

## Luku 8

# Magneettinen energia

Luvussa 4 nähtiin, että staattiseen sähkökenttään liittyy tietty energia. Näin on myös magneettikentän laita, sillä Faradayn lain mukaan magneettikentän muuttaminen aiheuttaa muutosta vastustavan voiman ja siten magneettikentän luominen edellyttää työtä.

### 8.1 Kytettyjen virtapiirien energia

Tarkastellaan yksinkertaista virtasilmutta, jonka vastus on  $R$ . Oletetaan, että aluksi virta  $I = 0$  ja liitetään virtapiiriin hetkellä  $t = 0$  jännitelähde  $V$ . Tällöin

$$V + \mathcal{E} = IR, \quad (8.1)$$

missä  $\mathcal{E}$  on virtasilmutkaan indusoituva smv. Jännite tekee työtä siirtämällä varauksia silmutkassa. Differentiaalisen varauksen  $dq = I dt$  osalta työ on

$$V dq = VI dt = -\mathcal{E}I dt + I^2 R dt = I d\Phi + I^2 R dt. \quad (8.2)$$

Termi  $I^2 R dt$  antaa resistiivisen energian hävikin (Joulen lämmitys). Termi  $I d\Phi$  on indusoitunutta sähkömotorista voimaa vastaan tehty työ, joka tarvitaan magneettikentän muuttamiseen:

$$dW_b = I d\Phi, \quad (8.3)$$

missä alaindeksi  $b$  viittaa ulkoisen jännitelähteen (battery) tekemään työhön.

Tarkastellaan sitten systeemiä, joka koostuu  $n$  kappaleesta virtapiirejä:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i. \quad (8.4)$$

Jos kaikki vuonmuutokset ovat peräisin systeemin silmukoista, niin

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j. \quad (8.5)$$

Oletetaan lisäksi, että silmukat ovat jäykkiä ja paikallaan, jolloin energianmuutoksiin ei liity mekaanista työtä. Tällöin  $dW_b$  on yhtä suuri kuin magneettisen energian muutos  $dU$ . (Virrat oletetaan myös riittävän hitaasti muuttuviksi, jolloin ei tarvitse ottaa huomioon säteilyhäviöitä.)

Rajoitutaan yksinkertaiseen väliaineeseen, jossa magneettivuon ja virran välinen suhde on lineaarinen. Lasketaan systeemin energia lähtien tilasta, jossa virtoja ei ole. Lineaarisuudesta johtuen lopullinen energia ei riipu tavasta, jolla tila on saavutettu. Näin ollen virtoja voidaan kasvattaa nolasta lopputilaan samassa tahdissa eli joka hetki  $I'_i = \alpha I_i$ , missä  $\alpha$  kasvaa  $0 \rightarrow 1$ . Tällöin  $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$  ja systeemin **magneettinen energia** on

$$U = \int dW_b = \int_0^1 \sum_{i=1}^n I'_i \Phi_i d\alpha = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i. \quad (8.6)$$

Tämä voidaan myös ilmaista summana silmukoiden yli:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j, \quad (8.7)$$

josta saadaan suoraan yhdelle silmukalle ( $M_{11} = L_1 = L =$  silmukan itseinduktanssi)

$$U = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}. \quad (8.8)$$

Tämän voi rinnastaa kondensaattorin energiaan  $Q^2/(2C)$ , joka ilmaisee kondensaattorin sähkökenttään varastoituneen energian. Kahdelle silmukalle saadaan

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2, \quad (8.9)$$

missä otettiin huomioon symmetria  $M_{12} = M_{21} = M$ . Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että  $L_1 L_2 \geq M^2$ .

## 8.2 Magneettikentän energiitiheys

Oletetaan väliaine edelleen lineaariseksi ja virtapiirit yksinkertaisiksi silmuiksi. Tällöin magneettivuoksi saadaan Stokesin lauseen avulla

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i, \quad (8.10)$$

joten magneettinen energia on

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i. \quad (8.11)$$

Siirrytään sitten tilanteeseen, missä sähkövirta on tilavuusvirtaa  $\mathbf{J}$  ja  $C_i$  on suljettu lenkki johtavassa väliaineessa. Tilannetta voi ajatella suurena joukkona lähellä toisiaan olevia silmukoita, jolloin  $I_i d\mathbf{l}_i \rightarrow \mathbf{J} dV$  ja  $\sum_i \oint_{C_i} \rightarrow \int_V$  eli

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (8.12)$$

Sähköstatiikassa energia lausuttiin vastaavasti varaustiheyden ja potentiaalintulon integraalina (luku 4.2).

Koska  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  ja  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ , niin divergenssiteoreemaa käyttämällä saadaan

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (8.13)$$

Järkevä oletus on, että virtasilmukat eivät ulotu äärettömyyteen, joten pinta  $S$  voidaan siirtää kauas niiden ulkopuolelle. Staattinen kenttä  $\mathbf{H}$  heikkenee vähintään kuten  $1/r^3$  ja vektoripotentiaali  $\mathbf{A}$  vähintään kuten  $1/r^2$ , mutta pinta kasvaa vain kuten  $r^2$ . Pintaintegraali häviää kuten  $1/r^3$  tai nopeammin  $r$ :n kasvaessa rajatta (siis vielä paljon nopeammin kuin pintatermi sähkökentän tapauksessa luvussa 4.2). Tilavuusintegraali voidaan siis ottaa koko avaruuden yli, jolloin

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV. \quad (8.14)$$

Samoin kuin sähköstaattisen energian tapauksessa voidaan määritellä **magneettinen energiatiheys**

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (8.15)$$

Tulos pätee siis lineaariselle magneettiselle väliaineelle. Mikäli väliaine on lisäksi isotrooppista, saadaan

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}. \quad (8.16)$$

**Huom.** Tässä tarkasteltiin stationaarista tilannetta. Kentän energia yleisessä ajasta riippuvassa tilanteessa käsitellään luvussa 9. Säteilykenttien tapauksessa pintaintegraalit eivät välttämättä häviä.

**Esimerkki. Koaksiaalikaapelin energiatiheys**

Tarkastellaan koaksiaalikaapelia, jonka keskellä on  $a$ -säteinen johdin, sen ulkopuolella sylinterisymmetrisesti eristekerros välillä  $a \leq r \leq b$ , jonka ulkopuolella on jälleen johtava sylinterisymmetrinen kerros  $b \leq r \leq c$ . Oletetaan, että kaikkialla  $\mu = \mu_0$ . Kulkekoon sisäjohtimessa tasaisesti jakautunut virta  $I$  ja ulkojohtimessa virta  $-I$ . Suoran johtimen aiheuttama magneettikenttä on Ampèren kiertosäännön perusteella (HT)

$$\mathbf{B} = B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta. \quad (8.17)$$

Tarkastellaan sisempää johdinta ( $0 \leq r \leq a$ ). Tällöin  $I(r)/I = (\pi r^2)/(\pi a^2)$ , joten

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad (8.18)$$

ja magneettinen energiatiheys on

$$u_a = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}. \quad (8.19)$$

Sisemmän johteen yli integroitu energia  $l$ :n pituisella matkalla on

$$U_a = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} r \, dr \, d\theta \, dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi}. \quad (8.20)$$

Johtimien välissä kenttä määräytyy sisemmän johtimen kokonaisvirrasta:

$$\begin{aligned} B_{\theta b} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ u_b &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \\ U_b &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

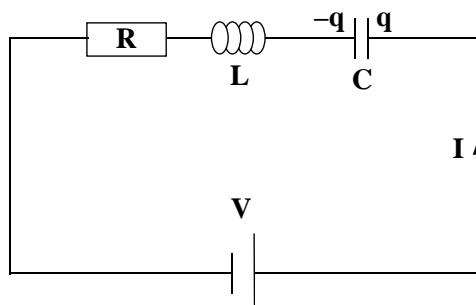
missä siis kokonaisenergia tarkoittaa johtimien välisessä alueessa olevaa kokonaisenergiaa. Uloimmassa johtimessa vastaavat lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} B_{\theta c} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left( \frac{c^2}{r} - r \right) \\ u_c &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2} \left( \frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2 \right) \\ U_c &= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2} \left[ c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Koaksiaalikaapelin ulkopuolella kenttä on nolla, joten energiakin on siellä nolla.

### 8.3 RLC-piiri

Kerrataan RLC-piirien perusasioita induktion ja sähkömagneettisen energian havainnollistamiseksi. Asia on toki tuttua peruskurssilta. Tarkastellaan yksinkertaista virtapiiriä, jossa on sarjaan kytkettynä vastus (resistanssi  $R$ ), käämi (induktanssi  $L$ ) ja kondensaattori (kapasitanssi  $C$ ) (kuva 8.1). Lisäksi piirissä on jännitelähde  $V(t)$ .



Kuva 8.1: Yksinkertainen RLC-piiri. Kondensaattorin sen levyn, johon positiivinen virta tuo varausta, varaus on  $+q$ , jolloin  $I = dq/dt$ .

Valitaan kondensaattorin varauksen merkki ja virran positiivinen suunta kuvan mukaisesti, jolloin Kirchhoffin säännöstä saadaan

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI + q/C \quad (8.23)$$

eli piirin smv on yhtä suuri kuin jännitehäviöt. Derivoimalla ajan suhteen ja käyttämällä yhteyttä  $dq/dt = I$  saadaan virralle toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L} \frac{dV}{dt}. \quad (8.24)$$

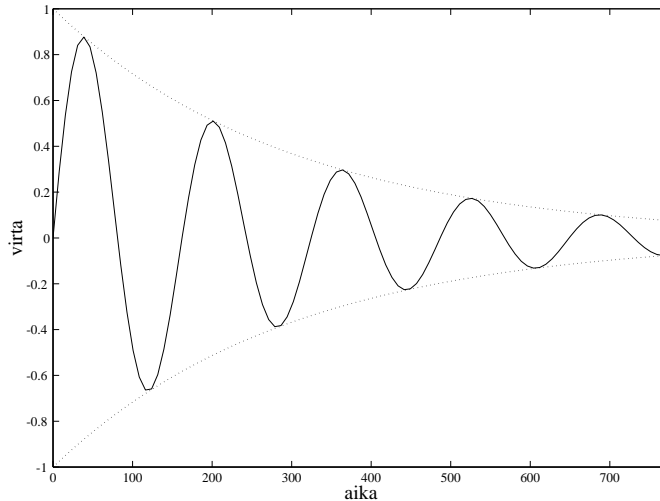
Ideaalisessa tapauksessa piirin vastus on häviävän pieni (LC-piiri). Oletetaan, ettei piirissä myöskään ole jännitelähdettä. Tällöin yhtälö (8.24) redusoituu harmonisen värähtelijän liikeyhtälöksi kulmataajuudella  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Kyseessä on siis yksinkertainen värähtelypiiri. Kondensaattorin varaus alkaa aluksi purkautua käämin kautta. Itseinduktion takia tämä ei tapahdu silmänräpäyksessä, sillä induktiovirta kulkee myös sen hetken jälkeen, jolloin kondensaattorin varaus on nolla. Virta kulkee samaan suuntaan kunnes levyjen varaukset ovat alkutilaan nähden vastakkaismerkkiset. Sen jälkeen kondensaattorin varaus alkaa taas purkautua jne. Jos kondensaattorin varaus on aluksi  $Q$ , niin ajan funktiona se muuttuu sinimuotoisesti:  $q(t) = Q \cos \omega t$  ja  $I(t) = -\omega Q \sin \omega t$ .

Systemin sähkömagneettinen energia on  $U(t) = LI^2/2 + q^2/(2C) = Q^2/(2C)$  eli koko ajan sama kuin kondensaattorin sähköstaattinen energia aluksi. Kokonaisenergia siis säilyy, se vain jakautuu sähkö- ja magneettikentän energiaksi (säteilyhäviöitä ei tässä oteta huomioon).

Todellisessa piirissä on aina jonkin verran resistanssia. Laskenta on suoraviivaista differentiaaliyhtälöiden käsittelyä. Tässä voi olla hyödyllistä kerata vaikka mekaniikan kurssilla käsitellyt vapaat, pakotetut ja vaimennetut oskillaattorit. Jälleen samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut. Tähän yhteyteen sopii esimerkiksi (HT) tilanne, jossa piiriin kytketään tasajännite  $V$  hetkellä  $t = 0$ , ja kondensaattori on alkuhetkellä varaamaton. Piirin virta on silloin

$$I(t) = (V_0/\omega L)e^{-Rt/(2L)} \sin \omega t, \quad (8.25)$$

missä  $\omega = \sqrt{1/LC - (R/(2L))^2}$ . Kulmataajuus  $\omega$  voi tässä tapauksessa olla imaginaarinen, mutta joka tapauksessa piirin virta vaimenee eksponentiaalisesti. Kuvassa 8.2 on esitetty tilanne, jossa  $\omega$  on reaalinen. Tässä vaiheessa kannattaa myös miettiä, mitä virralle tapahtuu kondensaattorissa.



Kuva 8.2: Vaimeneva värähtely RCL-piirissä. Katkoviivoilla on piirretty vaimennusfunktion  $\pm \exp(-Rt/2L)$  kuvaaja.

## 8.4 Epälineaariset energiahäviöt

Palataan nyt ferromagnetismiin energianäkökulmasta. Todellinen makroskooppinen ferromagneetti käyttäytyy huomattavasti molekyyalitasoa rakeisempana. Aine koostuu ferromagneettisista alueista, jotka ovat magnetoituneet eri suuntiin ja joiden välillä on suuruusluokkaa 100 atomin paksuisia

seiniä. Kun nämä alueet järjestyvät uudelleen ulkoisen kentän muuttuessa, syntyy energiaa kuluttavaa kitkaa. Tarkasteltaessa aiemmin sähkö- ja magneettikenttien energiaa väliaineet oletettiin lineaarisiksi. Ferromagneettinen aine on kuitenkin epälineaarista ja eteen tulee kysymys, mitä tapahtuu, kun hystereesisilmukkaa kierretään ympäri. Tarkastellaan virtapiiriä, jonka muodostaa ferromagneettisen aineen ympärille kierretty kela ( $N$  kierrosta), johon ulkoinen energialähde syöttää virtaa.

Jos magneettivuon kelan läpi muuttuu tekijällä  $\delta\Phi$ , niin ulkoinen energianlähde tekee sähkömotorista voimaa vastaan työn

$$\delta W_b = NI\delta\Phi. \quad (8.26)$$

Ajatellaan ferromagneetti patkäksi magneettista vuoputkea eli aluetta, jossa magneettikenttä poikkeaa nolasta. Tällöin kelan kohdalla Ampèren kiertosäännön mukaan  $NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ . Merkitsemällä vuoputken pinta-alaa  $d\mathbf{l}$ :n kohdalla  $A$ :lla saadaan

$$\delta W_b = \oint \delta\Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_V \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV. \quad (8.27)$$

Mikäli ferromagneetti käyttäytyy palautuvasti, saadaan systeemin magneettinen energia integroimalla magneettivuon tiheys arvosta  $\mathbf{B} = 0$  lopulliseen arvoonsa. Lineariselle aineelle tulos on tuttu

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (8.28)$$

Lauseke (8.27) on kuitenkin yleisempi ja soveltuu myös hystereesitilanteeseen. Magneettikentän muutosta vastaava työ yksikkötilavuudessa on

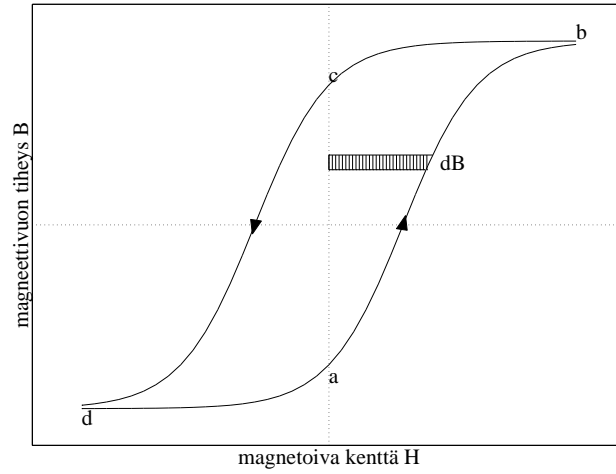
$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \quad (8.29)$$

Tarkastellaan nyt hystereesisykliä, joka alkaa  $H$ :n arvosta 0, kasvaa arvoon  $H_{max}$ , pienenee arvoon  $-H_{max}$  ja palaa sen jälkeen takaisin noltaan (kuva 8.3). Työ pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H dB \quad (8.30)$$

on hystereesikäyrän  $ab$  ja  $B$ -akselin välinen pinta-ala ja se on positiivinen, koska sekä  $H$  että  $dB$  ovat positiivisia. Vastaavasti  $(w_b)_{bc}$  on  $B$ -akselin ja käyrän  $bc$  välinen pinta-ala, mutta se pitää laskea negatiivisena, koska  $dB < 0$ . Samoin lasketaan työ negatiivisilla  $H$  ja lopputuloksena yhden hystereesisyklin myötä tehty työ on silmukan sisään  $BH$ -tasossa jäävä pinta-ala

$$w_b = \oint H dB. \quad (8.31)$$



Kuva 8.3: Yksikkötilavuutta kohti tehty työ ferromagneettisessa syklissä.

Täyden kierroksen jälkeen ferromagneetin tila on sama kuin alussa, joten sen magneettinen energia on yhtä suuri kuin aluksi. Ulkoinen energianlähde on kuitenkin tehnyt työtä, joka on kulunut magneettisten alueiden uudelleen järjestäytymiseen. Kyseessä on palautumaton sähkömagneettisen energian häviö lämmöksi. Tämän vuoksi esimerkiksi muuntaja lämpenee. Yleensäkin hystereesihäviöt on tärkeää huomioida rakennettaessa vaihtovirtalaitteita. Ylläoleva lasku tehtiin yhdelle syklille, joten mitä korkeammalla taajuudella laite toimii, sitä nopeammin hystereesi kuluttaa energiaa.

Käytännössä ferromagneettinen sykli on usein mielekkäämpää käsitellä magneettikentän voimakkuuden ja magnetoituman avulla. Tämä onnistuu seuraavasti ( $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ):

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}. \quad (8.32)$$

Termi  $\mu_0 H dH$  on tyhjiössä tehty työ, joka on nolla integroituna kokonaisen syklin yli ja termi  $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$  on materiaalille ominainen työ. Koko syklin yli työ on siis

$$w_b = \mu_0 \oint H dM = -\mu_0 \oint M dH, \quad (8.33)$$

missä on käytetty hyväksi lauseketta  $d(MH) = H dM + M dH$ . Kokonaisdiferentiaalinen  $d(MH)$  integraali on nolla riippumatta aineen ominaisuuksista.



## 8.5 Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin

Annetaan virtapiirijärjestelmän yhden silmukan siirtyä matkan  $d\mathbf{r}$ . Oletetaan, että silmukoissa kulkevat virrat säilyvät ennallaan. Tällöin magneettisen voiman siirroksessa tekemä työ on  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , joka koostuu kahdesta osasta:

$$dW = dW_b - dU, \quad (8.34)$$

missä  $dU$  on magneettisen energian muutos ja  $dW_b$  on ulkoisten lähteiden tekemä työ, jotta virrat pysyvät vakioina.

Eliminoidaan  $dW_b$  olettamalla silmukat jälleen jäykiksi ja väliaine lineaariseksi. Magneettisen energian muutos on

$$dU = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i. \quad (8.35)$$

Toisaalta

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (8.36)$$

joten  $dW_b = 2 dU$  ja  $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  eli voima saadaan energian gradienttina olettaen virrat vakioiksi

$$\mathbf{F} = \nabla U \Big|_I. \quad (8.37)$$

Usein tilanne on sellainen, että virtapiirin liike rajoittuu kiertymiseen jonkin akselin ympäri. Tällöin  $dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$ , missä  $\boldsymbol{\tau}$  on magneettinen vääntömomentti ja  $d\boldsymbol{\theta}$  on kiertymän kulmaelementti. Vääntömomentti akselin  $i$  suhteen on siten

$$\tau_i = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right)_I. \quad (8.38)$$

Tarkasteltu tilanne on siis samantapainen kuin luvussa 4.4, jossa johdesysteemi pidettiin vakiopotentialissa ulkoisen jännitelähteen avulla.

Joissain tapauksissa virtapiirien läpi kulkeva magneettivuo voidaan olettaa vakioksi. Tällaisiin tilanteisiin joudutaan tarkasteltaessa hyvin johtavia väliaineita kuten suprajohteita tai täysin ionisoitunutta harvaa plasmaa. Tällöin mikään ulkoinen lähde ei tee työtä eli  $dW_b = 0$  ja

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU. \quad (8.39)$$

Nyt voiman ja vääntömomentin komponentit saadaan derivoimalla  $-U$ :ta pitäen  $\Phi$  vakiona, mikä vastaa sähköstatiikassa vapaiden johteiden systeemiä.

Sovellusesimerkki on avaruusaluksen asennonsäätö. Maapallon magneettikentän vaikutuksen alaisena olevaan satelliittiin rakennetaan kelajärjestelmä. Kun satelliittia halutaan kääntää, ajetaan keloihin sellaiset virrat, että

satelliitti kääntyy haluttuun kulmaan magneettikenttään nähden. Menetelmän etuna on se, että operaatio voidaan tehdä aurinkoenergian avulla; haittana taas kentän pienuudesta johtuva vääntömomentin heikkous ja siten operaation hitaus.

### Esimerkki. Kahden virtasilmukan välinen voima

Palataan magnetostatiikan alkuun, missä kerrottiin Ampèren empiirisestä lausekkeesta voimalle kahden virtasilmukan välillä (5.27). Lasketaan sama tulos tämän luvun keinoin. Nyt on oltava tarkkana, sillä energian lauseketta ( $\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$ ) on derivoitava silmukoiden välisen keskinäisen etäisyyden suhteen. Selvintä on määrittellä  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{x}_1$  ja  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{x}_2$ , jolloin  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$  on silmukoiden välinen keskinäinen etäisyys, josta systeemin magneettinen energia riippuu (silmukoiden oletetaan säilyttävän muotonsa ja suuntautumisensa). Koska vain keskinäisinduktanssi riippuu  $\mathbf{R}$ :stä, niin silmukoiden välinen magneettinen voima on

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}) &= I_1I_2\nabla_{\mathbf{R}}M(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\nabla_{\mathbf{R}}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} \\ &= \frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\nabla_{\mathbf{R}}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{R}+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

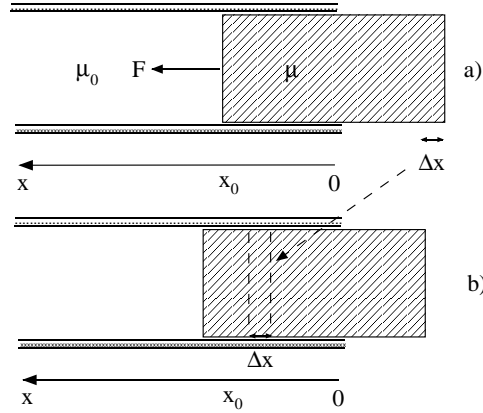
Tässä siis  $\nabla_{\mathbf{R}}$  viittaa derivointiin  $\mathbf{R}$ :n suhteen. Derivointi voidaan viedä integrointien ohitse:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2\frac{\mathbf{R}+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1}{|\mathbf{R}+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|^3} \\ &= -\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Ensi silmäyksellä näyttää kuin olisi saatu eri tulos kuin aiemmin. Näin ei ole, minkä osoittaminen jää harjoitustehtäväksi. Voiman lausekkeesta nähdään välittömästi, että voiman ja vastavoiman laki pätee suljetuille virtasilmuksille.

### Esimerkki. Tanko solenoidin sisällä

Luvussa 4 arvioitiin levykondensaattorin sisällä olevaan eristepalkkiin kohdistuva voima. Tutkitaan nyt solenoidin sisällä olevaa tankoa, jonka poikkipinta-ala on  $A$  ja permeabiliteetti  $\mu$ . Olkoon solenoidin pituus  $l$  ja olkoon sitä kierretty  $N$  kierrosta johteella, jossa kulkee vakiovirta  $I$ . Vedetään tankoa ulos solenoidista kunnes siitä on enää puolet sisällä ja lasketaan tankoon vaikuttava voima (kuva 8.4).



Kuva 8.4: Solenoidiin työnnettyyn tankoon vaikuttava voima.

Ongelma olisi aika vaikea, jos kysyttäisiin alkuperäisen tai lopullisen tilanteen todellista magneettista energiaa, koska silloin olisi huomioitava solenoidin pään reunaefektit. Koska voima on energian gradientti, sen määrittämiseksi riittää tarkastella kahden eri tilan eroa. Tarkastellaan oikean kuvan mukaista lyhyttä siirtoa. Kuvien a) ja b) välinen ero on, että pituusalkio  $\Delta x$  on siirretty kentän ulkopuolisesta osasta solenoidin sisään, kun taas hankalan reunan kohdalla kaikki näyttää samalta molemmissa tilanteissa. Koska  $\mathbf{H}$ -kenttä on lähes pitkittäinen alueessa  $\Delta x$  ja koska  $\mathbf{H}$ -kentän tangentialikomponentti on jatkuva sauvan sylinterinmuotoisen reunan yli, voidaan magneettinen energia laskea lausekkeesta

$$U = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dV, \quad (8.42)$$

missä  $\mathbf{H}$  on vakio sauvan sisä- ja ulkopuolella, koska  $I$  on vakio. Siirroksen jälkeen energia on

$$\begin{aligned} U(x_0 + \Delta x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{2} \int_{A\Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dV \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A \Delta x. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Voimalle saadaan arvio

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{2} \chi_m \mu_0 H^2 A. \quad (8.44)$$

Voima osoittaa  $x$ :n positiiviseen suuntaan eli vetää sauvaa solenoidiin, jos  $\chi_m > 0$ . Tässä tilanteessa systeemin magneettinen energia kasvaa ja tarpeellinen energia saadaan virtalähteestä samaan tapaan kuin vakiojännitteessä pidettävän kondensaattorin tapauksessa. Solenoidi ja tangon ulkopintaa voi ajatella kahtena samansuuntaisena virtalevynä, jotka vetävät toisiaan puoleensa.

## 8.6 Maxwellin jännitystensori magnetostatiikassa

Tarkastellaan aluetta  $V$ , jossa on stationaarinen virrantiheys  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ . Oletetaan lisäksi, että alueessa on vain tavallista ainetta, jolle  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ . Tilavuusalkioon  $dV$  kohdistuva magneettinen voima on  $d\mathbf{F} = (\rho dV)\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$ , joten voimatiheys on  $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \times \mathbf{H}$ . Ampèren lain mukaan  $\mathbf{f} = \mu_0(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}$  ja komponentteittain (HT)

$$f_i = \mu_0 \sum_{j=1}^3 H_j \partial_j H_i - \frac{1}{2} \mu_0 \partial_i \mathbf{H}^2. \quad (8.45)$$

Otetaan mallia sähköstatiikasta ja määritellään magnetostaattinen Maxwellin jännitystensori, jonka komponentit ovat

$$T_{ij}^{(m)} = B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}, \quad (8.46)$$

jolloin

$$f_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j T_{ij}^{(m)}. \quad (8.47)$$

Edelleen sähköstatiikan analogian perusteella saadaan kokonaisvoima

$$\mathbf{F} = \int_{\partial V} ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})) dS = \mathbf{F}^S. \quad (8.48)$$

Pintavoima  $\mathbf{F}^S$  voidaan osoittaa ekvivalentiksi voiman  $\mathbf{F}$  kanssa samalla tavalla kuin sähköstatiikassa (HT). Seuraavassa luvussa opitaan, että staattisille kentille määritelty jännitystensori sopii myös ajasta riippuvaan tilanteeseen samanmuotoisena.