

## Luku 15

# Varatun hiukkasen liike SM-kentässä

Tarkastellaan lopuksi varatun hiukkasen liikettä sähkömagneettisessa kentässä. Tehtävänä on siis ratkaista relativistinen liikeyhtälö

$$d\mathbf{p}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (15.1)$$

missä  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$ . Lisäksi muistetaan, että kenttä tekee työtä teholla  $dW/dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ . Liikeyhtälö on hankala integroitava yleisille ajasta ja paikasta riippuville kentille, joten se on yleensä ratkaistava numeerisesti. Jos aika- ja paikkariippuvuuksien voi olettaa olevan riittävän hitaita ja laakeita, on mahdollista käyttää häiriöteoriaa lähtien vakiokentistä ja tehdä niihin pieniä korjauksia.

### 15.1 Säteilöhäviöiden vaikutus

Liikeyhtälön käsittelyyn sisältyy hyvin vaikea periaatteellinen ongelma. Jos hiukkasella on kiihtyvyyttä, se säteilee ja säteily kuljettaa mukanaan energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Varatun hiukkasen säteilyä kuitenkin tarkastellaan tyypillisesti kaksivaiheisesti. Ensin ratkaistaan liikeyhtälöstä hiukkasen rata annetussa ulkoisessa kentässä. Sen jälkeen lasketaan säteilyhäviöt olettaen, että hiukkanen pysyy ratkaistulla radallaan. Käytännössä monessa tilanteessa säteilyn vaikutus voidaan jättää huomiotta.

Säteilyn merkitystä voidaan arvioida tutkimalla tilannetta, jossa hiukkasen (varaus  $q$ ) kiihtyvyys on suuruusluokkaa  $a$  ajan  $T$  verran. Jos nopeus on paljon valon nopeutta pienempi, niin Larmorin kaavan perusteella hiukkasen säteilemä energia on

$$W_{rad} \sim \frac{q^2 a^2 T}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (15.2)$$

Jos kyseessä on levosta lähtenyt hiukkanen, niin silloin sen liike-energia on luokkaa  $W_{kin} \sim m(aT)^2$ . Siten

$$\frac{W_{rad}}{W_{kin}} \sim \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3 T} = \frac{\tau}{T}, \quad (15.3)$$

missä  $\tau = q^2/(6\pi\epsilon_0 mc^3)$  on säteilylle luonteenomainen aika. Varauksellisista hiukkasista se on suurin elektroneille ( $\sim 10^{-23}$  s), missä ajassa valo etenee matkan  $c\tau \sim 10^{-15}$  m. Jos taas kyseessä on jaksollinen liike amplitudilla  $d$  ja kulmataajuudella  $\omega$ , niin  $W_{kin} \sim m\omega^2 d^2$ ,  $a \sim \omega^2 d$  ja  $T \sim 1/\omega$ . Silloin

$$W_{rad}/W_{kin} \sim \omega\tau. \quad (15.4)$$

Säteilyhäviöt ovat lyhytkestoisessa liikkeessä merkittäviä vain, jos hiukkasen liike muuttuu ulkoisten voimien takia merkittävästi aikaskaalassa  $\tau$  tai pituuskaalassa  $c\tau$ . Pitkäkestoisessa liikkeessä kumuloituvat säteilyhäviöt on aina otettava huomioon, esim. astrofysiikassa elektronien jäähtyminen synkrotronisäteilyn seurauksena.

## 15.2 Homogeeninen ja staattinen B

Oletetaan aluksi, että  $\mathbf{E} = 0$  ja  $\mathbf{B} = \text{vakio}$ . Rajoitutaan lisäksi epärelativistiseen tapaukseen  $v \ll c$ , jolloin

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (15.5)$$

Ottamalla tästä pistetulo  $\mathbf{v}$ :n kanssa saadaan

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = 0. \quad (15.6)$$

Hiukkasen liike-energia ja nopeuden itseisarvo ovat siis vakioita. Valitaan koordinaatisto siten, että  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Tällöin

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x \\ m\dot{v}_z &= 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Magneettikentän suuntainen nopeus on siis vakio ( $v_{\parallel}$ ).

Ratkaistaan liikeyhtälö alkuehdoilla  $\mathbf{r}(0) = 0$  ja  $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, v_{\parallel})$ . Määritellään **pyörähdystaajuus** (sitä kutsutaan myös **syklotronitaajuudeksi** tai **Larmorin taajuudeksi**):

$$\omega_c = qB/m. \quad (15.8)$$

Koska  $\ddot{y} = -\omega_c \dot{x}$ , niin integroimalla ja alkuehdot huomioimalla saadaan  $v_y = -\omega_c x$ . Tällöin yhtälöstä  $\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$  seuraa

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0. \quad (15.9)$$

Yhtälö kuvaa harmonista värähtelyä, jonka kulmataajuus on  $\omega_c$ . Ratkaissamalla hiukkasen rata nähdään (HT), että ratakäyrän projektio  $xy$ -tasossa on ympyrä, jonka säde on

$$r_L = \frac{v_\perp}{|\omega_c|} = \frac{mv_\perp}{|q|B}. \quad (15.10)$$

Tässä  $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  on hiukkasen nopeus kohtisuoraan magneettikenttää vastaan. Sädettä  $r_L$  kutsutaan **pyörähdysäteeksi** (Larmorin säteeksi) ja pyörimisliikkeen keskipistettä **johtokeskukseksi** (guiding centre). Yhteen kierrokseen kuluva aika, **pyörähdysperiodi**, on

$$\tau_L = 2\pi/|\omega_c|. \quad (15.11)$$

Näin hiukkasen liike on jaettu kahteen komponenttiin: vakionopeus  $v_\parallel$  kentän suuntaan ja pyörimisliike  $v_\perp$  kenttää vastaan kohtisuoraan. Näiden summa on ruuviviiva. Ruuviviivan **nousukulma** (pitch angle) määritellään kaavalla

$$\tan \alpha = v_\perp/v_\parallel. \quad (15.12)$$

Koordinaatistoa, jossa  $v_\parallel = 0$ , kutsutaan **johtokeskuskoordinaatistiksi**.

Johtokeskuskoordinaatistossa varaus aiheuttaa sähkövirran  $I = q/\tau_L$ , johon liittyvä magneettinen momentti on

$$\mu = I\pi r_L^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 r_L^2 B}{m} = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B}, \quad (15.13)$$

missä  $W_\perp$ :llä merkitään poikittaisen nopeuden mukaan laskettua liike-energiaa. Vektorimuodossa magneettinen momentti on

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} q \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_\perp. \quad (15.14)$$

Koska pyörähdysädevektorissa on mukana varauksen merkki,  $\boldsymbol{\mu}$ :n suunta on varauksesta riippumatta vastakkainen taustan magneettikentälle eli vapaat varatut hiukkaset muodostavat tässä mielessä diamagneettisen systeemin.

Myös relativistinen liikeyhtälö on tässä tapauksessa helppo ratkaista. Koska liike-energia on vakio ( $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}/dt = 0$ ), niin  $\gamma$  on vakio. Liikeyhtälön komponentit ovat

$$\begin{aligned} \gamma m \dot{v}_x &= qBv_y \\ \gamma m \dot{v}_y &= -qBv_x \\ \gamma m \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \quad (15.15)$$

eli vakiotekijää  $\gamma$  lukuunottamatta samat kuin edellä. Pyörähdystaajuus on nyt  $\omega_c = qB/(\gamma m)$ , minkä luvun 14 sisäistänyt lukija olisi arvannutkin.

### 15.3 Homogeeniset ja staattiset $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{E}$

Oletetaan nyt, että vakiomagneettikentän lisäksi hiukkasiin vaikuttaa myös vakiosähkökenttä  $\mathbf{E}$ . Magneettikentän suuntaiseksi epärelativistiseksi likeyhtälöksi tulee

$$m\dot{v}_{\parallel} = qE_{\parallel}. \quad (15.16)$$

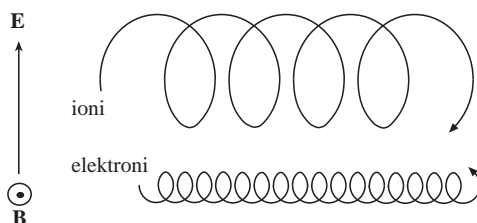
Tämä kuvaa kiihdytystä magneettikentän suuntaan. Tarkastellaan sitten poikittaista sähkökenttää ja valitaan se  $x$ -akselin suuntaiseksi, jolloin

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x. \end{aligned} \quad (15.17)$$

Ratkaisun yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. Hiukkanen kieppuu jälleen johtokeskuksen ympäri, mutta johtokeskus kulkeutuu  $y$ -akselin suuntaan nopeudella  $E_x/B$ . Vektorimuodossa kulkeutumisenopeus on

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (15.18)$$

Tätä kutsutaan **sähköiseksi kulkeutumisiksi** ( $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -kulkeutumisiksi, kuva 15.1). Kulkeutumisenopeus ei riipu hiukkasen varauksesta eikä massasta!



Kuva 15.1: Sähköinen kulkeutuminen.

Edelläolevassa laskussa tehtiin itseasiassa Lorentzin muunnos epärelativistisella rajalla sähkökentälle hiukkasen mukana liikkuvaan koordinaatistoon

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (15.19)$$

Koska tässä koordinaatistossa  $\mathbf{E}' = 0$ ,  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ja ratkaisemalla tästä  $\mathbf{v}$  saadaan (15.18). Tämä koordinaatiston muunnos voidaan tehdä kaikille riittävän heikoille ei-magneettisille voimille  $\mathbf{F}_{\perp}$ . Vektorimuodossa

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{F}_{\perp}}{m}. \quad (15.20)$$

Olettamalla, että  $\mathbf{F}_{\perp}$  aiheuttaa kulkeutumisen  $\mathbf{v}_D$ , tehdään muunnos  $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}_D$ :

$$\frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{B}) + \frac{q}{m}(\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{F}_{\perp}}{m}. \quad (15.21)$$

Johtokeskuksen koordinaatistossa kahden viimeisen termin on kumottava toisensa, joten

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (15.22)$$

Tämä temppu edellyttää, että  $F/qB \ll c$ . Jos  $F > qcB$ , ei johtokeskus-approksimaatiota yksinkertaisesti voi tehdä.

Sijoittamalla ylläolevaan  $\mathbf{F}_\perp = q\mathbf{E}$  saadaan tietenkin  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -kulkeutuminen. Gravitaatiokenttä puolestaan johtaa kulkeutumiseen

$$\mathbf{v}_g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{qB^2} \propto \frac{m}{q}. \quad (15.23)$$

Gravitaatiokenttä separoi siis hiukkaset niiden  $m/q$ :n mukaan, muttei gravitaation suuntaan vaan kohtisuoraan sitä ja magneettikenttää vastaan!

## 15.4 Magneettiset kulkeutumisasiöit<sup>1</sup>

Tarkastellaan sitten heikosti epähomogeenista magneettikenttää olettaen, että magneettikentän paikalliset muutokset ovat pieniä yhden pyörähdyksen matkalla:

$$|\nabla B|_\perp \ll B/r_L \quad ; \quad |\nabla B|_\parallel \ll (\omega_c/v_\parallel)B.$$

Näiden ehtojen voimassaolo riippuu kentän geometrian lisäksi myös hiukkasen energiasta ja massasta, koska ne määräävät pyörähdyssäteen. Sama gradientti voi olla laakea elektronille mutta jyrkkä protonille.

Olettamalla kenttä heikosti epähomogeeniseksi se voidaan kehittää Taylorin sarjaksi johtokeskuksen ympäristössä. Olkoon  $\mathbf{B}_0$  kenttä johtokeskuksen kohdalla ja  $\mathbf{r}$  hiukkasen etäisyys johtokeskuksesta. Tällöin

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq \mathbf{B}_0 + \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{B})_0 + \dots \quad (15.24)$$

$\nabla \mathbf{B}$  on toisen kertaluvun tensori, jonka komponentit ovat  $\partial_i B_j$ . Suoraviivainen mutta hieman työläs lasku antaa tuloksen, jonka mukaan epähomogeenisuus aiheuttaa voiman

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla B. \quad (15.25)$$

Magneettikentän suuntaan tästä aiheutuu kiihtyvyys

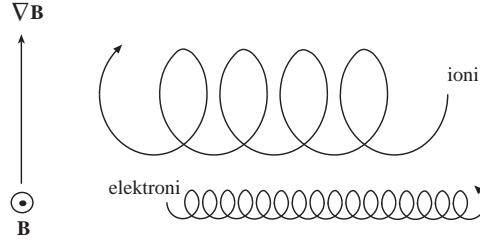
$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = -\frac{\mu}{m} \nabla_\parallel B. \quad (15.26)$$

Kohtisuoraan magneettikenttää vastaan (15.22) antaa kulkeutumisnopeuden

$$\mathbf{v}_G = \frac{\mu}{qB^2} \mathbf{B} \times (\nabla B) = \frac{W_\perp}{qB^3} \mathbf{B} \times (\nabla B). \quad (15.27)$$

<sup>1</sup>Luvun loppu tästä eteenpäin ei ole kurssin ydinainesta, mutta monille hyödyllistä yleissivistystä.

Tätä kutsutaan **gradienttikulkeutumiseksi** (kuva 15.2). Se riippuu sekä hiukkasen energiasta että varauksesta. Eri varaukset kulkeutuvat eri suuntiin ja tästä aiheutuu sähkövirtaa.



Kuva 15.2: Gradienttikulkeutuminen.

Gradientin lisäksi epähomogeeninen magneettikenttä on yleensä myös kaareva. Varattu hiukkanen kokee keskipakovoimaksi kutsutun hitausefektin

$$\mathbf{F}_C = -mw_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_C}{R_C^2} \quad (15.28)$$

missä  $\mathbf{R}_C$  on magneettikentän kaarevuussäde (positiivinen sisäänpäin).  $w_{\parallel}$  on johtokeskuksen nopeus  $\mathbf{B}$ :n suuntaan, mikä poikkeaa hieman hiukkasen vastaavasta nopeuskomponentista  $v_{\parallel}$ . Käytännössä  $w_{\parallel} \simeq v_{\parallel}$  on usein riittävän hyvä tarkkuus. Sijoittamalla tämä kaavaan (15.22) saadaan **kaarevuuskulkeutumiselle** lauseke

$$\mathbf{v}_C = -\frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{B}}{R_C^2 B^2}. \quad (15.29)$$

Pieni differentiaaligeometrisen tarkastelu (HT) osoittaa, että

$$\mathbf{v}_C = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^4} \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (15.30)$$

Tietyillä symmetriaoletuksilla, esim.  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , tämä yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{v}_C = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B. \quad (15.31)$$

Tässä tapauksessa  $\mathbf{v}_G$  ja  $\mathbf{v}_C$  voidaan yhdistää

$$\mathbf{v}_{GC} = \frac{W_{\perp} + 2W_{\parallel}}{qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B, \quad (15.32)$$

missä  $W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$  on pitkittäinen kineettinen energia.

Häiröteoriaa voidaan jatkaa samalla reseptillä myös korkeampiin kertalukuihin määrittämällä alemmassa kertaluvussa johtokeskukseen vaikuttava voima ja sijoittamalla se kaavaan (15.22).

## 15.5 Liiketyhtälö kanonisessa formalismissa

Hiukkasliike voidaan käsitellä elegantisti käyttäen mekaniikasta (toivottavasti) tuttua kanonista formalismia. Sijoitetaan sähkö- ja magneettikentät Lorentzin voiman lausekkeeseen skalaari- ja vektoripotentialien avulla:

$$\mathbf{F} = q(-\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})). \quad (15.33)$$

Muunnetaan tämä kanoniseen muotoon ilmaisemalla se riippumattomien muuttujien  $\mathbf{r}$  ja  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  avulla. Käytetään seuraavassa merkintöjä  $\partial_i = \partial/\partial r_i = \nabla_i$  ja oletetaan summaus toistetun indeksin yli. Suorilla laskuilla nähdään, että

$$[\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \dot{r}_j \partial_i A_j - \dot{r}_j \partial_j A_i = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Yhtälöiden  $d\mathbf{A}/dt = \partial_t\mathbf{A} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$  ja  $\dot{r}_j \partial_i A_j = \partial_i(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$  avulla voiman lausekkeeksi saadaan

$$\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi + \nabla(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt}\mathbf{A} \right]. \quad (15.34)$$

Koska  $\varphi$  ja  $\mathbf{A}$  eivät riipu nopeudesta, voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt}A_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(-\varphi + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right),$$

minkä avulla voiman  $i$ :s komponentti saadaan muotoon

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial r_i}(q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right) \quad (15.35)$$

Lorentzin voima on nyt ilmaistu Lagrangen mekaniikassa *yleistetyn* potentiaalin

$$U = q(\varphi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \quad (15.36)$$

avulla:

$$m\ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}_i}. \quad (15.37)$$

**Lagrangen funktion**  $L = m\dot{\mathbf{r}}^2/2 - U$  avulla liiketyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0. \quad (15.38)$$

Nämä **Lagrangen liiketyhtälöt** ovat toista kertalukua. Niistä voidaan muodostaa ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä siirtymällä **kanonisiin muuttujiin**  $r_i$  (kanoninen koordinaatti) ja  $\pi_i = \partial L/\partial \dot{r}_i = m\dot{r}_i + qA_i$  (kanoninen liikemäärä). Muodostetaan näiden muuttujien **Hamiltonin funktio**

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{r}, t) &= \dot{r}_i \pi_i - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \dot{r}_i \pi_i - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q\varphi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\pi} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi. \end{aligned} \quad (15.39)$$

**Kanoniset liikeyhtälöt** ovat nyt

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \frac{1}{m}(\pi_i - qA_i) \quad (15.40)$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -q\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} + \frac{q}{m}\boldsymbol{\pi} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} - \frac{q^2}{m}\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i}, \quad (15.41)$$

joista alkuperäisen liikeyhtälön johtaminen on suoraviivainen HT.

Kvanttimekaniikan Schrödingerin yhtälö voidaan ilmaista Hamiltonin funktion avulla yleistämällä se kvanttimekaaniseksi operaattoriksi. Kun elektrodynamikkaa viedään kvanttitasolle, se tehdään nimenomaan tässä formalismissa, missä olennaista on kappaleen mekaanisen liikemäärän  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  korvaaminen sen **sähkömagneettisella liikemäärällä**  $\mathbf{p} + q\mathbf{A}$ . Tätä menettelyä kutsutaan “minimisijoitukseksi”.

## 15.6 Adiabaattiset invariantit

Tutustutaan vielä lyhyesti käsitteeseen **adiabaattinen invariantti**. Yleisesti adiabaattisilla invarianteilla tarkoitetaan suureita, jotka säilyvät edellyttäen, että liikettä määrittelevät parametrit muuttuvat liikkeeseen nähden hitaasti. Ne liittyvät läheisesti fysiikan yleisiin symmetriaperiaatteisiin:

$$\begin{aligned} \text{täydellinen periodisuus} &\leftrightarrow \text{säilyvä suure} \\ \text{symmetria} &\leftrightarrow \text{säilymlaki} \end{aligned}$$

Jos liike on kuitenkin ainoastaan melkein periodista, kuten pöyrähdysliike johtokeskusapproksimaatiossa, liikkeeseen liittyy säilyvää suureta heikompi adiabaattinen invariantti.

Mekaniikan kurssilta saattaa olla tuttu tulos: Olkoot  $p$  ja  $q$  kanoninen liikemäärä ja sitä vastaava koordinaatti. Jos liike  $q$ :n suhteen on likiperiodista, niin

$$I = \oint p dq \quad (15.42)$$

on adiabaattinen invariantti. Emme todista tulosta tässä.

Hiukkasen liikemäärä SM kentässä on  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$  ja magneettikenttää vastaan poikittaisen liikkeen kanoniset liikemäärä ja koordinaatti ovat  $\mathbf{p}_\perp$  ja  $\mathbf{r}_L$ . Niinpä

$$I = \oint \mathbf{p}_\perp \cdot d\mathbf{r}_L = -\frac{4\pi m}{q}\mu, \quad (15.43)$$

joten hiukkasen magneettinen momentti on adiabaattinen invariantti. Sitä kutsutaan **ensimmäiseksi adiabaattiseksi invariantiksi**.



**Esimerkki: Magneettinen peili ja pullo**

Johtokeskusapproksimaatiossa säilyvät hiukkasen kokonaisenergia  $W$  ja magneettinen momentti  $\mu = W_{\perp}/B$ . Jos  $B$  muuttuu hitaasti, niin myös  $W_{\perp}$  muuttuu hitaasti ja silloin myös  $W_{\parallel}$ :n täytyy muuttua. Jos  $B$  kasvaa,  $W_{\perp}$  kasvaa kunnes  $W_{\parallel} \rightarrow 0$ . Mutta mitä tapahtuu tilanteessa  $W_{\parallel} = 0$ ?

Tarkastellaan hiukkasen nousukulmaa  $\alpha$ . Koska  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ , voidaan kirjoittaa

$$\mu = \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{2B}. \quad (15.44)$$

Toisaalta  $v^2 \propto W$  on myös vakio, joten ainoat muuttuvat suureet ovat  $\alpha$  ja  $B$  ja niiden välinen relaatio on

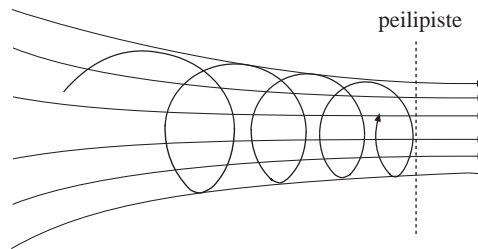
$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (15.45)$$

Siis jos  $\alpha$  tunnetaan jollain magneettikentän arvolla, se voidaan laskea muilla magneettikentän arvoilla.

Kun hiukkasen johtokeskus kulkee kohti kasvavaa magneettikenttää,  $\alpha$  kasvaa kunnes  $\alpha = 90^\circ$ , jolloin pitkittäinen energia on nolla. Johtokeskukseen vaikuttava voima  $\mathbf{F} = -\mu \nabla_{\parallel} B$  kääntää hiukkasen liikkeen. Kenttä toimii siis **magneettisena peilinä** ja voimaa  $\mathbf{F} = -\mu \nabla_{\parallel} B$  kutsutaan **peilivoimaksi**. Peilikentän  $B_m$  voimakkuus riippuu hiukkasen nousukulmasta jossain referenssikentässä  $B_0$ . Kaavasta (15.45) seuraa peilikentälle

$$\sin^2 \alpha_0 = B_0/B_m. \quad (15.46)$$

Koska  $B_m < \infty$ , on aina olemassa  $\alpha_0$ , jota pienemmällä nousukulmalla kentässä  $B_0$  varustetut hiukkaset pääsevät peilin läpi.



Kuva 15.3: Elektronin rata sen lähestyessä magneettista peiliä.

Magneettinen peili liittyy kentän voimakkuuden muutokseen kentän itsensä suuntaan. Johtokeskukseen kulkeutumiseen kentän poikki liittyy toinen tärkeä  $\mu$ :n säilymisestä johtuva efekti. Oletetaan, että hiukkanen kulkeutuu

esim.  $E \times B$ -kulkeutumisen seurauksena kohti suurempaa kenttää ( $B_2 > B_1$ ), jolloin  $\mu$ :n säilymisestä seuraa

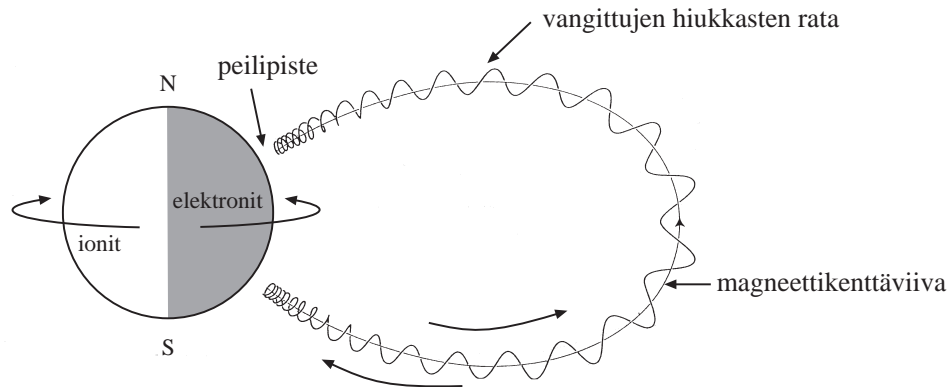
$$\frac{W_{\perp 2}}{W_{\perp 1}} = \frac{B_2}{B_1} \quad (15.47)$$

joten  $W_{\perp 2} > W_{\perp 1}$ . Tätä kutsutaan **adiabaattiseksi kuumennukseksi**. Se on esimerkki betatronikiihdytyksestä.

**Magneettinen pullo** muodostuu kahdesta magneettisesta peilistä, joiden ei tarvitse olla yhtä vahvat. Hiukkanen on vangittu magneettiseen pulloon, jos sen nousukulma pullon heikoimmassa kentässä  $B_0$  on välillä

$$\arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_m}} \leq \alpha_0 \leq 180 - \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_m}}, \quad (15.48)$$

missä  $B_m$  on pullon peilikentistä heikompi. Jos hiukkanen vuotaa pullon (tai peilin) läpi, sen sanotaan olevan **vuotokartiossa**.



Kuva 15.4: Maapallon (lähes) dipolikenttä on suuri magneettinen pullo.

Kuvan (15.4) kaltainen pullo saattaa olla niin muuttumaton, että hiukkasen liike peilikenttien välillä on myös likiperiodista. Mikäli näin on, systeemillä on toinen adiabaattinen invariantti

$$J = \oint p_{\parallel} ds, \quad (15.49)$$

missä epärelativistiselle hiukkaselle  $p_{\parallel} = mv_{\parallel}$ . Jos vielä kulkeutumisliike symmetria-akselin (tässä tapauksessa maapallon dipolikentän) ympäri on likiperiodista, löytyy vielä kolmaskin adiabaattinen invariantti, joka osoitetaan kulkeutuvan hiukkasen johtokeskuksen piirtämän kuoren sisäänsä sulkemaksi magneettivuoksi.

# Sisältö

<b>1 Johdanto</b>	<b>3</b>
1.1 Mikä tämä kurssi on . . . . .	3
1.2 Hieman taustaa . . . . .	4
1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne . . . . .	6
1.4 Kirjallisuutta . . . . .	9
<b>2 Staattinen sähkökenttä</b>	<b>11</b>
2.1 Sähkövaraus ja Coulombin laki . . . . .	11
2.2 Sähkökenttä . . . . .	14
2.3 Sähköstaattinen potentiaali . . . . .	15
2.4 Gaussin laki . . . . .	16
2.4.1 Maxwellin ensimmäinen yhtälö . . . . .	16
2.4.2 Gaussin lain soveltamisesta . . . . .	17
2.5 Sähköinen dipoli . . . . .	20
2.6 Sähkökentän multipolikehitelmä . . . . .	21
2.7 Poissonin ja Laplacen yhtälöt . . . . .	22
2.8 Laplacen yhtälön ratkaiseminen . . . . .	24
2.8.1 Karteesinen koordinaatisto . . . . .	24
2.8.2 Pallokoordinaatisto . . . . .	26
2.8.3 Sylinterikoordinaatisto . . . . .	31
2.9 Kuvalähdemenetelmä . . . . .	32
2.10 Greenin funktiot . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Sähkökenttä väliaineessa</b>	<b>37</b>
3.1	Sähköinen polarisoituma . . . . .	37
3.2	Polarisoituman aiheuttama sähkökenttä . . . . .	38
3.3	Sähkövuon tiheys . . . . .	39
3.4	Dielektrisyys ja susceptiivisuus . . . . .	40
3.5	Sähkökenttä rajapinnalla . . . . .	41
3.5.1	Eristepallo sähkökentässä . . . . .	43
3.5.2	Pistevaraus eristepinnan lähellä . . . . .	45
3.6	. . . . .	46
<b>4</b>	<b>Sähköstaattinen energia</b>	<b>49</b>
4.1	Varausjoukon potentiaalienergia . . . . .	49
4.2	Varausjakautuman sähköstaattinen energia . . . . .	50
4.3	Sähköstaattisen kentän energia . . . . .	51
4.4	Sähkökentän voimavaikutukset . . . . .	55
4.5	Maxwellin jännitystensori sähköstatiikassa . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Staattinen magneettikenttä</b>	<b>59</b>
5.1	Sähkövirta . . . . .	59
5.1.1	Jatkuvuusyhtälö . . . . .	60
5.1.2	Ohmin laki . . . . .	60
5.1.3	Johtavuuden klassinen selitys . . . . .	62
5.1.4	Samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut . . . . .	63
5.2	Magneettivuon tiheys - Biot'n ja Savartin laki . . . . .	64
5.3	Ampèren laki . . . . .	68
5.4	Virtasilmukan magneettimomentti . . . . .	70
5.5	Magneettikentän potentiaaliesitys . . . . .	71
5.5.1	Vektoripotentiaali . . . . .	71
5.5.2	Multipolikehitelmä . . . . .	73
5.5.3	Magneettikentän skalaaripotentiaali . . . . .	74
5.6	Lorentzin voima . . . . .	75

<b>6</b>	<b>Magneettikenttä väliaineessa</b>	<b>77</b>
6.1	Magnetoituma . . . . .	77
6.2	Magnetoituneen aineen aiheuttama kenttä . . . . .	78
6.3	Magneettikentän voimakkuus . . . . .	80
6.4	Suskeptiivisuus ja permeabiliteetti . . . . .	81
6.5	Magneettikenttävektoreiden rajapintaehdot . . . . .	82
6.6	Reuna-arvotehtäviä magneettikentässä . . . . .	83
6.7	Kenttien E, D, B ja H merkityksestä . . . . .	86
6.8	Molekulaarinen magneettikenttä . . . . .	86
6.9	Para- ja diamagnetismista . . . . .	87
6.10	Ferromagnetismi . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Sähkömagneettinen induktio</b>	<b>91</b>
7.1	Faradayn laki . . . . .	91
7.2	Itseinduktio . . . . .	95
7.3	Keskinäisinduktio . . . . .	96
7.4	Pähkinä purtavaksi: Feynmanin kiekko . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Magneettinen energia</b>	<b>99</b>
8.1	Kytettyjen virtapiirien energia . . . . .	99
8.2	Magneettikentän energitiheys . . . . .	100
8.3	RLC-piiri . . . . .	103
8.4	Epälineaariset energiahäviöt . . . . .	104
8.5	Magneettikentän voimavaikutus virtapiireihin . . . . .	107
8.6	Maxwellin jännitystensori magnetostatiikassa . . . . .	110
<b>9</b>	<b>Maxwellin yhtälöt</b>	<b>111</b>
9.1	Siirrosvirta . . . . .	111
9.2	Maxwellin yhtälöt . . . . .	113
9.3	Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla . . . . .	114
9.4	Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä . . . . .	116
9.4.1	Poyntingin teoreema: energian säilyminen . . . . .	116

9.4.2	Maxwellin jännitystensori . . . . .	118
9.4.3	Liikemäärän ja liikemäärämomentin säilyminen . . . . .	120
9.5	Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet . . . . .	120
9.5.1	Aaltoyhtälö tyhjiössä . . . . .	121
9.5.2	Potentiaaliesitys . . . . .	121
9.5.3	Viivästyneet potentiaalit . . . . .	122
9.5.4	Aaltoyhtälön Greenin funktio . . . . .	124
9.6	Mittainvarianssi . . . . .	126
<b>10</b>	<b>Sähkömagneettiset aallot</b>	<b>129</b>
10.1	Tasoaallot eristeessä . . . . .	129
10.2	Aaltojen polarisaatio . . . . .	132
10.3	Sähkömagneettisen aallon energia . . . . .	134
10.4	Tasoaallot johteessa . . . . .	135
10.5	Druden ja Lorentzin oskillaattorimalli . . . . .	137
10.6	Palloaallot . . . . .	140
<b>11</b>	<b>Aaltojen heijastuminen ja taittuminen</b>	<b>143</b>
11.1	Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle . . . . .	143
11.2	Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa . . . . .	145
11.3	Heijastuminen johteen pinnalta . . . . .	149
<b>12</b>	<b>Aaltoputket ja resonanssikaviteetit</b>	<b>151</b>
12.1	Sylinteriputki . . . . .	152
12.2	Suorakulmainen aaltoputki . . . . .	155
12.3	Resonanssikaviteetit . . . . .	157
<b>13</b>	<b>Liikkuvan varauksen kenttä</b>	<b>159</b>
13.1	Liénardin ja Wiechertin potentiaalit . . . . .	159
13.2	Kenttien laskeminen . . . . .	161
13.2.1	Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä . . . . .	163
13.2.2	Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä . . . . .	166
13.3	Säteilyn spektri . . . . .	167
13.4	Jarrutussäteily . . . . .	168
13.5	Syklotroni- ja synkrotronisäteily . . . . .	170

<i>SISÄLTÖ</i>	205
<b>14 Elektrodynamiikka ja suhteellisuusteoria</b>	<b>173</b>
14.1 Lorentzin muunnos . . . . .	173
14.2 Tensorilaskentaa . . . . .	177
14.3 Lorentzin muunnokset ja dynamiikka . . . . .	179
14.4 Elektrodynamiikan kovariantti formulointi . . . . .	184
14.5 Kenttien muunnokset . . . . .	186
14.6 Potentiaalien muunnokset . . . . .	188
14.7 Säilymislait . . . . .	188
<b>15 Varatun hiukkasen liike SM-kentässä</b>	<b>191</b>
15.1 Säteilyhäviöiden vaikutus . . . . .	191
15.2 Homogeeninen ja staattinen B . . . . .	192
15.3 Homogeeniset ja staattiset B ja E . . . . .	194
15.4 Magneettiset kulkeutumislait . . . . .	195
15.5 Liiketyhtälö kanonisessa formalismissa . . . . .	197
15.6 Adiabaattiset invariantit . . . . .	198