# Elektrodynamiikka, kevät 2008

## Painovirheiden ja epätäsmällisyyksien korjauksia sekä pieniä lisäyksiä luentomonisteeseen

Sivunumerot viittaavat vuoden 2007 luentomonisteeseen.

- Sivun 18 loppu: Vaikka esimerkissä tarkastellaan vain tasaisesti varattua palloa, niin minkä tahansa pallosymmetrisen jakauman *ulkopuolella* kenttä on muodoltaan sama kuin origossa olevan pistevarauksen kenttä.

- Sivu 23: Ei ole välttämätöntä puhua johdekappaleista. Riittää, että reunoilla potentiaali tai sen normaaliderivaatta ovat tunnettuja funktioita. Potentiaalin ei tarvitse olla vakio annetulla pinnalla.

- Sivu 30, johdepallo vakiosähkökentässä. Jo potentiaalin lausekkeesta huomataan, että pallon aiheuttama häiriötermi on dipolipotentiaali. Dipolimomentin voi päätellä suoraan lausekkeesta (2.86).
  Tämä on myös esimerkki kuvalähdemenetelmästä: ulkoisessa vakiokentässä oleva pallo voidaan korvata keskipisteeseen sijoitetulla dipolilla (tarkasteltaessa aluetta $r > a$).

- Sivu 32, ensimmäisen lauseen alku: "Laplacen yhtälön yksikäsitteisyys" $\rightarrow$ "Poissonin yhtälön yksikäsitteisyys".

- Sivu 38, yhtälö 3.5: integroimistilavuus $V_0$ on eristekappale.

- Sivu 51, luvun 4.3 alku: Luvun 4.2 käsittelyn jatkoksi on johdonmukaisempaa käyttää "tyhjömuotoa" $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \sigma = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ ja vasta sen jälkeen yleistää energiatiheyden lauseke yksinkertaiselle väliaineelle.

- Sivu 69, yhtälön 5.44 jälkeen tuleva lause täsmällisemmässä muodossa: "Koska tilavuusintegraalissa integrandi on nolla virtajakauman ulkopuolella, integroimisalue $V$ voidaan ulottaa koko avaruuteen, jolloin kaikilla fysikaalisilla virtajärjestelmillä pintaintegraali häviää.".

- Sivu 70, yhtälö 5.54: Suoraviivaisemmin voidaan todeta, että $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C d(r^2/2) = 0$.

- Sivu 73 (multipolikehitelmä): Yleissivistävä huomautus: dynamiikassa vektoripotentiaalillakin on $1/r$-termi.

- Sivu 75: Magneettivuon tiheyden lauseke (5.87) pätee pienillä vakionopeuksilla (sama koskee staattista Coulombin sähkökenttää). Kiihtyvässä liikkeessä olevan hiukkasen kenttä ja relativistiset nopeudet käsitellään myöhemmin. Lorentzin voiman laki pätee aina.

- Sivu 139, yhtälö (10.59): korvataan $N \to n$

- Sivu 147: Jos vektorilaskenta tuntuu hankalalta, niin jatkuvuusehdot saa helposti myös geometrisen tarkastelun avulla.

- Sivu 149 (lisäys kokonaisheijastusta koskevan kappaleen loppuun): Jos saapumiskulma $\theta_1$ on suurempi kuin $\theta_c$, niin Snellin lain mukaan taittumiskulman $\theta_2$ kosini on puhtaasti imaginaarinen:

  $$\cos\theta_2 = i\sqrt{(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_c})^2 - 1}$$

  Tällöin

  $$e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}} = e^{ik_2 x\sin\theta_2}e^{ik_2 z\cos\theta_2}$$

  esittää aaltoa, joka etenee rajapinnan suuntaisesti ($x$), mutta vaimenee sitä vastaan kohtisuorassa suunnassa ($z$) eksponentiaalisesti. Vaikka kenttä aineessa 2 ei siis olekaan nolla, keskimääräinen energiavuo $z$-suunnassa on nolla. Koska $S_z = \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{S} \sim \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{E}\times(\mathbf{k}_2\times\mathbf{E})$, niin energiavuon aikakeskiarvo on $< S_z > \sim Re(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{e}_z|\mathbf{E}|^2) = Re(k_2\cos\theta_2|\mathbf{E}|^2) = 0$, koska $\cos\theta_2$ on puhtaasti imaginaarinen.

- Sivu 164: Yhtälön (13.27) vasemmalla puolella hakasulkulausekkeessa pitää olla vektori $\boldsymbol{\beta}$: $[R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}]_{ret}$.

- Sivu 184: Yhtälön (14.55) jälkeen korvataan "eli kentän tekemä työ" $\to$ "eli oleellisesti kentän tekemän työn teho".

- Sivu 194 (luku 15.3): Jotta epärelativistinen tarkastelu olisi kelvollinen, on oltava $E_0 << cB_0$. Yleisempi tarkastelu onnistuu kätevästi Lorentzin muunnoksen avulla. Oletetaan edelleen, että kentät ovat toisiaan vastaan kohtisuoria.

Jos $|\mathbf{E}| < c|\mathbf{B}|$, niin siirrytään koordinaatistoon, joka liikkuu nopeudella

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

jolloin $u = E/B < c$. Käyttämällä kenttien muunnoskaavoja nähdään, että tällaisen koordinaatiston mukana kulkeva inertiaalihavaitsija ei havaitse ollenkaan sähkökenttää, mutta havaitsee vakiomagneettikentän $\mathbf{B}/\gamma$. Ongelma palautuu siis luvun 15.2 tilanteeseen.

Jos taas $|\mathbf{E}| > c|\mathbf{B}|$, niin siirrytään koordinaatistoon, joka liikkuu nopeudella

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2} c^2$$

jolloin $u = Bc^2/E < c$. Tällaisen koordinaatiston mukana kulkeva inertiaalihavaitsija ei nyt havaitse ollenkaan magneettikenttää, mutta havaitsee vakiosähkökentän $\mathbf{E}/\gamma$. Myös tässä tilanteessa liikeyhtälö on ratkaistavissa suljetussa muodossa.

Kun rata on ratkaistu liikkuvassa koordinaatistossa, päästään sivusta tilannetta seuraavan havaitsijan koordinaatistoon Lorentz-muuntamalla aika ja paikka.

(Päivitys 7.1.2008)

- Luku 5: Magneettivuon tiheyttä ja vektoripotentiaalia koskevat perustulokset voidaan johtaa suoraviivaisemmin seuraavasti:

  Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettivuon tiheys on

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV'$$

  Huomataan, että

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \times (\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|})$$

  missä gradientti operoi muuttujaan $\mathbf{r}$. Magneettivuon tiheys on siis

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

Tästä seuraa, että magneettivuon tiheydellä ei ole divergenssiä:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$\mathbf{B}$ voidaan siis ilmaista vektoripotentiaalin $\mathbf{A}$ avulla:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

missä

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

(Tähän voitaisiin lisätä skalaarifunktion gradientti, koska $\mathbf{B}$ pysyisi muuttumattomana. Tämä on esimerkki mittamuunnoksista, jotka käsitellään lähemmin luvussa 9.)

Magneettivuon tiheyden roottoriyhtälöksi tulee

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Koska

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

niin

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mu_0 \mathbf{J}$$

Osoitetaan, että edellä määritellyn vektoripotentiaalin divergenssi on nolla. Huomataan ensin, että

$$\nabla \cdot (\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \cdot (\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|})$$

missä tarvitaan oletus virrantiheyden stationaarisuudesta ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$). Vektoripotentiaalin lausekkeessa esiintyvä tilavuusintegraali voidaan nyt muuttaa pintaintegraaliksi. Fysikaalisesti mielekäs oletus on, että $\mathbf{J}$ poikkeaa nollasta vain äärellisessä tilavuudessa $V$. Tällöin integroimisalue voidaan laajentaa koko avaruudeksi, jolloin pintaintegraali antaa nollan. On siis saatu Amperen laki

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Vektoripotentiaali puolestaan toteuttaa Poissonin yhtälön

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

joka on samaa muotoa kuin sähköstatiikan skalaaripotentiaalin Poissonin yhtälö.

(Päivitys 4.2.2008)

- Sivu 15. Sähköstaattisen kentän konservatiivisuus merkitsee myös ominaisuutta $\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$ eli kentän viivaintegraali suljetun silmukan yli on nolla.

- Sivu 31, yhtälö (2.95): on $(A_0 \ln(r/r0))$, pitää olla $(A_0 + \ln(r/r0))$.

- Luku 6.3. Magneettikentän voimakkuus $\mathbf{H}$ voidaan ottaa käyttöön myös lyhyemmällä perustelulla. Luvussa 6.1 on todettu, että magnetoituman $\mathbf{M}$ roottori antaa magnetoitumisvirran tiheyden $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Toisaalta magneettivuon tiheyden aiheuttava kokonaisvirrantiheys on $\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_M$, missä $\mathbf{J}$ sisältää kaikki muut virrat kuin magnetoitumisvirran (vrt. sähkökenttä väliaineessa, $\rho_{tot} = \rho + \rho_P$). Amperen lain mukaan $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} = \mu_0(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M})$, jolloin $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}) = \mathbf{J}$.

- Sivun 86 loppu: ”Jos lisäksi aine on magneettisesti ainakin likimain lineaarista eli $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ja tasaisesti magnetoitunutta $(\nabla \cdot \mathbf{M} = 0)$, ...” $\rightarrow$ ”Jos lisäksi pätee yksinkertainen magnetoitumislaki $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ($\mu =$ vakio), ...”

- Sivu 97, yhtälöt (7.24)-(7.26): Lasku yksinkertaistuu, kun lausutaan magneettivuo vektoripotentiaalin avulla:
  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}$
  missä käytettiin Stokesin lausetta.

- Sivu 99, ennen yhtälöä (8.2): ”Jännite tekee työtä siirtämällä varauksia silmukassa” $\rightarrow$ ”Jännitelähde tekee työtä varausten siirtämiseksi silmukassa”.

- Sivu 100, rivi ennen yhtälöä (8.6): on $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$, pitää olla $d\Phi_i' = \Phi_i d\alpha$. $\Phi_i$ on siis silmukan $i$ läpäisevän vuon lopullinen arvo. Vuot kasvavat luonnollisesti samassa tahdissa kuin virrat.

- Sivu 117, yhtälön (9.28) jälkeen: "Oletetaan väliaine lineaariseksi ja että permittiivisyystensori on symmetrinen (näin on esimerkiksi isotrooppisen väliaineen tapauksessa)" → "Oletetaan väliaine lineaariseksi ja permittiivisyys- ja permeabiliteettitensorit symmetrisiksi".

- Sivu 130, yhtälössä (10.7) $\mathbf{E}_0$ on reaalinen. Tämä ei ole rajoittava oletus.

- Sivu 140, yhtälön (10.67) jälkeen:
"Ongelmana on termin $\nabla^2\mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla\nabla \cdot \mathbf{E}$ kirjoittaminen pallokoordinaateissa. Termin $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ radiaali- ja kulmakomponenteissa ovat mukana kaikki pallokoordinaatiston muuttujat."
→ "Ongelmana on termin $\nabla^2\mathbf{E}$ kirjoittaminen pallokoordinaateissa, koska yksikkovektorit $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ eivät ole vakioita."

- Sivu 164, ennen yhtälöä (13.31):
"Sähkökentän komponentit saadaan lausekkeen (13.28) gradientista"
→ "Lausekkeista (13.28) ja (13.29) saadaan sähkökentän komponentit"

- Sivu 164, yhtälö (13.34): $-\mathbf{e}_x \times \nabla\varphi = -\mathbf{e}_x \times (\nabla\varphi + \partial\mathbf{A}/\partial t) = \mathbf{e}_x \times \mathbf{E}$, koska vektoripotentiaalilla on vain $x$-komponentti.

  (Päivitys 17.4.2008)

- Sivu 194 (luku 15.3): Tarkennus edellä olevaan lisätekstiin: Kun tehdään Lorentz-muunnos nopeudella

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

  liikkuvaan systeemiin ($E/B < c$), niin tällaisen koordinaatiston mukana kulkeva inertiaalihavaitsija havaitsee ainoastaan vakiomagneettikentän $\mathbf{B}/\gamma$. Tässä tekijä $\gamma = (1 - (u/c)^2)^{(-1/2)}$ liittyy koordinaatistojen väliseen suhteelliseen nopeuteen eikä hiukkasen liikeyhtälössä esiintyvään nopeuteen.

  (Päivitys 7.5.2008)