkaa kuin spinin aiheuttama.

Rataliikkeestä johtuva magneettimomentti voidaan ymmärtää klassisella mallilla, jossa elektroni kiertää  $r$ -säteistä ympyrärataa kulmataajuudella  $\omega = 2\pi/T$ . Malli vastaa virtasilmukkaa, jonka pinta-ala on  $A = \pi r^2$  ja jossa

aine	suskeptiivisuus
alumiini	$2,1 \cdot 10^{-5}$
elohopea	$-2,8 \cdot 10^{-5}$
happi	$193,5 \cdot 10^{-8}$
hopea	$-2,4 \cdot 10^{-5}$
kulta	$-3,5 \cdot 10^{-5}$
kupari	$-0,98 \cdot 10^{-5}$
magnesium	$1,2 \cdot 10^{-5}$
timantti	$-2,2 \cdot 10^{-5}$
titaani	$18 \cdot 10^{-5}$
typpi	$-0,67 \cdot 10^{-8}$
vety	$-0,22 \cdot 10^{-8}$

Taulukko 6.1: Joitain dia- ( $\chi_m < 0$ ) ja paramagneettisia ( $\chi_m > 0$ ) aineita. Suskeptiivisuudet on annettu huoneenlämpötilassa. Kaasujen tapauksessa oletetaan lisäksi normaali ilmanpaine.

kulkee virta  $I = q/T = qv/2\pi r$ . Merkitään magneettimomenttia tässä selvyyden vuoksi  $\mu$ :lla eli  $\mu = IA = qvr/2$ . Elektronin liikemäärämomentti radan keskipisteen suhteen on  $L = m_e vr$ . Ottaen huomioon, että kyse on vektorisuureista, voidaan suuntasäännöt muistaen kirjoittaa  $\boldsymbol{\mu} = -e/(2m_e)\mathbf{L}$ , joka vastaa myös havaintoja. Samaa tulokseen päädytään, jos tarkastellaan pyörivän hiukkasen magneettimomentin ja liikemäärämomentin suhdetta (HT). Elektronin spinistä johtuva magneettimomentti on kuitenkin tähän verrattuna kaksinkertainen, joten klassinen kuva ei tässä anna oikeaa ennustetta.

Kvanttimekaniikassa osoitetaan, että elektronin magneettinen momentti on **Bohrin magnetonin**  $\mu_B \equiv e\hbar/2m_e = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2$  suuruusluokkaa. Täsmällisemmin

$$\mu_e = \frac{1}{2}g_e\mu_B, \quad (6.62)$$

missä  $g_e = 2.002319$  on nk. Landen g-tekijä. Ottamalla käyttöön puolestaan ydinmagnetoni  $\mu_N \equiv e\hbar/2m_p$  voidaan protonin ja neutronin magneettiset momentit lausua muodossa

$$\mu_p = \frac{1}{2}g_p\mu_p \quad (6.63)$$

ja

$$\mu_n = \frac{1}{2}g_n\mu_p, \quad (6.64)$$

missä Landen tekijät ovat  $g_p = 5,5856912$  ja  $g_n = -3.8260839$ . Elektronin magneettimomentti on siis noin 660 kertaa suurempi kuin protonin ja noin 1000 kertaa suurempi kuin neutronin magneettimomentti, joten elekt-

ronit määräävät aineen magneettiset ominaisuudet. Huomaa kuitenkin, että neutronikaan ei magneettisessa mielessä ole täysin neutraali.

Atomin magneettimomentti muodostuu elektronien spinien ja rataliikkeen magneettimomenteista, jotka yleensä pyrkivät kumoamaan toisensa pareittain. Jos atomilla tai molekyylillä on parillinen määrä elektroneja, sillä ei yleensä ole magneettimomenttia. Muuten atomien magneettimomentit ovat samaa suuruusluokkaa kuin elektroneilla.

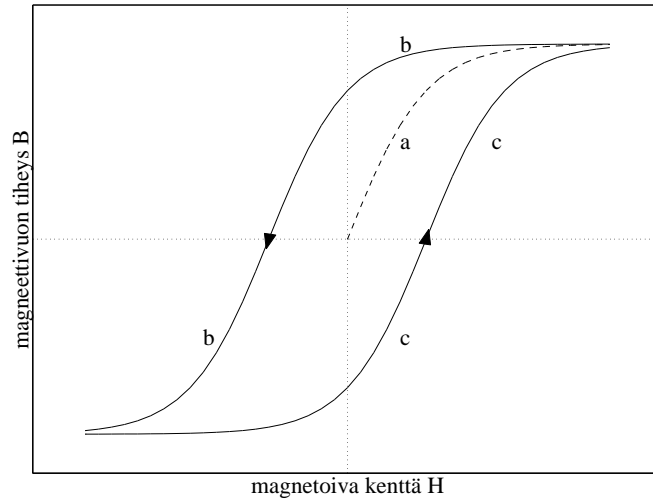
Ulkoisen magneettikenttä suuntaa atomien ja metallien vapaiden elektronien magneettimomentteja siten, että niiden kenttä vahvistaa ulkoista kenttää aineessa. Tämä selittää paramagnetismin. Lämpötilan noustessa lämpöliike häiritsee atomien järjestäytymistä, jolloin susceptiivisuus pienenee. Vastaavasti lämpötilan nousu heikentää pysyvien sähködipolien suuntautumisesta aiheutuvaa polarisoitumista.

Ulkoisen magneettikenttä vaikuttaa myös elektronien rataliikkeeseen. Vapaa elektroni pyörii magneettikentässä siten, että rataliikkeeseen liittyvä magneettimomentti suuntautuu ulkoista kenttää vastaan. Myös atomeihin sidotut elektronit tuntevat saman efektin, joten atomiin indusoituu heikko ulkoista kenttää pienentävä magneettimomentti. Tämä selittää diamagnetismin. Ilmiö tapahtuu kaikissa aineissa, mutta peittyi molekyylien magneettimomenttien alle, jos molekyyliellä on magneettimomenttia (vrt. pysyvä ja indusoituva polarisaatio sähkökentän vaikutuksesta). Diamagneettinen susceptiivisuus ei riipu merkittävästi lämpötilasta, koska atomien lämpöliike ei pysty häiritsemään nopeasti ulkoiseen kenttään sopeutuvia elektroneja.

## 6.10 Ferromagnetismi

Joissain kiinteissä aineissa atomien välinen vuorovaikutus pyrkii suuntaamaan magneettimomentit samansuuntaisiksi, jolloin muodostuu atomin kokoon nähden suuria magneettisia alkeisalueita. Ulkoinen kenttä puolestaan kasvattaa alkeisalueita ja pyrkii kääntämään kaikkien alueiden magneettimomentit samansuuntaiseksi. Tämä on ferromagnetismin perusmekanismi. Ferromagneettisia aineita ovat esimerkiksi rauta, koboltti ja nikkeli sekä näiden monet yhdisteet. Riittävän korkeassa lämpötilassa (Curie-pisteessä) ferromagneettinen aine muuttuu paramagneettiseksi. Raudan Curie-piste on  $770^{\circ}\text{C}$  ja nikkelin  $358^{\circ}\text{C}$ .

Myös ferromagneettisille aineille on tapana kirjoittaa rakenneyhtälö permeabiliteetin avulla, mutta nyt  $\mu = \mu(\mathbf{H})$  ei välttämättä ole yksikäsitteinen funktio. Hystereesi-ilmiössä magnetoivan kentän  $\mathbf{H}$  ja aineen magneettivuon tiheyden  $\mathbf{B}$  välinen yhteys on erilainen riippuen siitä, ollaanko magnetoivaa kenttää kasvattamassa vaiko pienentämässä (kuva 6.3). Susceptiivisuus  $\chi_m$  on siis kentän  $\mathbf{H}$  funktio ja yleisesti ottaen iso.



Kuva 6.3: Magneettivuon tiheys ferromagneettisessa aineessa ei ole magnetoivan kentän yksikäsitteinen funktio. Kuvaan on piirretty myös magnetoitumiskäyrä (a).

Kun kentän  $\mathbf{H}$  voimakkuutta kasvatetaan, aineen magnetoituminen voimistuu. Tätä voi jatkaa kuitenkin vain tiettyyn kyllästysarvoon  $\mathbf{M}_s$  asti. Tämän jälkeenkin  $\mathbf{B}$ -kenttä jatkaa kasvamistaan lineaarisesti termin  $\mu_0\mathbf{H}$  myötä. Olkoon ferromagneetti nyt magnetoitu tällä tavoin ja annetaan  $\mathbf{H}$ :n alkaa pienetä. Nyt  $\mathbf{B}$ -kenttä ei pienene saman käyrän mukaisesti vaan taapautuu hystereesi-ilmiö.

Ferromagnetismin vastakohta on tilanne, jossa järjestyneen vastakkaisuuntaisista spineistä muodostuvan rakenteen magneettinen momentti on nolla. Tällaista ainetta kutsutaan **antiferromagneetiksi**. Antiferromagneetit eivät ole kovin yleisiä. Esimerkkejä niistä ovat kromi (Cr), NiO, FeMn ja raskasfermionisuprajohde  $\text{URu}_2\text{Si}_2$ .

Paljon yleisempi järjestynyt rakenne on sellainen, jossa on vastakkaisia spinejä, mutta kuitenkin nollasta poikkeava kokonaismagneettimomentti. Tällaisia aineita kutsutaan **ferriiteiksi**. Niitä ovat esimerkiksi tietyt rautaoksidit ( $\text{MFe}_2\text{O}_3$ , missä M on jokin kaksivalenssinen metalli-ioni). Tunnetuin ferriitti lienee magnetiitti ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Ferriittien teknologinen merkitys on niiden korkeissa magnetoituman kyllästymisarvoissa ja huonossa sähkönjohtavuudessa. Ferriittien tyypilliset resistiivisyydet ovat luokkaa  $1\text{--}10^4 \Omega\text{m}$ , kun raudan resistiivisyys on vain  $10^{-7} \Omega\text{m}$ . Ferriittejä käytetään etenkin korkeataajuuslaitteissa, joissa pyörrevirtoihin liittyvä energiahäviö on ongelma.